NEW SCIENCE WORLD
VICTORY MUST

இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics

1 30
மணித்தியாலம்
1 30 Hours

K . Ainharan B.Sc	Exam -10	மேலதிக வாசிப்பு நேரம்10நிமிடங்கள்

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n}(r^2-1) = \frac{1}{6}(n-1)n\,(2n+5)$ எனக் காட்டுக.

2. ஒரே வரிப்படத்தில் $y = |x-3| - 1, \quad y = 2 - |2-x|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக, சமனிலி $\left|x - \frac{3}{2}\right| + |x-1| \leq \frac{3}{2}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

3. ஒரே ஆகண் வரிப்படத்தில் (i) $|z-2|=2$ (ii) $\text{Arg}\,(\text{z}-1-\text{i})=\frac{\pi}{4}$ ஆகியவற்றைத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைக்குறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுங்குகளைப் பரும்படியாக வரைந்து இவ் ஒழுங்குகளின் வெட்டுப்புள்ளியினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண் z_1 ஐ வடிவம் $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ இற் காண்க. இங்கு $r>0$ உம் $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.

4. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{5+\cos}\,-2}{(\pi-x)^2}=\frac{1}{8}$ எனக் காட்டுக.

5. நீள்வளையம் $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ இற்கு புள்ளி $P=(3\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ இல் வரையப்படும் செவ்வனின் சமன்பாடு $\frac{3x}{\cos\theta}-\frac{2y}{\sin\theta}=5$ எனக் காட்டுக. இங்கு $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ஆகும். செவ்வனின் புள்ளி $\left(0,-\frac{5}{4}\right)$ இனூடு செல்லத்தக்கதாக θ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

6. $\frac{d}{dx}\{3^x\}$ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து, $\int_0^1 \frac{3^x}{3^x+1}dx$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

7. $y = x^2 + 1,\ y = 2x^2$ ஆகிய இரு பரவளைவுகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. இரு வரைபுகளினால் உள்ளடைக்கபடும் பிரதேசத்தை x அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடு சுழற்றுவதனால் உண்டாகும் திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{32\pi}{15}$ கன அலகுகள் எனக் காட்டுக.

8. இணைகரம் $OABC$ இன் பக்கங்கள் $AB,\ BC$ இன் சமன்பாடுகள் முறையே $3x + y - 1 = 0,$ $7x - 9y + 1 = 0$ ஆகும். இங்கு O உற்பத்தியாகும். மூலைவிட்டம் OB இன் சமன்பாட்டையும் ஏனைய பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

9. நேர்கோடு $3x + 4y + k = 0$ ஆனது வட்டம் $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ ஐத் தொடுமெனின் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

10. $0 \leq \theta \leq 2\pi$ இற்குச் சமன்பாடு $\sin\theta(1 + \sin\theta) = (1 - \cos\theta)\cos\theta$ ஐத் தீர்க்க.

11. கிடைத்தரையில் இருந்து h உயரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் இருந்து புவியீர்ப்பின் கீழ் சுயாதீனமாக ஒரு துணிக்கை P விழவிடப்படும் கணத்தில் அதற்கு நேர் கீழே தரையில் உள்ள புள்ளியில் இருந்து துணிக்கை Q ஆனது u வேகத்துடன் புவியீர்ப்பின் கீழ் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்படுகின்றது. இரு துணிக்கைகளும் தரையில் இருந்து $\frac{2h}{3}$ உயரத்தில் சந்திப்பின் இரு துணிக்கைகளும் சந்திக்கும் வரைக்கும் P, Q இன் இயக்கங்களுக்கான வேக-நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைந்து அதிலிருந்து, $h = \frac{2u^2}{3g}$ எனக் காட்டுக.

12. முறையே $3m, 2m$ திணிவுகளை உடைய P, Q என்னும் சம அளவுகளை உடைய ஒப்பமான கோளங்கள் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது முறையே $2u, u$ என்னும் சீரான வேகங்களுடன் ஒன்றை ஒன்று நோக்கி இயங்கி நேரடியாக மோதுகின்றன. கோளங்களுக்கு இடையிலான மீளமைக் குணகம் e எனின்

I. மோதலுக்கு சற்றுப்பின் Q இன் வேகம் $\frac{1}{5}(9e + 4)u$ எனக் காட்டுக.

II. மோதலுக்கு சற்றுபின் P இன் வேகம் $\frac{1}{2}u$ எனின் e ஐக் காண்க.

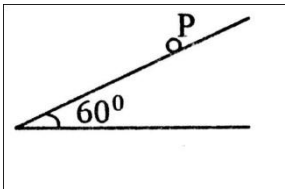
13. கிடை நிலைக்குத்து வேகங்கள் முறையே $\sqrt{2gh}, v$ ஆகுமாறு கிடைத்தரையில் உள்ள ஒரு புள்ளி ஒன்றில் இருந்து நிலைக்குத்துத் தளத்தில் எறியப்படும் துணிக்கையின் வேகத்தின் திசை கிடையுடன் எறியற் கோணத்தின் அரைவாசியாக உள்ளபோது அதன் நிலைக்குத்து வேகம் $\frac{v}{3}$ எனின் v ஐக் கண்டு துணிக்கையின் எறியற் புள்ளிக்கூடான கிடைவீச்சு $4\sqrt{3}\,h$ எனக் காட்டுக.

