க.பொ.த உயர்தரம்

இணைந்த கணிதம்

(தூயகணிதப்பகுதி)

திரிகோண கணிதம்

learnium.org

G.C.E. ADVANCED LEVEL

COMBINED MATHEMATICS

(Pure Mathematics Component - Trigonometry)

கா. கணேசலிங்கம், B.Sc. Dip-in-Ed.

க. பொ. த

உயர்தர வகுப்புக்கான

இணைந்த கணிதம்

(தூயகணிதப் பகுதி)

திரிகோண கணிதம்

learnium.org

K. Ganeshalingam. B. Sc. Dip in Ed.

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
155/2, CANAL ROAD, COLOMBO - 06.
Phone : 592707

BIBLIOGRAPHICAL DATA

Title	:	INNAINTHA KANITHAM (PURE MATHEMATICS - COMPONENT TRIGONOMETRY)
Language	:	Tamil
Author	:	Karthigesu Ganeshalingam B. Sc.Dip – in – Ed. Puttalai, Puloly.
Publications	:	Sai Educational Publication 155/2, Canal Road, Colombo –06.
Date of Issue	:	August 2005
No of pages	:	333 + iv
Copyright	:	Sai Educational Publication.
Type Setting	:	SDS COMPUTER SERVICES, Col - 06. Tel : 553265

Printed at Students Offset Services, Chennai-600 001, ☎25382513

நூலின் விபரம்

தலைப்பு	:	க. பொ. த உயர்தரம் இணைந்த கணிதம் (தூயகணிதப் பகுதி - திரிகோண கணிதம்)
மொழி	:	தமிழ்
ஆசிரியர்	:	கார்த்திகேசு கணேசலிங்கம். புற்றளை, புலோலி.
வெளியீடு	:	சாயி கல்வி வெளியீட்டகம். 155/2, கனல் வீதி கொழும்பு - 06
பிரசுரத்திகதி	:	ஆகஸ்டு 2005
பக்கங்கள்	:	225 + iv
பதிப்புரிமை	:	சாயி கல்வி வெளியீட்டகம்.
கணனிப்பதிவு	:	எஸ்.டி.எஸ் கம்பியூட்டர் சேர்விசஸ், கொழு - 0-6. 553265

அச்சிட்டோர் : மாணவர் மறுதோன்றி அச்சகம், சென்னை – 1. ☎ 25382513

என்னுரை

புதிய பாடத்திட்ட **இணைந்த கணிதம்** - தூய கணிதப் பகுதி அட்சரகணித நூலைத் தொடர்ந்து, தூயகணிதப் பகுதியில் **திரிகோண கணிதம்** என்னும் இந்நூல் வெளிவருகிறது. பாடத்திட்டத்தில் அடக்கப்பட்டுள்ள உள்ளடக்கங்கள் யாவையும் இந்நூல் கொண்டுள்ளது.

இந்நூலில் ஒவ்வொரு அலகிற்கும் பல்வேறு விதமான உதாரணக் கணக்குகள், கடந்தகால வினாப்பத்திரக் கணக்குகள், என்பன மாணவர்கள் இலகுவாக விளங்கிக் கொள்ளக் கூடிய முறையில் செய்துகாட்டப்பட்டுள்ளன. அவற்றைத் தொடர்ந்து வரும் பயிற்சிக் கணக்குகளை மாணவர்கள் தாமாகவே செய்து கொள்ள இது வழிவகுத்துக் கொடுக்கும் என்பது எனது எதிர்பார்ப்பாகும். அநேக மாணவர்களின் வேண்டுகோளுக்கிணங்க 1982 - 2000 வரையான கடந்தகால வினாப்பத்திரத்தில் சில குறித்த கணக்குகளுக்கான விடைகள் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன. மேலும் திரிகோணகணித நூலின் பருமன் அதிகரிப்பினால் **ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்** தனி ஒரு நூலாக வெளிவரும் என்பதையும் அறியத்தருகிறோம். மாணவர்கள் வெறுமனே விடைகளைப் பெறும் கணித யுத்திகளைப் பயிலும் இயந்திரங்களாக இருக்காது கணிதத் தாற்பரியத்தை விளங்கிக் கொண்டு அதனை மேலும் விருத்தி செய்யும் சிந்தனையாளர்களாக இருப்பது அவசியமாகும்.

நிறைவுகள் ஏற்று குறைவுகள் சுட்டி மேலும் இணைந்த கணிதத்தின் அடுத்த பகுதி நூலை வெளியிட ஆக்கமும் ஊக்கமும் தருவார்களென மாணவர்களையும் ஆசிரியர்களையும் கேட்டு இந்நூலை புத்தக உருவில் கொணர்ந்த சாயி கல்வி வெளியீட்டகத்துக்கும் எனது நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கின்றேன்.

நன்றி

ஜூன் 2001

ஆசிரியர்

learnium.org

பொருளடக்கம்

****

1. கோண அளவீடுகள், திரிகோண கணித விகிதங்கள் 01

2. $sin(A \pm B)$, $cos(A \pm B)$, $tan(A \pm B)$ என்பவற்றின் விரிவுகள் 26

3. மடங்குக் கோணங்கள் 47

4. திரிகோணகணித சமன்பாடுகள் 60

5. முக்கோணியின் பக்கங்களும் கோணங்களும். 101

6. மேலதிக உதாரணங்கள் 115

7. பலவினப் பயிற்சி 214

8. விடைகள் 222

learnium.org

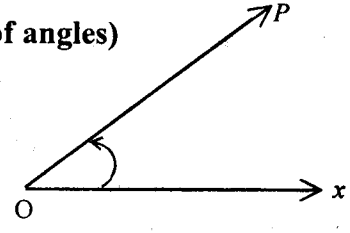
1. கோண அளவீடுகள், திரிகோணகணித விகிதங்கள்

கோண அளவீடுகள் (Measurement of angles)

O - உச்சி

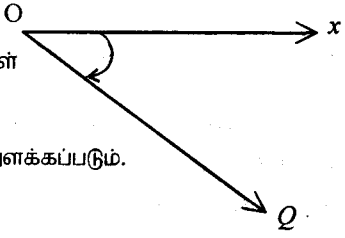
Ox - ஆரம்பக் கோடு

அல்லது நிலைத்த கோடு ஆகும்.



Ox இலிருந்து இடஞ்சுழியாக அளக்கப்படும் கோணங்கள், நேர்க் கோணங்கள் (positive angles) எனவும், வலஞ்சுழியாக அளக்கப்படும் கோணங்கள் மறைக்கோணங்கள் (negative angles) எனவும் வரையறுக்கப்படும்.

கோணங்கள் பாகையில் அல்லது ஆரையனில் அளக்கப்படும்.



ஆரையன் (Radian)

O வை மையமாகவும் r ஐ ஆரையாகவும் உடைய வட்டம் ஒன்றைக் கருதுக. ஆரை r க்கு நீளத்தில் சமமாக உள்ள வில் AB எனின், வில் AB யினால் மையம் O வில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் 1 ஆரையன் எனப்படும்.

$\angle AOB = 1$ ஆரையன் $= 1^c$ எனக் குறிக்கப்படும்.

$360^o = 2\pi$ ஆரையன் ஆகும்.

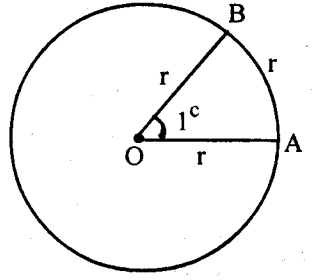
$1^o = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ ஆரையன்.

மறுதலையாக

2π ஆரையன் $= 360^o$

1 ஆரையன் $= \frac{360^o}{2\pi}$

$= \frac{180^o}{\pi} = 57{\cdot}3^o$ (அண்ணளவாக)

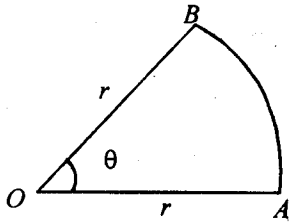


learnium.org

$360^o = 2\pi$ ஆரையன் என்பதால்

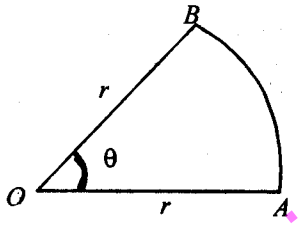
$180^o = \pi$, $90^o = \frac{\pi}{2}$, $60^o = \frac{\pi}{3}$, $30^o = \frac{\pi}{6}$, $120^o = \frac{2\pi}{3}$ ஆரையன்கள் ஆகும்.

வட்ட வில்லொன்றின் நீளம்



r ஆரையுடைய வில்லொன்று (AB என்க)
வட்டமையம் O வில் எதிரமைக்கும்
கோணம் θ ஆரையன் எனின்,
வட்ட வில் AB யின் நீளம் $r\theta$ ஆகும்.

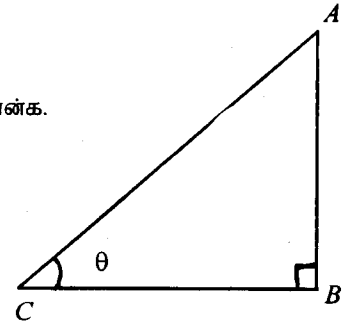
ஆரைச்சிறை (Sector)



வட்டமொன்றின் இரு ஆரைகள்
OA, OB என்பவற்றாலும் வில் AB யினாலும்
அடைக்கப்பட்ட உரு ஆரைச்சிறை எனப்படும்.
ஆரை r ஆகவும், கோணம் AOB யானது
θ ஆரையனாகவும் இருக்க

ஆரைச்சிறை AOB யின் பரப்பு $\frac{1}{2}r^2\theta$ ஆகும்.

திரிகோண கணித விகிதங்கள் (Trigonometric ratios)



செங்கோண முக்கோணி ABC யில்
கோணம் ABC ஒரு செங்கோணம்.
AC - செம்பக்கம் ஆகும். கோணம் $ACB = \theta$ என்க.

$$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{அயல்பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அயல்பக்கம்}} = \frac{AB}{BC}$$ என வரையறுக்கப்படும்.

மேலும் $\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AC} \times \frac{AC}{BC}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ஆகும்.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

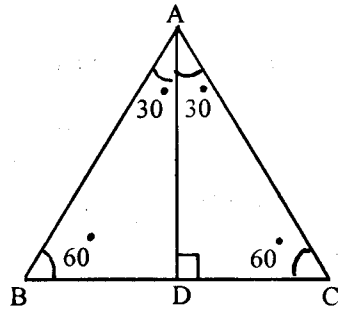
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$ என வரையறுக்கப்படும்.

30^o, 60^o, 45^o யின் திரிகோணகணித விகிதங்கள்

$2a$ பக்கமுள்ள சமபக்க முக்கோணி ABC ஐக் கருதுக.
$AB = BC = AC = 2a$ ஆகும்.
AD, BC யிற்கு செங்குத்தாகும்.
எனவே $BD = DC = a$ ஆகும்.
செங்கோண முக்கோணி ABD யில்



$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$= (2a)^2 - a^2 = 3a^2$$

$$AD = a\sqrt{3}$$

$$\sin 60^o = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^o = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$ ஆகும்.

learnium.org

$$\sin 30^o = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

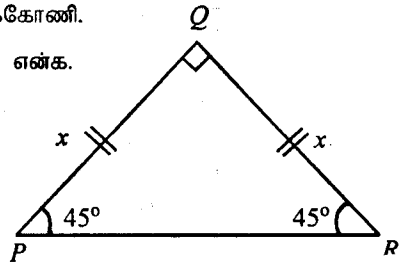
$$\cos 30^o = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^o = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ஆகும்.}$$

PQR என்பது இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணி.

கோணம் $PQR = 90^o$; $PQ = QR = x$ என்க.