14. $400\,kg$ திணிவுடைய மோட்டார் காரின் வேகம் v ஆக உள்ள போது இயக்கத்திற்கு எதிரான தடைவிசை $40v\ N$ ஆகுமாறு இயங்குகின்றது. சமதரையில் காரின் அதியுயர் வேகம் $56\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

I. மோட்டார் கார எஞ்சினது அதி கூடிய சாத்தியமான வலுவைக் காண்க.

II. சமதரையில் காரின் வேகம் $32\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ஆக உள்ள போது காரின் சாத்தியமான உயர் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

15. $2\,\text{kg}$ திணிவுள்ள துணிக்கை P ஆனது கிடையுடன் $60°$ சாய்வுள்ள $4m$ நீளமுள்ள ஒரு கரடான சாய்தளத்தின் உச்சியில் இருந்து மெதுவாக விடப்படும்போது சாய்தளம் வழியே துணிக்கை இயங்குகின்றது. சாய்தளத்துக்கும் துணிக்கைக்கும் இடையிலான உராய்வுக் கோணம் $30°$ எனின்

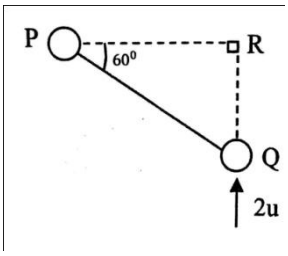


I. துணிக்கை மீது தாக்கும் உராய்வு விசை யாது?

II. P இன் ஆர்முடுகல் யாது?

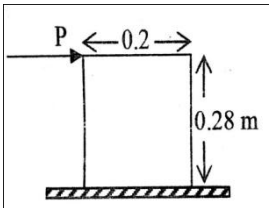
III. துணிக்கை சாய்தளத்தின் அடியை அடையும் போது அதன் வேகம் v எனில் $v^2 = \frac{8g}{\sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக.

16. படத்தில் காட்டியவாறு முறையே $m, 2m$ திணிவுகளை உடைய இரு ஒப்பமான துணிக்கைகள் P, Q என்பன இலேசான நீளா இழையினால் இணைக்கப்பட்டு, ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீதுவைக்கப்பட்டு துணிக்கை Q இற்கு மேசை வழியே QR திசையில் $2u$ வேகம் கொடுக்கப்படுகிறது. இழை இறுகிச் சற்றுப்பின் P, Q இன் வேகங்களையும், இழையில் ஏற்படும் கணத்தாக்கத்தையும் துணிவதற்கு போதுமான சமன்பாடுகளைப் பெற்று இழையில் ஏற்படும் கணத்தாக்கைக் காண்க.



17. O என்ற உற்பத்தி குறித்து A, B, C என்ற புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ஆகும். A, B, C உள்ள தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி D இன் தானக்காவியை $\overrightarrow{OD} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{b} + (1 - \lambda - \mu)\underline{c}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு λ, μ எண்ணிகள்.

18. 0.4 kg திணிவுள்ள கனவுரு வடிவிலான பெட்டியின் திணிவு மையத்தினூடான நிலைக்குத்துக் குறுக்கு வெட்டு முகத்தைப் படம் காட்டுகின்றது. A இல் படிப்படியாக அதிகரிக்கும் கிடைவிசை P பிரயோகிக்கப்படுகிறது. பெட்டி கவிழாது வழுக்கும் எனின் $14\mu < 5$ எனக் காட்டுக.



19. AB என்ற கோல் $6\,a$ நீளமும் w நிறையுமுடையது. கோலின் நடுப்புள்ளியில் கட்டப்பட்ட இழையின் மறுநுனி ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளி D இல் கட்டப்பட்டுள்ளது. D இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே உள்ள புள்ளியில் A, பொறுத்துள்ளது. B இல் w நிறை கட்டப்பட்டுள்ளது. நாப்பத்தில் கோல் சுவருடன் $60°$ கோணத்தை அமைப்பின் விசை முக்கோணி ஒன்றை வரைந்து இழையில் உள்ள இழுவையைக் காண்க.

20. A, B, C என்ற நாடுகளைச் சேர்ந்த மாணவர்கள் ஆங்கில பாடப் பரீட்சைக்கு தோற்றுகின்றார்கள். பரீட்சைப் பெறுபேறுகள் வெளியான போது எழுமாற்றாக ஒரு மாணவர் தெரிவுசெய்யப்படுகிறார்.

E = (விசேட சித்தி பெற்ற மாணவர்கள்)

A = (A என்ற நாட்டைச் சேர்ந்த மாணவர்) B = (B என்ற நாட்டைச் சேர்ந்த மாணவர்)

C = (C என்ற நாட்டைச் சேர்ந்த மாணவர்)

$P(E) = \frac{3}{10},\ P(A) = \frac{4}{5},\ P(E/A) = \frac{1}{5}$ எனின் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) E, A என்ற நிகழ்ச்சிகள் சாராதவையா? காரணம் தருக.

(ii) $P(E \cap A)$

(iii) $P(E' \cap A')$