செங்கோண முக்கோணி PQR இல்



$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$= x^2 + x^2 = 2x^2$$

$PR = x\sqrt{2}$ ஆகும்.

$$\sin 45^o = \frac{x}{x\sqrt{2}} ; \quad \cos 45^o = \frac{x}{x\sqrt{2}}, \quad \tan 45^o = \frac{x}{x}$$

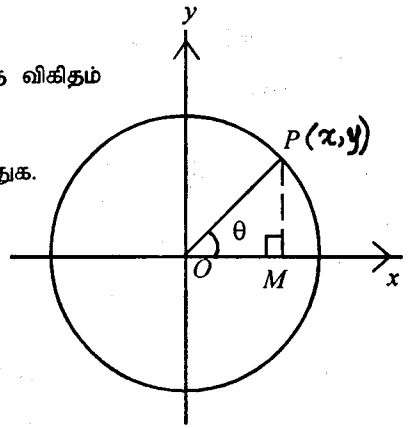
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} ; \qquad = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad = 1$$

இங்கு திரிகோண கணித விகிதங்கள் யாவும் முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீளங்களில் தங்கியிருக்கவில்லை என்பதை அவதானிக்க.

கூர்ங்கோணங்களுக்கு மட்டுமன்றி எந்த ஒரு கோணத்திற்கும் திரிகோண கணித விகிதம் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

செவ்வக தெக்காட்டின் தளம் ஒன்றைக் கருதுக. x, y அச்சுக்கள் வெட்டும் புள்ளி உற்பத்தி O ஆகும்.

O வை மையமாகவும், r ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டமொன்றைக் கருதுக. வட்டத்தின் பரிதியில் புள்ளி P யானது



கோணம் $POX = \theta$ ஆகுமாறு உள்ளது என்க.

$P \equiv (x, y)$; $OP = r$ ஆகும்.

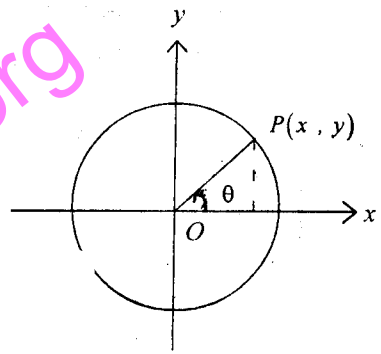
$$\sin\theta = \frac{y}{r} ; \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{r}{y} \quad ; \quad \sec\theta = \frac{r}{x} ; \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

என வரையறுக்கப்படும்.

திரிகோணகணித விகிதங்களின் குறிகள் (Signs)

(i) $O < \theta^\circ < 90^\circ$



$O < \theta^o < 90^o$ எனின்

புள்ளி $P \equiv (x, y)$ முதலாம் கால் வட்டத்திலிருக்கும்.

எனவே $x > O$, $y > O$

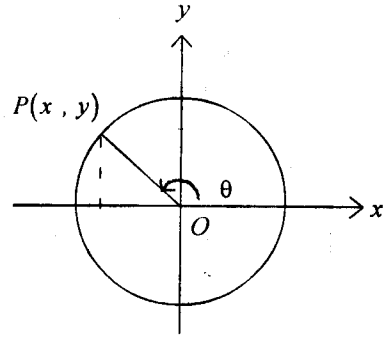
r எப்போதும் நேர் ஆகும்.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} > O$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} > O$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} > O$$

(ii) $90^\circ < \theta^\circ < 180^\circ$



$90^o < \theta^o < 180^o$ எனின்

புள்ளி $P(x, y)$ இரண்டாம் கால் வட்டத்திலிருக்கும்.

எனவே $x < O$, $y > O$

$r > O$

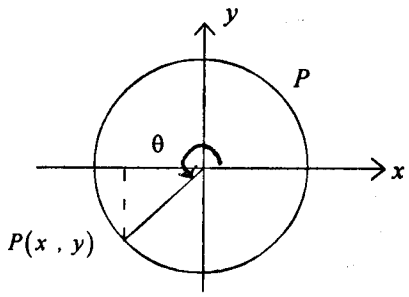
$$\sin\theta = \frac{y}{r} > O$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} < O$$

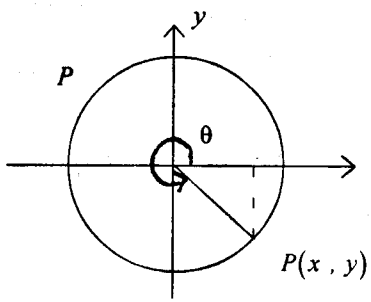
$$\tan\theta = \frac{y}{x} < O$$

learnium.org

$180^o < \theta^o < 270^o$



$270^o < \theta < 360^o$



$180^\circ < \theta^\circ < 270^\circ$ எனின்

புள்ளி $P \equiv (x, y)$. மூன்றாம் கால் வட்டத்தில் அமையும்.
இங்கு $x < O$; $y < O$ ஆகும்.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} < O$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} < O$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} > O$$

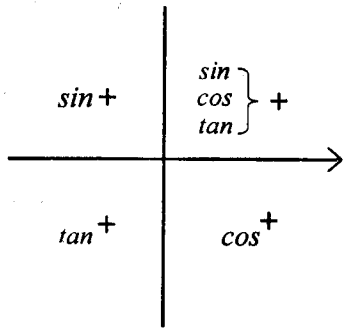
$270^\circ < \theta < 360^\circ$ எனின்

புள்ளி $P \equiv (x, y)$ நான்காம் கால் வட்டத்தில் அமையும்
இங்கு $x > O$; ஆகும்

$$\sin\theta = \frac{y}{r} < O$$

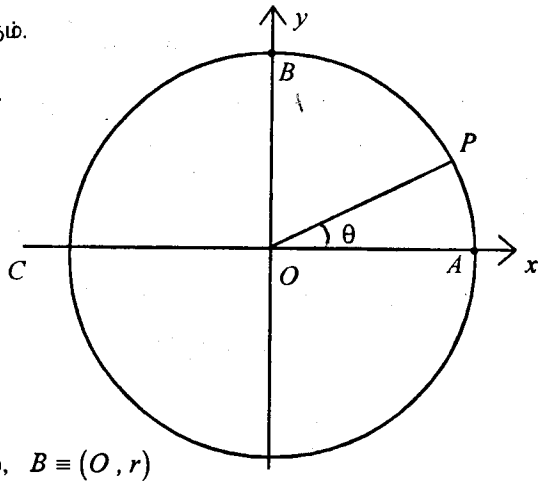
$$\cos\theta = \frac{x}{r} > O$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} < O$$



O^o இனதும் 90^o இனதும் திரிகோண கணித விகிதங்கள்

வட்டத்தின் ஆரை $OP = r$ ஆகும்.



$\theta = O^\circ$ எனின், $P \equiv A$ ஆகும்.

$A \equiv (x ; y) \equiv (r , O)$ ஆகும்.

$$\sin O^\circ = \frac{y}{r} = \frac{O}{r} = O$$

$$\cos O^\circ = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\tan O^\circ = \frac{y}{x} = \frac{O}{r} = O \text{ ஆகும்.}$$

$\theta = 90^\circ$ எனின், $P \equiv B$ ஆகும், $B \equiv (O , r)$

$$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1 \text{ ஆகும்.}$$

$$\cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{O}{r} = O \text{ ஆகும்.}$$

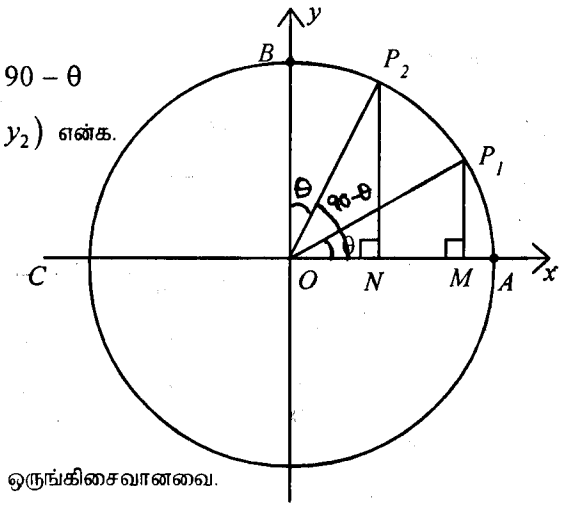
$$\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{r}{O} - \text{ இது வரையறுக்கப்படவில்லை}$$

இவ்வாறு 180^o , 270^o என்பவற்றின் திரிகோண கணித விகிதங்களையும், கணிக்கலாம்.

θ^o	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o	270^o
$\sin\theta^o$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\theta^o$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\theta^o$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*	0	*

learnium.org

θ° , $90-\theta^\circ$ என்பவற்றிற்கிடையேயான திரிகோணகணித விகிதத்தொடர்பு



$\angle P_1 Ox = \theta \quad \angle P_2 Ox = 90 - \theta$

$P_1 \equiv (x_1 , y_1)$; $P_2 \equiv (x_2 , y_2)$ என்க.

$$\sin\theta = \frac{y_1}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x_1}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y_1}{x_1}$$

ΔOMP_1 , $\Delta P_2 NO$ என்பன ஒருங்கிசைவானவை.

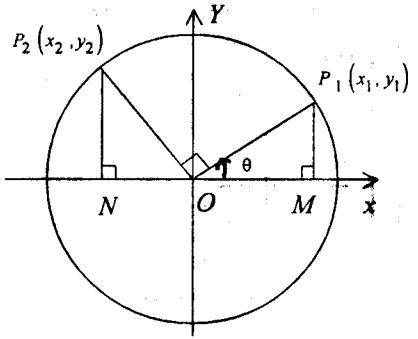
எனவே, $y_2 = x_1$; $x_2 = y_1$ ஆகும்.

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{y_2}{r} = \frac{x_1}{r} = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{x_2}{r} = \frac{y_1}{r} = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{y_2}{x_2} = \frac{x_1}{y_1} = \cot\theta$$

$\theta^\circ , 90^\circ + \theta^\circ$ என்பவற்றிற்கிடையேயான திரிகோணகணித விகிதத்தொடர்பு



$\angle P_1 Ox = \theta$; $\angle P_2 Ox = (90 + \theta)$

$P_1 \equiv (x_1 , y_1)$; $P_2 \equiv (x_2 , y_2)$ என்க.

ΔOMP_1 , $\Delta P_2 NO$ என்பன

ஒருங்கிசைவானவை.

எனவே $y_2 = x_1$; $x_2 = -y_1$ ஆகும்.

$$\sin\theta = \frac{y_1}{r} , \cos\theta = \frac{x_1}{r} , \tan\theta = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\sin(90^\circ + \theta) = \frac{y_2}{r} = \frac{x_1}{r} = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \frac{x_2}{r} = \frac{-y_1}{r} = -\sin\theta$$

$$\tan(90 + \theta) = \frac{y_2}{x_2} = -\frac{x_1}{y_1} = -\cot\theta$$

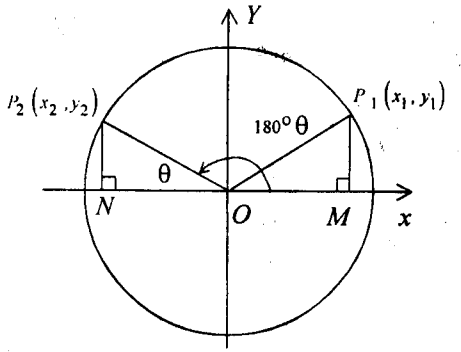
θ° , $180-\theta^\circ$ என்பவற்றிற்கிடையேயான திரிகோணகணித விகிதத் தொடர்பு

$\angle P_1 Ox = \theta$; $\angle P_2 Ox = 180 - \theta$ ஆகும்.

$P_1 \equiv (x_1 , y_1)$; $P_2 \equiv (x_2 , y_2)$ என்க.

$\Delta OMP_1 \equiv \Delta ONP_2$

எனவே $y_2 = y_1$; $x_2 = -x_1$ ஆகும்.



$$\sin\theta = \frac{y_1}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x_1}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \frac{y_2}{r} = \frac{y_1}{r} = \sin\theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{x_2}{r} = \frac{-x_1}{r} = -\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{y_2}{x_2} = -\frac{y_1}{x_1} = -\tan\theta$$

learnium.org

உதாரணமாக $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\tan 150^\circ$ என்பவற்றின் பெறுமானங்கள்

$\sin 120^\circ = \sin\left(180^\circ - 60^\circ\right) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^\circ = \cos\left(180^\circ - 60^\circ\right) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\tan 120^\circ = \tan\left(180^\circ - 60^\circ\right) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ ஆகும்.

θ°, $180 + \theta^\circ$ என்பவற்றிற்கிடையேயான திரிகோணகணித விகிதத் தொடர்பு

$\angle P_1 Ox = \theta$, $\angle P_2 Ox = 180 + \theta^\circ$

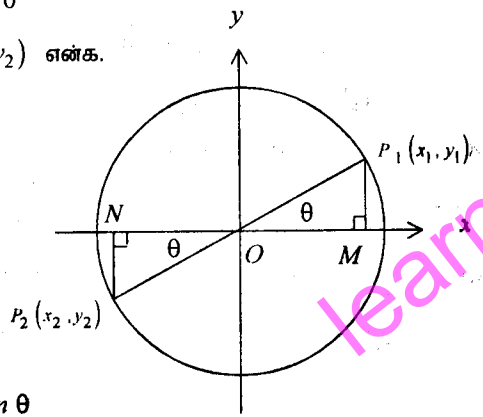
$P_1 \equiv (x_1 , y_1)$; $P_2 \equiv (x_2 , y_2)$ என்க.

$\Delta OP_1 M \equiv \Delta OP_2 N$

$y_2 = -y_1$; $x_2 = -x_1$

$\sin\theta = \frac{y_1}{r}$, $\cos\theta = \frac{x_1}{r}$

$\tan\theta = \frac{y_1}{x_1}$



$\sin(180 + \theta) = \frac{y_2}{r} = -\frac{y_1}{r} = -\sin\theta$

$\cos(180 + \theta) = \frac{x_2}{r} = \frac{-x_1}{r} = -\cos\theta$

$\tan(180 + \theta) = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1} = \tan\theta$

உதாரணமாக $\sin 210^\circ$, $\cos 210^\circ$, $\tan 210^\circ$ என்பவற்றின் பெறுமானங்கள்

$\sin 210^\circ = \sin\left(180^\circ + 30^\circ\right) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210^\circ = \tan\left(180^\circ + 30\right) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

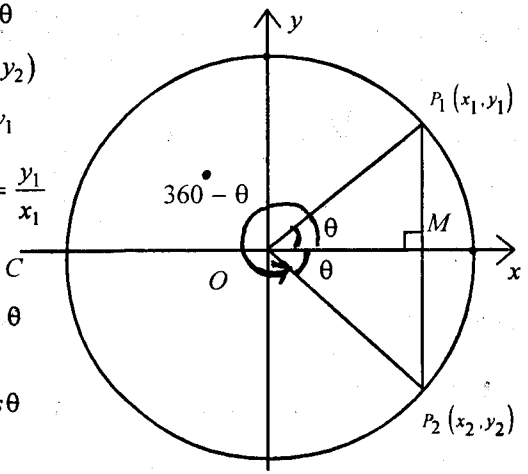
$\theta^\circ + 360^\circ - \theta$ என்பவற்றிற்கிடையேயான திரிகோணகணித விகிதத்தொடர்பு

$\angle P_1 Ox = \theta$, $\angle P_2 Ox = 360 - \theta$

$P_1 \equiv (x_1 , y_1)$, $P_2 \equiv (x_2 , y_2)$

$x_2 = x_1$; $y_2 = -y_1$

$\sin\theta = \frac{y_1}{r}$, $\cos\theta = \frac{x_1}{r}$, $\tan\theta = \frac{y_1}{x_1}$



$\sin(360^\circ - \theta) = \frac{y_2}{r} = \frac{-y_1}{r} = -\sin\theta$

$\cos(360^\circ - \theta) = \frac{x_2}{r} = \frac{x_1}{r} = \cos\theta$

$\tan(360^\circ - \theta) = \frac{y_2}{x_2} = -\frac{y_1}{x_1} = -\tan\theta$

உதாரணமாக $\sin 315^\circ$, $\cos 315^\circ$, $\tan 315^\circ$ இன் பெறுமானங்கள்

$\sin 315^\circ = \sin\left(360^\circ - 45^\circ\right) = -\sin 45 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 315^\circ = \cos\left(360^\circ - 45^\circ\right) = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 315^\circ = \tan\left(360^\circ - 45^\circ\right) = -\tan 45 = -1$ ஆகும்.

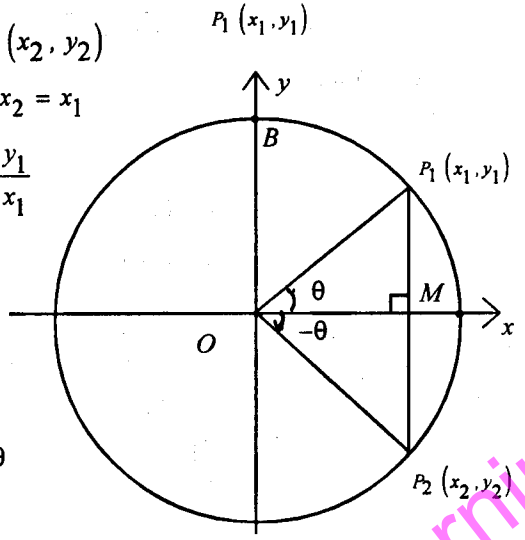
learnium.org

$\theta^\circ, (-\theta)$ என்பவற்றிற்கிடையேயான திரிகோண கணித விகிதத்தொடர்பு

$\angle P_1 O_x = \theta, \ \angle P_2 O_x = -\theta$

$P_1 \equiv (x_1, y_1); \ P_2 (x_2, y_2)$

$y_2 = -y_1 \ ; \ x_2 = x_1$



$\sin\theta = \frac{y_1}{r}$, $\cos\theta = \frac{x_1}{r}$, $\tan\theta = \frac{y_1}{x_1}$

$\sin(-\theta) = \frac{y_2}{r} = \frac{-y_1}{r} = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \frac{x_2}{r} = \frac{x_1}{r} = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = \frac{y_2}{x_2} = \frac{-y_1}{x_1} = -\tan\theta$

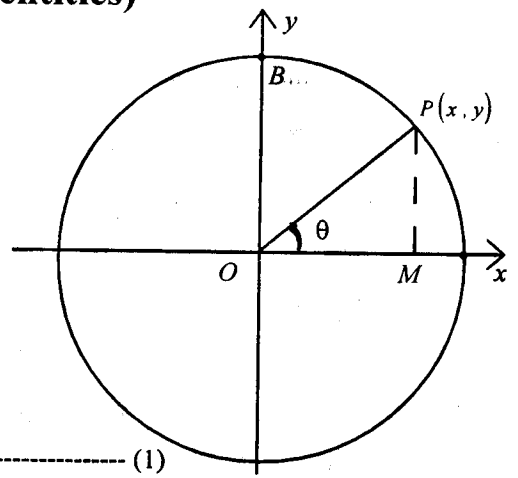
உதாரணமாக

$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$; $\sin(-120^\circ) = -\sin 120^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(-120^\circ) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\tan(-120) = -\tan 120^\circ = \sqrt{3}$

சர்வசமன்பாடுகள் (Identities)



$P \equiv (x, y)$

$x^2 + y^2 = r^2$

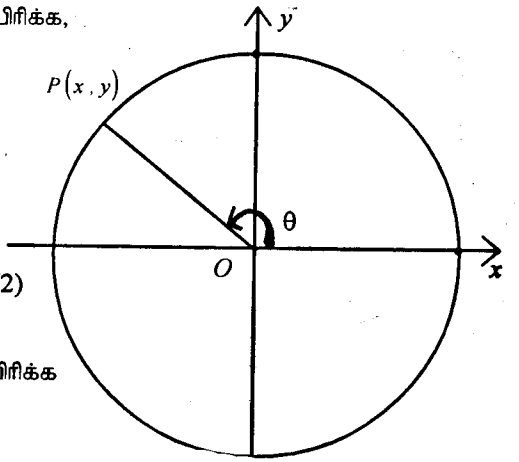
$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$

$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$

$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ---------- (1)

(1) ஐ இருபக்கமும் $\cos^2\theta$ ஆல் பிரிக்க,



$\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ --------- (2)

(1) ஐ இருபக்கமும் $\sin^2\theta$ ஆல் பிரிக்க

$\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$

$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$

$\cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$ ---------- (3

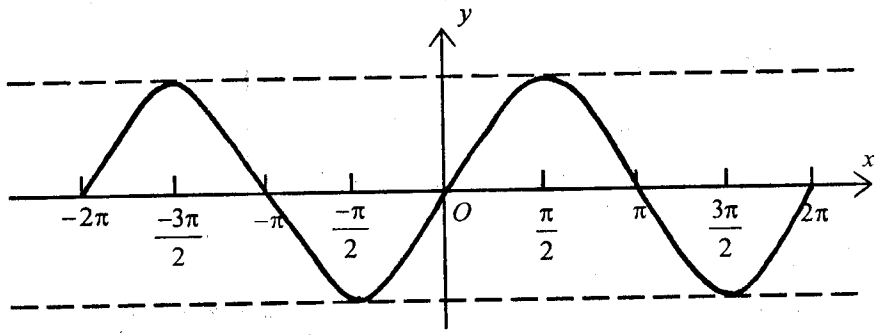
learnium.org

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

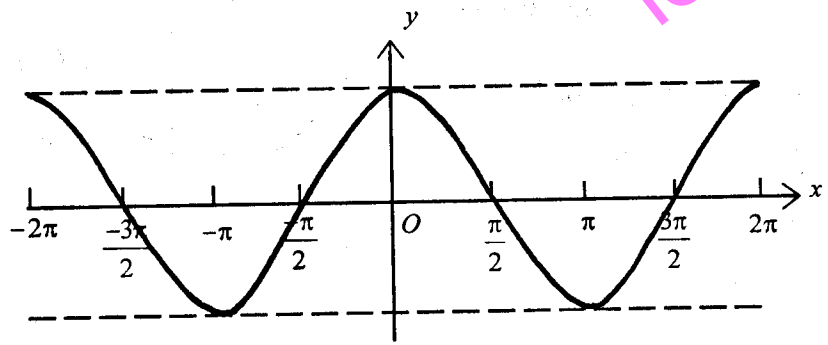
$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

$y = \sin x$ இன் வரைபு



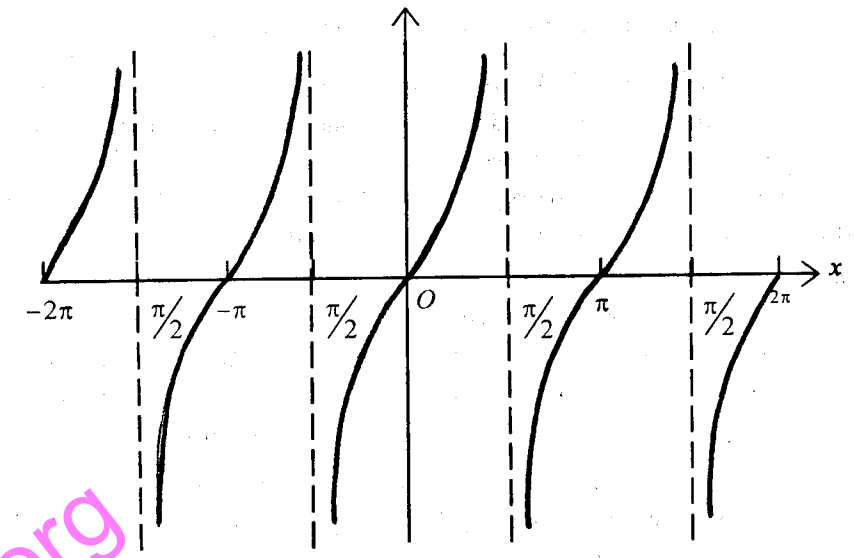
இங்கு x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $-1 \leq y \leq 1$.

$y = \cos x$ இன் வரைபு



x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $-1 \leq y \leq 1$

$y = \tan x$ இன் வரைபு



$y = \tan x$ இல் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் எடுக்கும்.

$f(-x) = -f(x)$ எனின், $f(x)$ எனும் சார்பு ஒற்றைச் சார்பு (odd function) எனப்படும்.

$f(-x) = f(x)$ எனின், $f(x)$ என்பது இரட்டைச் சார்பு (even function) எனப்படும்.

$f(x) = \sin x$ என்க.

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

எனவே $f(x) = \sin x$ ஒற்றைச் சார்பு ஆகும்.

$g(x) = \cos x$ என்க.

$$g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$$

ஆகவே, $g(x) = \cos x$ இரட்டைச் சார்பு ஆகும்.

$h(x) = \tan x$ என்க.

$$h(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -h(x)$$

எனவே $h(x) = \tan x$ என்பது ஒற்றைச் சார்பு ஆகும்.

learnium.org

ஆவர்த்தனச் சார்பு (Periodic Function)

x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும், சார்பு $f(x)$ ஆனது,

$f(x+k) = f(x)$, $k > 0$; k ஒரு மாறிலி என இருப்பின் $f(x)$ என்பது ஆவர்த்தனமான சார்பு எனப்படும். k இன் மிகச் சிறிய பெறுமானம் சார்பின் ஆவர்த்தன காலம் (period of the function) எனப்படும்.

திரிகோண கணிதச் சார்புகள் எல்லாம் ஆவர்த்தனமானவை, $\sin x$, $\cos x$ என்பவற்றின் ஆவர்த்தன காலம் 2π உம் $\tan x$ இன் ஆவர்த்தனகாலம் π உம் ஆகும்.

$y = cosec\, x$ என்ற சார்பைக் கருதுக.

இங்கு $y \leq -1$ அல்லது $y \geq 1$. y, -1 இற்கும் 1 இற்குமிடையில் எப் பெறுமானத்தையும் எடுக்காது.

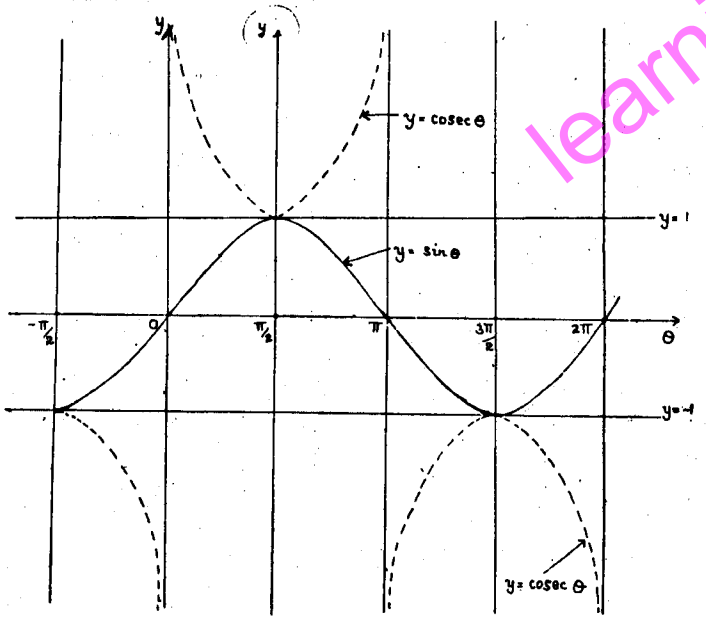
இவ்வாறே $y = sec\, x$ எனின், $y \leq -1$ அல்லது $y \geq 1$ ஆகும்.

y, -1 இற்கும் $+1$ இற்குமிடையே எப்பெறுமானத்தையும் எடுக்காது.

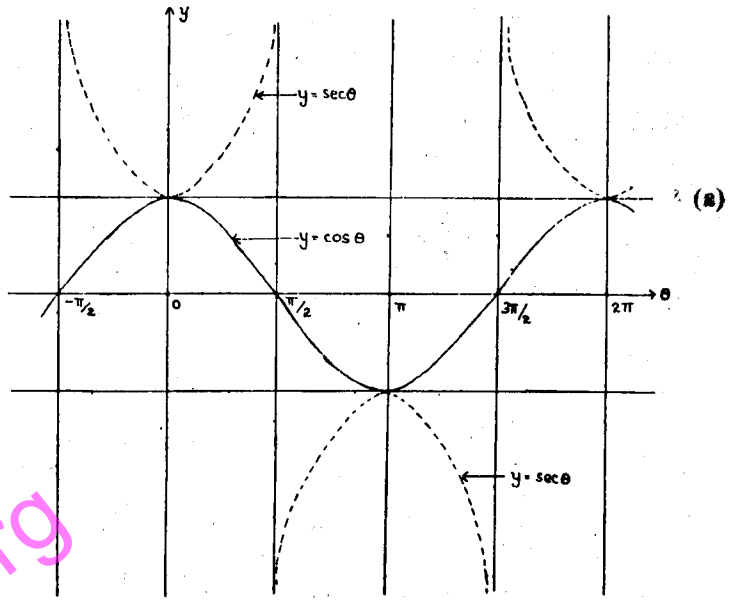
$y = cosec x$, $y = sec\, x$ என்பவற்றின் ஆவர்த்தன காலம் 2π உம், $y = cot\, x$ இன் ஆவர்த்தன காலம் π உம் ஆகும்.

வரைபுகள்

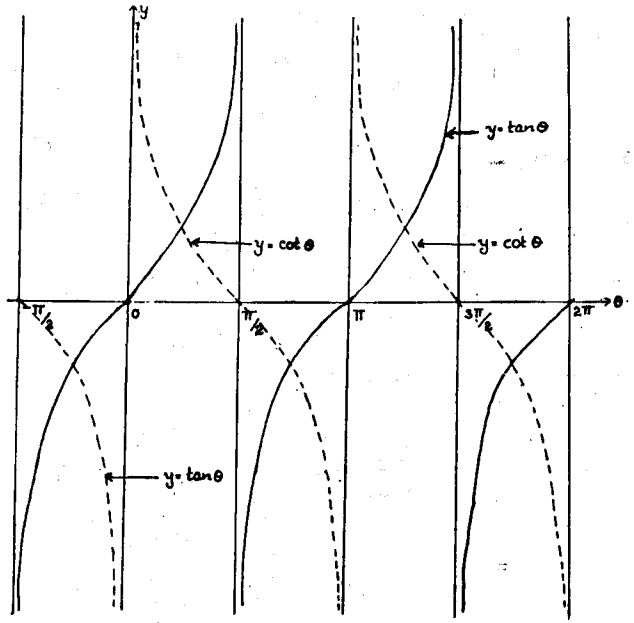
(1) Sine and Cosecant



(2) Cosine and Secant



(3) Tangent and Cotangent



learnium.org

உதாரணம் 1

பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(a) $\sin 510^\circ$ **(b)** $\cos 960^\circ$ **(c)** $\tan\left(-870^\circ\right)$

(a) $\sin 510^\circ = \sin\left(360^\circ + 150^\circ\right) = \sin 150^\circ$

$= \sin\left(180^\circ - 30^\circ\right) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

(b) $\cos 940^\circ = \cos\left[2 \times 360^\circ + 240^\circ\right]$

$= \cos 240^\circ = \cos\left(180^\circ + 60^\circ\right) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

(c) $\tan\left(-870^\circ\right) = -\tan 870^\circ = -\tan\left(2 \times 360^\circ + 150^\circ\right)$

$= -\tan 150^\circ$

$-\tan\left(180^\circ - 30^\circ\right)$

$= \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

உதாரணம் 2

நிறுவுக.

(i) $\dfrac{1}{\cot A + \tan A} = \sin A \cos A$

(ii) $\dfrac{1}{\sec A + \tan A} = \sec A - \tan A$

(i) இ.கை.ப $= \dfrac{1}{\cot A + \tan A}$

$= \dfrac{1}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\cos A}}$

$= \dfrac{1}{\frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A \cos A}}$

$= \dfrac{1}{\frac{1}{\sin A \cos A}} = 1 \times \sin A \cos A$

= வ.கை.ப

$= \sin A \cos A$

$\dfrac{1}{\cot A + \tan A} = \sin A \cos A$

(ii) இ.கை.ப $= \dfrac{1}{\sec A + \tan A}$

$= \dfrac{1}{\sec A + \tan A} \times \dfrac{\sec A - \tan A}{\sec A - \tan A}$

$= \dfrac{\sec A - \tan A}{\sec^2 A - \tan^2 A}$

$= \dfrac{\sec A - \tan A}{1} = \sec A - \tan A$

உதாரணம் 3

நிறுவுக.

$(\sec\theta + \tan\theta - 1)(\sec\theta - \tan\theta + 1) = 2\tan\theta$

இ.கை.ப $= (\sec\theta + \tan\theta - 1)(\sec\theta - \tan\theta + 1)$

$= \left[\sec\theta + (\tan\theta - 1)\right]\left[\sec\theta - (\tan\theta - 1)\right]$

$= \sec^2\theta - (\tan\theta - 1)^2$

$= \sec^2\theta - \left[\tan^2\theta - 2\tan\theta + 1\right]$

$= \sec^2\theta - \tan^2\theta + 2\tan\theta - 1$

$= 1 + 2\tan\theta - 1$

$= 2\tan\theta$

learnium.org

உதாரணம் 4

நிறுவுக.

(i) $(sec\ A + cos\ A)(sec\ A - cos\ A) = tan^2\ A + sin^2\ A$

இ.கை.ப $(sec + cos\ A)(sec\ A - cos\ A)$

$= sec^2\ A - cos^2\ A$

$= \left(1 + tan^2\ A\right) - \left(1 - sin^2\ A\right)$

$= tan^2\ A + sin^2\ A$

உதாரணம் 5

$$\frac{tan\ A + sec\ A - 1}{tan\ A - sec\ A + 1} = \frac{1 + sin\ A}{cos\ A}$$

இ.கை.ப $= \dfrac{tan\ A + sec\ A - 1}{tan\ A - sec\ A + 1}$

$= \dfrac{(tan\ A + sec\ A) - \left(sec^2\ A - tan^2\ A\right)}{tan\ A - sec\ A + 1}$

$= \dfrac{(sec\ A + tan\ A) - (sec\ A + tan\ A)(sec\ A - tan\ A)}{tan\ A - sec\ A + 1}$

$= \dfrac{(sec\ A + tan\ A)\left[1 - (sec\ A - tan\ A)\right]}{(tan\ A - sec\ A + 1)}$

$= \dfrac{(sec\ A + tan\ A)\ (tan\ A - sec\ A + 1)}{(tan\ A - sec\ A + 1)}$

$= (sec\ A + tan\ A)$

$= \dfrac{1}{cos\ A} + \dfrac{sin\ A}{cos\ A} = \dfrac{1 + sin\ A}{cos\ A}$ = வ.கை.ப

$\dfrac{tan\ A + sec\ A - 1}{tan\ A - sec\ A + 1} = \dfrac{1 + sin\ A}{cos\ A}$

உதாரணம் 6

$$\frac{1}{cosec\ A - cot\ A} - \frac{1}{sin\ A} = \frac{1}{sin\ A} - \frac{1}{cosec\ A + cot\ A}$$

இ.கை.ப $= \dfrac{1}{cosec\ A - cot\ A} - \dfrac{1}{sin\ A}$

$= \dfrac{cosec\ A + cot\ A}{(cosecA - cot\ A)(cosecA + cot\ A)} - \dfrac{1}{sin\ A}$

$= \dfrac{cosec\ A + cot\ A}{1} - cosec\ A$

$= cosec\ A + cot\ A - cosec\ A$

$= cosec\ A - (cosec\ A - cot\ A)$

$= \dfrac{1}{sin\ A} - \dfrac{(cosecA - cot\ A)(cosec\ A + cot\ A)}{(cosecA + cot\ A)}$

$= \dfrac{1}{sin\ A} - \dfrac{1}{cosec\ A + cot\ A}$ = வ.கை.ப.

$\therefore \dfrac{1}{cosecA - cot\ A} - \dfrac{1}{sin\ A} = \dfrac{1}{sin\ A} - \dfrac{1}{cosec\ A + cot\ A}$

உதாரணம் 7

$$\frac{1 + cos\theta + sin\ \theta}{1 - cos\theta + sin\ \theta} = \frac{1 + cos\theta}{sin\ \theta}$$

இ.கை.ப $= \dfrac{1 + cos\theta + sin\theta}{1 - cos\ \theta + sin\ \theta}$

$= \dfrac{(1 + sin\ \theta) + cos\ \theta}{(1 + sin\theta) - cos\ \theta} \times \dfrac{(1 + sin\theta) + cos\theta}{(1 + sin\theta) + cos\theta}$

learnium.org

$$= \frac{(1+\sin\theta)^2 + 2\cos\theta\,(1+\sin\theta) + \cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2 - \cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1+\sin\theta)^2 + 2\cos\theta\,(1+\sin\theta) + \left(1-\sin^2\theta\right)}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1+\sin\theta)^2 + 2\cos\theta\,(1+\sin\theta) + \left(1-\sin^2\theta\right)}{2\sin\theta\,(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{(1+\sin\theta) + 2\cos\theta + (1-\sin\theta)}{2\sin\theta}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

பயிற்சி 1

1. பெறுமானங் காண்க,

(a) $\sin 480^\circ$ **(b)** $\cos\left(-870^\circ\right)$ **(c)** $\sec 570^\circ$

(d) $\cot\left(-675^\circ\right)$ **(e)** $\sin 2460^\circ$ **(f)** $\cot\left(-315^\circ\right)$

2. **(a)** $\sin 420^\circ\ \cos 390^\circ - \cos\left(-300^\circ\right)\sin\left(-330^\circ\right)$

(b) $$\frac{\sin 300^\circ\ \tan 330^\circ\ \sec\left(-420^\circ\right)}{\cot 135^\circ\ \cos 210^\circ\ \operatorname{cosec} 315^\circ}$$

(c) $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)\sec A\ \tan(\pi-A)}{\sec(2\pi-A)\sin(\pi+A)\cot\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}$$

என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக

(a) $\sin 420^\circ\ \cos 390^\circ + \cos\left(-300^\circ\right)\sin\left(-330^\circ\right) = 1$

(b) $\cos 570^\circ\ \sin 510^\circ - \sin 330^\circ\ \cos 390^\circ = O$

(c) $\tan 225^\circ\ \cot 405^\circ + \tan 765^\circ\ \cot 675^\circ = O$

4. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக

(a) $\cos A + \sin\left(\frac{3\pi}{2}+A\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}-A\right) + \cos(\pi+A) = O$

(b) $\sec\left(\frac{3\pi}{2}-A\right)\sec\left(\frac{\pi}{2}-A\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{2}-A\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}+A\right) = -1$

(c) $\cot A + \tan(\pi+A) + \tan\left(\frac{\pi}{2}+A\right) + \tan(2\pi-A) = 0$

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக

5. $$\frac{1}{1-\sin A} + \frac{1}{1+\sin A} = 2\sec^2 A$$

6. $$\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{1+\cos A}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A$$

7. $$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$$

8. $\cos^4 A \sin^4 A + 1 = 2\cos^2 A$

9. $(\cos A - \sin A)(1 - \sin A\cdot\cos A) = \sin^3 A + \cos^3 A$

10. $$\frac{1}{1-\cos A} + \frac{1}{1+\cos A} = 2\operatorname{cosec}^2 A$$

11. $$\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \operatorname{cosec} A - \cot A$$

12. $\cos^6 A + \sin^6 A = 1 - 3\sin^2 A\cos^2 A$

13. $(\sec\theta + \tan\theta - 1)(\sec\theta - \tan\theta + 1) = 2\tan\theta$

learnium.org

14. $cosec^4 A - cosec^2 A = cot^2 A + cot^4 A$

15. $\frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$

16. $(\sin A + cosec A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

17. $\frac{cosec A}{cosec A + 1} + \frac{cosec A}{cosec A - 1} = 2\sec^2 A$

18. $\frac{cosec A}{\cot A + \tan A} = \cos A$

19. $\sec^4 A - \sec^2 A = \tan^2 A + \tan^4 A$

20. $\tan A + \cot A = \sec A \cdot cosec A$

21. $\cot^4 A + \cot^2 A = cosec^4 A - cosec^2 A$

22. $\frac{1-\tan A}{1+\tan A} = \frac{\cot A - 1}{\cot A + 1}$

23. $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \tan^2 A$

24. $\sqrt{cosec^2 A - 1} = \cos A \cdot cosec A$

25. $\sec^2 A \cdot cosec^2 A = \tan^2 A + \cot^2 A + 2$

26. $\tan^2 A - \sin^2 A = \sin^4 A \cdot \sec^2 A$

27. $\sqrt{\sec^2 A + cosec^2 A} = \tan A + \cot A$

28. $\frac{\tan A}{1-\cot A} + \frac{\cot A}{1-\tan A} = \sec A \cdot cosec A + 1$

29. $(\sin A + \cos A)(\cot A + \tan A) = \sec A + cosec A$

30. $(1 + \cot A - cosec A)(1 + \tan A + \sec A) = 2$

31. $\frac{\cot A \cdot \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\cot A - \cos A}{\cot A \cdot \cos A}$

32. $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \cdot \tan B$

33. $\sin^8 A - \cos^8 A = (\sin^2 A - \cos^2 A)(1 - 2\sin^2 A \cos^2 A)$

34. $2\sec^2 A - \sec^4 A - 2\,cosec^2 A + cosec^4 A = \cot^4 A - \tan^4 A$

35. $(\tan A + cosec B)^2 - (\cot B - \sec A)^2$

$= 2 \tan A \cot B (cosec A + \sec B)$

36. $(cosec A - \sin A)(\sec A - \cos A)(\tan A + \cot A) = 1$

37. $\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \frac{1 + \sin A}{\cos A}$

38. $\frac{1}{cosec A - \cot A} - \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{cosec A + \cot A}$

39. $(1 + \cot A + \tan A)(\sin A - \cos A) = \frac{\sec A}{cosec^2 A} - \frac{cosec A}{\sec^2 A}$

40. $(1 + \tan A + \sec A)(1 + \cot A - cosec A) = 2$

41. $\cos A (\tan A + 3)(3\tan A + 1) = 3\sec A + 10\sin A$

42. $\sin A (\cot A + 5)(5\cot A + 1) = 5 cosec A + 26\cos A$

43. $a\cos\theta + b\sin\theta = c$;

$b\cos\theta - a\sin\theta = C$ எனின் $a^2 + b^2 = 2c^2$ என நிறுவுக.

44. $x = a\cos A \cdot \cos B$; $y = a\cos A \sin B$; $z = a \sin A$ எனின்

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என நிறுவுக.

45. $\sec\theta + \tan\theta = x$ எனின், $\sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ எனக் காட்டுக.

46. $\sec^6 A - \tan^6 A = 1 + 3\tan^2 A + 3\tan^4 A$ எனக் காட்டுக.

47. $2\cos\theta + 3\sin\theta = a$

$3\cos\theta + 2\sin\theta = b$ எனின் θ ஐச் சாராது

a , b இல் தொடர்பொன்றினைப் பெறுக.

48. $2\tan\theta + \sec\theta = \lambda$

$\tan\theta + 2\sec\theta = \mu$ எனின் θ ஐச் சாராது

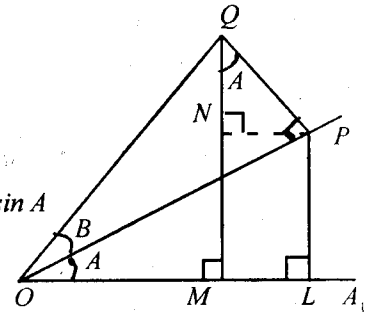
λ , μ என்பவற்றிற்கிடையே தொடர்பு ஒன்றைப் பெறுக.

learnium.org

2. $\sin(A \pm B), \cos(A \pm B), \tan(A \pm B)$ என்பவற்றின் விரிவுகள்

$OM = QN + NM$

$= QN + PL$



$OQ \sin(A + B) = PQ \cos A + OP \sin A$

$= OQ \sin B \cos A + OQ \cos B \cdot \sin A$

$\therefore \sin(A + B) = \sin B \cos A + \cos B \cdot \sin A$

$$\boxed{\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B} \quad \text{---------- (1)}$$

(1) இலிருந்து

$\sin(A - B) = \sin[A + (-B)]$

$= \sin A \cdot \cos(-B) + \cos A \sin(-B)$

$= \sin A \cdot \cos B - \cos A \sin B$

$$\boxed{\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B} \quad \text{---------- (2)}$$

$OM = OL - LM$

$= OL - NP$

$OQ \cos(A + B) = OP \cos A - PQ \sin A$

$= OQ \cos B \cos A - OQ \sin B \cdot \sin A$

$$\boxed{\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B} \quad \text{---------- (3)}$$

(3) இலிருந்து

$\cos(A - B) = \cos[A + (-B)]$

$= \cos A \cdot \cos(-B) - \sin A \cdot \sin(-B)$

$= \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$\cos(A - B) = \cos A \, coB + \sin \sin B$ ---------- (4)

$$\tan(A + B) = \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)}$$

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

தொகுதி, பகுதி என்பவற்றை $\cos A \cos B$ ஆல்பிரிக்க,

$$= \frac{\dfrac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \dfrac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \dfrac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\boxed{\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}} \quad \text{---------- (5)}$$

learnium.org

$$\tan(A-B) = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} = \frac{\sin A\cos B - \cos A\sin B}{\sin A\cos B + \cos A\sin B}$$

தொகுதி, பகுதி என்பவற்றை $\cos A \cdot \cos B$ ஆல் பிரிக்க.

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

அல்லது

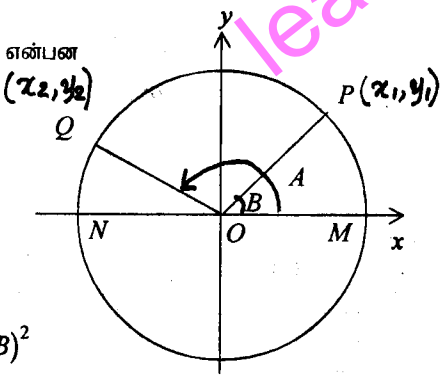
$$\tan(A-B) = \tan[A + (-B)]$$

$$= \frac{\tan A + \tan(-B)}{1 - \tan A\cdot\tan(-B)} = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B} \quad \text{---------- (6)}$$

எந்த ஒரு கோணத்திற்கும் இவ்வாய்ப்பாட்டினைப் பின்வரும் முறையில் நிறுவலாம்

O_x , O_y ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு அச்சுக்கள், O வை மையமாகவும் 1 அலகு ஆரையாகவும் வட்டம் ஒன்று வரையப்படுகிறது. கோணங்கள் POx, QOx என்பன முறையே B, A ஆகும்.



$P \equiv (x_1, y_1) \equiv (\cos B, \sin B)$

$Q \equiv (x_2, y_2) \equiv (\cos A, \sin A)$ ஆகும்.

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$= (\cos A - \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2$$

$$= [2 - 2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B] \text{ ஆகும் ---------- (1)}$$

ΔOPQ இல்,

$$PQ^2 = OP^2 + OP^2 - 2OP\cdot OQ\cos(A-B)$$

$$= 1 + 1 - 2\times 1\times 1\cdot\cos(A-B)$$

$$= 2 - 2\cos(A-B) \quad \text{---------- (2)}$$

(1), (2) இலிருந்து ,

$$2 - 2\cos(A-B) = 2 - 2\cos A\cos B - 2\sin A\cdot\sin B$$

$$\underline{\underline{\cos(A-B) = \cos A\cdot\cos B + \sin A\sin B}} \quad \text{---------- *}$$

$$\cos(A+B) = \cos[A-(-B)] = \cos A\cos(-B) + \sin A\cdot\sin(-B)$$

$$= \cos A\cdot\cos B - \sin A\sin B$$

சமன்பாடு * இல் A யிற்குப் பதிலாக $\frac{\pi}{2} - A$ என இட,

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - B\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\cdot\cos B + \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\cdot\sin B$$

$$\cos\left[\pi/2 - (A+B)\right] = \sin A\cdot\cos B + \cos A\sin B$$

$$\underline{\underline{\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\cdot\sin B}}$$

சமன்பாடு * இல் A யிற்குப் பதிலாக $\frac{\pi}{2} + A$ என இட

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} + A - B\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} + A\right)\cos B + \sin\left(\frac{\pi}{2} + A\right)\cdot\sin B$$

$$-\sin(A-B) = -\sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\underline{\underline{\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B}}$$

learnium.org

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

உதாரணம் 1

$\sin 105^\circ$, $\cos 105^\circ$, $\tan 15^\circ$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$\sin 105^\circ = \cos\left(60^\circ + 45^\circ\right)$$

$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 105^\circ = \cos\left(60^\circ + 45^\circ\right)$$

$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan 15^\circ = \tan\left(45^\circ - 30^\circ\right)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

உதாரணம் 2

$\sin(A+B)\cdot\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$ எனக் காட்டுக.

$$\sin(A+B)\cdot\sin(A-B)$$

$$= (\sin A \cdot \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B)$$

$$= \left(\sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B\right)$$

$$= \sin^2 A\left(1 - \sin^2 B\right) - \sin^2 B\left(1 - \sin^2 A\right)$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 A \cdot \sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A \sin^2 B$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 B$$

learnium.org

உதாரணம் 3

$\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \tan\left(A + 45^\circ\right)$ எனக் காட்டுக.

$$\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \frac{\frac{\cos A + \sin A}{\cos A}}{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan A}{1 - \tan 45^\circ \tan A}$$

$$= \tan\left(45^\circ + A\right) = \tan\left(A + 45^\circ\right)$$

உதாரணம் 4

சுருக்குக

$\sin A \cdot \sin(B-C) + \sin B \cdot \sin(C-A) + \sin C \cdot \sin(A-B) = O$ எனக்காட்டுக.

$$= \sin A\left[\sin B \cdot \cos C - \cos B \cdot \sin C\right] + \sin B\left[\sin C \cdot \cos A - \cos C \cdot \sin A\right]$$
$$+ \sin C\left[\sin A \cos B - \cos A \sin B\right] = O$$

உதாரணம் 5

$\tan\{A + (B + C)\}$ ஐக் கருதி $\tan(A + B + C)$ இன் விரிவை எழுதுக.

$$\tan(A + B + C) = \tan\{A + (B + C)\}$$

$$= \frac{\tan A + \tan(B + C)}{1 - \tan A \cdot \tan(B + C)}$$

$$= \frac{\tan A + \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \cdot \tan C}}{1 - \tan A \cdot \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}}$$

$$= \frac{\tan(1 - \tan B \tan C) + \tan B + \tan C}{1 - \tan B \cdot \tan C - \tan A(\tan B + \tan C)}$$

$$= \frac{\tan A - \tan A \tan B \tan C + \tan B + \tan C}{1 - \tan B \cdot \tan C - \tan C \cdot \tan A - \tan A \tan B}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \cdot \tan C - \tan C \cdot \tan A - \tan A \tan B}$$

உதாரணம் 6

$\cos\left(45^\circ - A\right) \cdot \cos\left(45^\circ - B\right) - \sin\left(45^\circ - A\right) \sin\left(45^\circ - B\right)$

$= \sin(A + B)$ எனக் காட்டுக.

$\cos\left(45^\circ - A\right) \cdot \cos\left(45^\circ - B\right) - \sin\left(45^\circ - A\right) \cdot \sin\left(45^\circ - B\right)$

$= \cos\left[\left(45^\circ - A\right) + \left(45^\circ - B\right)\right]$

$= \cos\left[90^\circ - (A + B)\right]$

$= \sin(A + B)$

உதாரணம் 7

$\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A \cdot \tan 2A \cdot \tan A$ எனக் காட்டுக.

$3A = 2A + A$

$\tan 3A = \tan(2A + A)$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \cdot \tan A}$$

$\tan 3A(1 - \tan 2A \cdot \tan A) = \tan 2A + \tan A$

$\tan 3A - \tan 3A \cdot \tan 2A \cdot \tan A = \tan 2A + \tan A$

$\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A \cdot \tan A \cdot \tan A$

learnium.org

$\sin C \pm \sin D$, $\cos C \pm \cos D$ என்பவற்றிற்கான வாய்ப்பாடுகள்

$A + B = C$

$\underline{A - B = D}$ எனின்,

$2A = C + D;$ $\quad A = \frac{C + D}{2}$

$2B = C - D;$ $\quad B = \frac{C - D}{2}$ ஆகும்.

$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ---------- (1)

$\underline{\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B}$ ---------- (2)

(1) + (2) ; $\quad \sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$

$$\boxed{\sin C + \sin D = 2 \sin\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C - D}{2}\right)}$$

(1) – (2) ; $\quad \sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \cdot \sin B$

$$\boxed{\sin C - \sin D = 2 \cos\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C - D}{2}\right)}$$

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ ---------- (3)

$\underline{\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \sin B}$ ---------- (4)

(3) + (4) ; $\quad \cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cdot \cos B$

$$\boxed{\cos C + \cos D = 2 \cos\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C - D}{2}\right)}$$

(3) – (4) ; $\quad \cos(A + B) - \cos(A - B) = -2 \sin A \sin B$

$$\cos C - \cos D = -2 \sin\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C - D}{2}\right)$$

$$= 2 \sin\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{D - C}{2}\right)$$

$$\boxed{\cos C - \cos D = 2 \sin\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{D - C}{2}\right)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin C + \sin D &= 2 \sin\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C - D}{2}\right) \\
\sin C - \sin D &= 2 \cos\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C - D}{2}\right) \\
\cos C + \cos D &= 2 \cos\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C - D}{2}\right) \\
\cos C - \cos D &= 2 \sin\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{D - C}{2}\right)
\end{aligned}}$$

learnium.org

உதாரணம் 8

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\frac{\sin A + \sin 3A}{\cos A + \cos 3A} = \tan 2A$

(ii) $\frac{\sin 7A - \sin A}{\cos A - \cos 7A} = \cot 4A$

(i) $\frac{\sin A + \sin 3A}{\cos A + \cos 3A}$

$$= \frac{2 \sin 2A \cdot \cos A}{2 \cos 2A \cdot \cos A} = \tan 2A$$

(ii) $\dfrac{\sin 7A - \sin A}{\cos A - \cos 7A}$

$= \dfrac{2\cos 4A \cdot \sin 3A}{2\sin 4A \cdot \sin 3A} = \cot 4A$

உதாரணம் 9

$\cos(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin\left(45^\circ + A\right)\cos\left(45^\circ + B\right)$ என நிறுவுக.

$\cos(A+B) + \sin(A-B)$

$= \sin\left[90 + (A+B)\right] + \sin(A-B)$

$= 2\sin\left[\dfrac{90 + 2A}{2}\right] \cdot \cos\left[\dfrac{90^\circ + 2B}{2}\right]$

$= 2\sin\left(45^\circ + A\right)\cos\left(45^\circ + B\right)$

உதாரணம் 10

$\dfrac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A} = \tan 4A$ என நிறுவுக.

$\dfrac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A}$

$= \dfrac{\sin A + \sin 7A + \sin 3A + \sin 5A}{\cos A + \cos 7A + \cos 3A + \cos 5A}$

$= \dfrac{2\sin 4A \cdot \cos 3A + 2\sin 4A \cdot \cos A}{2\cos 4A \cdot \cos 3A + 2\cos 4A \cdot \cos A}$

$= \dfrac{2\sin 4A(\cos 3A + \cos A)}{2\cos 4A(\cos 3A + \cos A)}$

$= \tan 4A$

உதாரணம் 11

$\dfrac{\sin A - \sin 5A + \sin 9A - \sin 13A}{\cos A - \cos 5A - \cos 9A + \cos 13A} = \cot 4A$ என நிறுவுக.

$\dfrac{\sin A - \sin 5A + \sin 9A - \sin 13A}{\cos A - \cos 5A - \cos 9A + \cos 13A}$

$= \dfrac{(\sin A + \sin 9A) - (\sin 5A + \sin 13A)}{(\cos A - \cos 9A) - (\cos 5A + \cos 13A)}$

$= \dfrac{2\sin 5A \cdot \cos 4A - 2\sin 9A \cdot \cos 4A}{2\sin 5A \cdot \sin 4A - 2\sin 9A \cdot \sin 4A}$

$= \dfrac{2\cos 4A(\sin 5A - \sin 9A)}{2\sin 4A(\sin 5A - \sin 9A)}$

$= \dfrac{\cos 4A}{\sin 4A} = \cot 4A$

உதாரணம் 12

$\sin A + \sin\left(A + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(A + \dfrac{4\pi}{3}\right) = 0$ என நிறுவுக.

$\sin A + \sin\left(A + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(A + \dfrac{4\pi}{3}\right)$

$\sin A + 2\sin(\pi + A) \cdot \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\sin A - 2\sin A \times \dfrac{1}{2}$

$\sin A - \sin A$

$= O$

learnium.org

உதாரணம் 13

$sin\,10^\circ + sin20^\circ + sin40^\circ + sin\,50^\circ = sin\,70^\circ + sin\,80^\circ$

$(sin10^\circ + sin\,50^\circ) + (sin\,20^\circ + sin40^\circ)$

$= 2\,sin\,30^\circ\,cos20^\circ + 2\,sin\,30^\circ\,cos\,10^\circ$

$= 2 \times \frac{1}{2} cos20^\circ + 2 \times \frac{1}{2} \times cos10^\circ$

$= cos20^\circ + cos10^\circ$

$= cos\,(90^\circ - 70^\circ) + cos\,(90^\circ - 80^\circ)$

$= sin\,70^\circ + sin\,80^\circ$

பெருக்கங்களை கூட்டுத்தொகையாகவோ அல்லது வித்தியாசமாகவோ எழுதுதல்

$sin\,(A + B) = sin\,A\,cos\,B + cos\,A\,sin\,B$ ---------- (i)

$sin\,(A - B) = sin\,A\,cos\,B - cos\,A\,sin\,B$ ---------- (ii)

$cos\,(A + B) = cos\,A \cdot cos\,B - sin\,A\,sin\,B$ ---------- (ii)

$cos\,(A - B) = cos\,A\,cos\,B + sin\,A\,sin\,B$ ---------- (vi)

(i) + (ii), $sin\,(A + B) + sin\,(A - B) = 2\,sin\,A\,cos\,B$

(i) - (ii) $sin\,(A + B) - sin\,(A - B) = 2\,cos\,A\,sin\,B$

(iii) + (iv) $cos\,(A + B) + cos\,(A - B) = 2\,cos\,A\,cos\,B$

(iv) - (iii) $cos\,(A - B) - cos\,(A + B) = 2\,sin\,A \cdot sin\,B$

எனவே,

$2\,sin\,A\,cos\,B =$	$sin\,(A + B) + sin\,(A - B)$
$2\,cos\,A\,sin\,B =$	$sin\,(A + B) - sin\,(A - B)$
$2\,cos\,A\,cos\,B =$	$cos\,(A + B) + cos\,(A - B)$
$2\,sin\,A\,sin\,B =$	$cos\,(A - B) - cos\,(A + B)$

உதாரணம் 14

பின்வருவனவற்றை ஒரு கூட்டுத்தொகையாகவோ அல்லது வித்தியாசமாகவோ தருக.

(i) $2\,sin\,50^\circ\,cos\,20^\circ$ (ii) $2\,sin40^\circ\,cos75^\circ$

(iii) $2\,cos\,45^\circ\,cos85^\circ$ (iv) $2\,sin20^\circ\,sin\,130^\circ$

(i) $2\,sin50^\circ\,cos\,20^\circ = sin\,(50^\circ + 20^\circ) + sin(50^\circ - 20^\circ)$

$= sin\,70^\circ + sin\,30^\circ$

(ii) $2\,sin\,40^\circ\,cos\,75^\circ = sin\,(40^\circ + 75^\circ) + sin\,(40^\circ - 75^\circ)$

$= sin\,115^\circ + sin\,(-35^\circ)$

$= sin\,115^\circ - sin\,35^\circ$

(iii) $2\,cos\,45^\circ\,cos\,85^\circ = cos\,(45^\circ + 85^\circ) + cos\,(45^\circ - 85^\circ)$

$= cos\,130^\circ + cos\,(-40^\circ)$

$= cos\,130^\circ + cos\,40^\circ$

learnium.org

(iv) $2\sin 20^\circ \sin 130^\circ = \cos\left[20^\circ - 130^\circ\right] - \cos\left[20^\circ + 130^\circ\right]$

$= \cos\left(-110^\circ\right) - \cos\left(150^\circ\right)$

$= \cos 110^\circ - \cos 150^\circ$

உதாரணம் 15

$\sin 75^\circ \cos 45^\circ$ ஐ கூட்டுத்தொகையாக எழுதி, இதிலிருந்து $\sin 75^\circ$ ஐக் காண்க.

$$\sin 75^\circ \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\left[2\sin 75^\circ \cos 45^\circ\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin 120^\circ + \sin 30^\circ\right]$$

$$2\sin 75^\circ \cos 45^\circ = \left[\sin 120^\circ + \sin 30^\circ\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$2 \times \sin 75^\circ \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sqrt{2} \times \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

உதாரணம் 16

$2\cos^2 A \cos^2 B - 2\sin^2 A \sin^2 B = \cos 2A + \cos 2B$ எனக் காட்டுக.

$2\cos^2 A \cos^2 B - 2\sin^2 A \sin^2 B$

$= 2\left[\cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B\right]$

$= 2\left(\cos A \cos B - \sin A \sin B\right)\left(\cos A \cos B + \sin A \sin B\right)$

$2\cos\left(A + B\right)\cdot\cos\left(A - B\right)$

$= \cos 2A + \cos 2B$

உதாரணம் 17

$\cos 2\theta \cdot \cos\frac{\theta}{2} - \cos 3\theta \cdot \cos\frac{9\theta}{2} = \sin 5\theta \cdot \sin\frac{5\theta}{2}$ என நிறுவுக.

$\cos 2\theta \cdot \cos\theta/_2 - \cos 3\theta \cdot \cos\frac{9\theta}{2}$

$= \frac{1}{2}\left[2\cos 2\theta \cdot \cos\theta/_2 - 2\cos 3\theta \cdot \cos\frac{9\theta}{2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{5\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right) - \left(\cos\frac{15\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5\theta}{2} - \cos\frac{15\theta}{2}\right]$

$= \frac{1}{2} \times 2\sin 5\theta \cdot \sin\frac{5\theta}{2}$

$= \sin 5\theta \cdot \sin\frac{5\theta}{2}$

உதாரணம் 18

$\sin A \cdot \sin(B - C) + \sin B \cdot \sin(C - A) + \sin C \cdot \sin(A - B) = 0$ என நிறுவுக.

$\sin A \cdot \sin(B - C) + \sin B \cdot \sin(C - A) + \sin C \cdot \sin\left(A - B\right)$

$= \frac{1}{2}\left[2\sin A \cdot \sin\left(B - C\right) + 2\sin B \cdot \sin\left(C - A\right) + 2\sin C \cdot \sin\left(A - B\right)\right]$

learnium.org

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(A - B + C) - \cos(A + B - C) + \cos(B - C + A) - \cos(B + C - A)\right.$$

$$\left. + \cos(C - A + B) - \cos(C + A - B)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\ 0] = 0$$

உதாரணம் 19

$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$ என நிறுவுக.

$\cos 20^\circ \ \cos 40^\circ \ \cos 60^\circ \ \cos 80^\circ$

$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \times \frac{1}{2} \times \cos 80^\circ$

$= \frac{1}{4}\left[2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ\right] \cdot \cos 80^\circ$

$= \frac{1}{4}\left[\left(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ\right) \cos 80^\circ\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\cos 80^\circ + \cos 20^\circ \ \cos 80^\circ\right]$

$= \frac{1}{8}\left[\cos 80^\circ + 2 \cos 20^\circ \cos 80^\circ\right]$

$= \frac{1}{8}\left[\cos 80^\circ + 2 \cos 100^\circ + \cos 60^\circ\right]$

$= \frac{1}{8}\left[\cos 80^\circ - \cos 80^\circ + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{16}$

பயிற்சி 2(a)

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக

1. $\sin(A + B) \cdot \sin(A - B) = \cos^2 B - \cos^2 A$
2. $(\sin A + \cos A)(\sin B + \cos B) = \sin(A + B) + \cos(A - B)$
3. $\sin(45^\circ + A)\cos(45^\circ + B) + \cos(45^\circ + A) \cdot \sin(45^\circ + B)$
   $= \cos(A + B)$
4. $\frac{\sin(A - B)}{\cos A \cdot \cos B} + \frac{\sin(B - C)}{\cos B \cdot \cos C} + \frac{\sin(C - A)}{\cos C \cdot \cos A} = 0$
5. $\cos A \cdot \cos(B + A) + \sin A \cdot \sin(B + A) = \cos B$
6. $\cot(A + B) = \frac{\cot A \cdot \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$
7. **(i)** $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \cos 45^\circ$ **(ii)** $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \cos 45^\circ$
8. $\cos(60^\circ - \theta)\cos(30^\circ + \theta) - \sin(60^\circ - \theta) \cdot \sin(30 + \theta) = \theta$
9. $\sin(n - 1)A \cdot \sin(n + 1)A + \cos(n - 1)A \cdot \cos(n + 1)A = \cos 2A$
10. $\sin(n - 2)A \cdot \cos \cdot n\ A - \cos(n - 2)A \cdot \sin\ nA = -\sin 2A$
11. $A + B = 45^\circ$ எனின், $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ எனக் காட்டுக.
12. $\sin(x + y) = \frac{3}{4}$, $\sin(x - y) = \frac{1}{2}$ எனின், $\tan x = 5 \tan y$ எனக் காட்டுக.
13. $\cos(A - B) = 3\cos(A + B)$ எனின் $\tan A \cdot \tan B = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.
14. $\cot B - \cot A = a$, $\tan A - \tan B = a$ எனின்,
    $\cot(A - B) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ எனக் காட்டுக.

learnium.org

15. $\cos(A+B)\cdot\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$ என நிறுவுக.

16. $\tan A = \frac{1}{2n+1}$, $\tan B = \frac{n}{n+1}$ எனின், $\tan(A+B)$ ஐக் கணிக்க.

17. $\tan A = \frac{5}{6}$, $\tan B = \frac{1}{11}$ எனின், $\tan(A+B) = 1$ எனக் காட்டுக.

18. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cdot\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right) = -1$ என நிறுவுக.

19. $\cot\left(\pi/4+\theta\right)\cdot\cot\left(\pi/4-\theta\right) = 1$ என நிறுவுக.

20. $1+\tan A\cdot\tan\frac{A}{2} = \tan A\cdot\cot\frac{A}{2} - 1 = \sec A$ என நிறுவுக.

21. $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$ எனின், $\tan(A+B)$ ஐக் காண்க.

மேலும் $\tan C = 1$ எனின், $\cot(A+B+C)$ ஐக் காண்க.

2 (b)

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B} = \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cot\left(\frac{A-B}{2}\right)$

2. $\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B} = \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)$

3. $\frac{\cos A+\cos B}{\cos B-\cos A} = \cot\left(\frac{A+B}{2}\right)\cot\left(\frac{A-B}{2}\right)$

4. $\frac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A} = \cot\left(\frac{A+B}{2}\right)$

5. $\frac{\sin 2A+\sin 2B}{\sin 2A-\sin 2B} = \tan(A+B)\cdot\cot(A-B)$

6. $\frac{\sin A+\sin 3A}{\cos A+\cos 3A} = \tan 2A$

7. $\cos 70^\circ - \cos 10^\circ + \cos 50^\circ = 0$

8. $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0$

9. $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \sin 80^\circ = 0$

10. $\cos A + \cos\left(\frac{2\pi}{3}+A\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}-A\right) = 0$

11. $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ = \sin 70^\circ + \sin 80^\circ$

12. $\frac{\sin 3A-\sin A}{\cos A-\cos 3A} = \cot 2$

13. $\sin A + \sin\left(A+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(A+\frac{4\pi}{3}\right) = 0$

14. (a) $\cos 10^\circ = \cos 50^\circ + \cos 70^\circ$ (b) $\sin 10^\circ = \sin 70^\circ - \sin 50^\circ$

15. $\cos(A+B) = \frac{1}{5}$, $\cos(A-B) = \frac{3}{5}$ எனின்,

$\cos A\cdot\cos B$, $\tan A\tan B$, $\tan(A-B)$ என்பவற்றைக் காண்க.

16. $\sin 2A - \sin 4A + \sin 6A = \sin 4A\,(2\cos 2A - 1)$

17. $\frac{\sin 5A-\sin 3A}{\cos 3A+\cos 5A} = \tan A$

18. $\frac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A} = \frac{\sin 3A}{\sin 5A}$

19. $\frac{\sin(A+B)-2\sin A+\sin(A-B)}{\cos(A+B)-2\cos A+\cos(A-B)} = \tan A$

20. $\frac{\sin(A-C)+2\sin A+\sin(A+C)}{\sin(B-C)+2\sin B+\sin(B+C)} = \frac{\sin A}{\sin B}$

21. $\cos 3A + \cos 5A + \cos 7A + \cos 15A = 4\cos 4A\cdot\cos 5A\cdot\cos 6A$

learnium.org

22. $\cos(A+B+C)+\cos(A+B-C)$

$+\cos(B+C-A)+\cos(C+A-B) = 4\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$

23. $\sin A + \sin 2A + \sin 4A + \sin 5A = 4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{3A}{2}\cdot\sin 3A$

24. $\frac{\cos 3A-\cos A}{\sin 3A-\sin A}+\frac{\cos 2A-\cos 4A}{\sin 4A-\sin 2A}=\frac{\sin A}{\cos 2A\cdot\cos 3A}$

25. $\frac{\tan 5\theta+\tan 3\theta}{\tan 5\theta-\tan 3\theta}=4\cos 2\theta\cdot\cos 4\theta$

26. $\frac{\cos 3\theta+2\cos 5\theta+\cos 7\theta}{\cos\theta+2\cos 3\theta+\cos 5\theta}=\cos 2\theta-\sin 2\,\theta\cdot\tan 3\theta$

2 (b)

1. பின்வருவனவற்றை ஒரு கூட்டுத்தொகையாகவோ அல்லது வித்தியாசமாகவோ தருக.

(i) $2\sin 3\theta\cdot\cos\theta$ **(ii)** $2\sin\theta\cdot\cos 3\theta$

(iii) $2\cos 6\theta\cdot\cos 8\theta$ **(iv)** $2\sin 3\theta\cdot\sin 5\theta$

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக

2. $\sin A\cdot\sin(A+2B)-\sin B\cdot\sin(B+2A)=\sin(A-B)\cdot\sin(A+B)$

3. $\cos(36^\circ-A)+\cos(36^\circ+A)\times\cos(54^\circ+A)=\cos(54^\circ-A)$

4. $\cos A\cdot\sin(B-C)+\cos B\cdot\sin(C-A)+\cos C\cdot\sin(A-B)=0$

5. $\sin 20^\circ\ \sin 40^\circ\ \sin 60^\circ\ \sin 80^\circ=\frac{3}{16}$

6. $\cos 10^\circ\ \cos 30^\circ\ \cos 50^\circ\ \cos 70^\circ=\frac{3}{16}$

7. $\cos 20^\circ\ \cos 40^\circ\ \cos 60^\circ\ \cos 80^\circ=\frac{1}{16}$

3. மடங்குக் கோணங்கள்

$\sin 2A$, $\cos 2A$, $\tan A$ என்பவற்றினை A இல் காணல்.

$\sin 2A=\sin(A+A)$

$=\sin A\cos A+\cos A\sin A$

$=2\sin A\cos A$ ---------- (1)

$\sin 2A=\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A+\sin^2 A}$

$=\frac{\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}}=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ ---------- (2)

$\cos 2A=\cos(A+A)$

$=\cos A\cdot\cos A-\sin A\cdot\sin A$

$=\cos^2 A-\sin^2 A$ ---------- (3)

(3) இல் $\sin^2 A=1-\cos^2 A$ எனப் பிரதியிட

$\cos 2A=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)$

$=2\cos^2 A-1$ ---------- (4)

(3) இல் $\cos^2 A=1-\sin^2 A$ எனப் பிரதியிட

$\cos^3 2A=(1-\sin^2 A)-\sin^2 A$

$=1-2\sin^2 A$ ---------- (5)

(3) இலிருந்து, $\cos 2A=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{1}$

$=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A}$

learnium.org

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \quad \text{---------- (6)}$$

$$\tan 2A = \tan(A + A)$$

$$= \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \cdot \tan A} = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \quad \text{---------- (7)}$$

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A$$

$$= \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 2\cos^2 A - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\sin 3A = \sin(2A + A)$$

$$= \sin 2A \cos A + \cos 2A \cdot \sin A$$

$$= 2\sin A \cos A \cdot \cos A + (1 - 2\sin^2 A) \cdot \sin A$$

$$= 2\sin A (1 - \sin^2 A) + (1 - 2\sin^2 A)\sin A$$

$$= 2\sin A - 2\sin^3 A + \sin A - 2\sin^3 A$$

$$= 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\cos 3A = \cos(2A + A)$$

$$= \cos 2A \cdot \cos A - \sin 2A \cdot \sin A$$

$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A \cos A \cdot \sin A$$

$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\cos A (1 - \cos^2 A)$$

$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A$$

$$= 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$$\cos 3A = 4\cos^3 - 3\cos A$$

$$\tan 3A = \frac{\sin 3A}{\cos 3A}$$

$$= \frac{3\sin A - 4\sin^3 A}{4\cos^3 A - 3\cos A}$$

$$= \frac{\sin A (3 - 4\sin^2 A)}{\cos A (4\cos^2 A - 3)}$$

$$= \tan A \cdot \frac{[3\cos^2 A + 3\sin^2 A - 4\sin^2 A]}{[4\cos^2 A - 3\cos^2 A - 3\sin^2 A]}$$

$$= \tan A \frac{[3\cos^2 A - \sin^2 A]}{[\cos^2 A - 3\sin^2 A]}$$

learnium.org

$$= \tan A \; \frac{\frac{3\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A - 3\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= \tan A \frac{\left(3 - \tan^2 A\right)}{1 - 3\tan^2 A}$$

$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

அல்லது

$$\tan 3A = \tan\left(2A + A\right)$$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \cdot \tan A}$$

$$= \frac{\frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \cdot \tan A}$$

$$= \frac{\frac{2\tan A + \tan A\left(1 - \tan^2 A\right)}{1 - \tan^2 A}}{\frac{1 - \tan^2 A - 2\tan^2 A}{1 - \tan^2 A}}$$

$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

$$\boxed{\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}}$$

$$\sin A = \sin\left(A/2 + A/2\right)$$

$$= \sin A/2 \cdot \cos A/2 + \cos A/2 \cdot \sin A/2$$

$$= 2\sin A/2 \cdot \cos A/2 \quad \text{----------(1)}$$

$$\sin A = \frac{2\sin A/2 \cdot \cos A/2}{1}$$

$$\sin A = \frac{2\sin A/2 \cdot \cos A/2}{\cos^2 A/2 + \sin^2 A/2}$$

தொகுதி, பகுதி என்பவற்றை $\cos^2 \frac{A}{2}$ ஆல் வகுக்க,

$$\sin A = \frac{2\tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} \quad \text{----------(2)}$$

$$\cos A = \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{A}{2}$$

$$\cos^2 A/2 - \sin^2 A/2 \quad \text{----------(3)}$$

$\sin^2 A/2 = 1 - \cos^2 A/2$ எனப் பிரதியிட,

$$\cos A = 2\cos^2 A/2 - 1 \quad \text{----------(4)}$$

$\cos^2 A/2 = 1 - \sin^2 \frac{A}{2}$ எனப் பிரதியிட

$$\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} \quad \text{----------(5)}$$

learnium.org

$$\cos A = \frac{\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 A/2}}{\frac{\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}}}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 A/2}{1 + \tan^2 A/2} \quad \text{----------(6)}$$

$$\tan A = \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\right)$$

$$= \frac{2\tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}$$

உதாரணம் 1

$\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A$ எனக் காட்டுக.

$$\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 A)}{1 + (2\cos^2 A - 1)}$$

$$= \frac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A} = \tan^2 A$$

உதாரணம் 2

$\frac{\sin A + \sin 2A}{1 + \cos A + \cos 2A} = \tan A$ எனக் காட்டுக.

$$\frac{\sin A + \sin 2A}{1 + \cos A + \cos 2A}$$

$$= \frac{\sin A + 2\sin A \cos A}{1 + \cos A + 2\cos^2 A - 1}$$

$$= \frac{\sin A + 2 \sin A \cos A}{\cos A + 2\cos^2 A}$$

$$= \frac{\sin A\ (1 + 2\cos A)}{\cos A\ (1 + 2\cos A)} = \tan A$$

உதாரணம் 3

$t = \tan \frac{1}{2} x$ எனில், $\frac{7 - 5\cos x}{5 - 7\cos x}$ ஐ t இல் காண்க.

$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ ஆகும்.

$$\frac{7 - 5\cos x}{5 - 7\cos x} = \frac{7 - 5\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)}{5 - 7\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)}$$

$$= \frac{7(1 + t^2) - 5(1 - t^2)}{5(1 + t^2) - 7(1 - t^2)}$$

$$= \frac{2 + 12t^2}{12t^2 - 2} = \frac{6t^2 + 1}{6t^2 - 1}$$

learnium.org

உதாரணம் 4

$sin80^\circ = sin\left(60^\circ + 20^\circ\right)$ என எழுதுவதன் மூலம்

$sin80^\circ = sin40^\circ + sin20^\circ$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து,

$4\,cos20^\circ\ cos40^\circ = 2\,cos20^\circ + 1$ எனக் காட்டுக

இதிலிருந்து $C = cos20^\circ$ எனின்,

$8C^3 - 6C - 1 = 0$ என உய்த்தறிக.

$sin80^\circ = sin\left(60^\circ + 20^\circ\right)$

$= sin60^\circ\ cos20^\circ + cos60^\circ\ sin20^\circ$

$sin80^\circ = sin60^\circ\ cos20^\circ + \frac{1}{2}\ sin20^\circ$

$2\,sin80^\circ = 2\,sin60^\circ\ cos20^\circ + sin20^\circ$

$= sin80^\circ + sin40^\circ + sin20^\circ$

$sin80^\circ = sin40^\circ + sin20^\circ$ ----------(1)

$2\,sin40^\circ\ cos40^\circ = sin40^\circ + sin20^\circ$

$2 \times 2\,sin20^\circ\ cos20^\circ\ cos40^\circ = 2\,sin20^\circ\,cos20^\circ + sin20^\circ\ \left(sin20^\circ \neq 0\right)$

$4\,cos20^\circ\ cos40^\circ = 2\,cos20^\circ + 1$ ----------(2)

$C = cos20^\circ$

$4\ cos20^\circ\ cos40^\circ = 2\,cos20^\circ + 1$

$4\,cos20^\circ\left(2cos^2\ 20^\circ - 1\right) = 2\,cos20^\circ + 1$

$4\ C\left(2C^2 - 1\right) = 2C + 1$

$8C^3 - 6C - 1 = 0$

உதாரணம் 5

நிறுவுக. $cosec\,\theta + cot\,\theta = cot\frac{1}{2}\theta$

$cosec\theta + cot\,\theta = \frac{1}{sin\theta} + \frac{cos\theta}{sin\theta}$

$= \frac{1 + cos\theta}{sin\theta}$

$= \frac{2\,cos^2\ \theta/2}{2\,sin\theta/2 \cdot cos\theta/2}$

$= \frac{cos\ \theta/2}{sin\theta/2} = cot\,\theta/2$

உதாரணம் 6

$sin\alpha \cdot sin\left(60^\circ - \alpha\right) \cdot sin\left(60^\circ + \alpha\right) = \frac{1}{4}\ sin\ 3\alpha$ எனக் காட்டுக.

$sin\alpha \cdot sin\left(60^\circ - \alpha\right)\ sin\left(60^\circ + \alpha\right)$

$= \frac{1}{2}\left[2\,sin\,\alpha \cdot sin\left(60^\circ - \alpha\right) \cdot sin\left(60^\circ + \alpha\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\ sin\alpha \cdot \left[cos2\alpha - cos120^\circ\right]$

$= \frac{1}{2}\ sin\alpha \cdot \left[cos2\alpha + \frac{1}{2}\right]$

$= \frac{1}{4}\ sin\alpha\ \left[2cos2\alpha + 1\right]$

$= \frac{1}{4}\left[2cos2\alpha \cdot sin\alpha + sin\alpha\right]$

$= \frac{1}{4}\left[sin3\alpha - sin\alpha + sin\alpha\right] = \frac{1}{4}\ sin3\alpha$

learnium.org

உதாரணம் 7

$\cos ec\, A - 2\cot 2A \cdot \cos A = 2\sin A$

$\cos ec\, A - 2\cot 2A \cdot \cos A$

$= \frac{1}{\sin A} - 2 \cdot \frac{\cos 2A}{\sin 2A} \cdot \cos A$

$= \frac{1}{\sin A} - \frac{2\cos 2A}{2\sin A \cos A} \cdot \cos A$

$= \frac{1 - \cos 2A}{\sin A}$

$= \frac{1 - (1 - 2\sin^2 A)}{\sin A}$

$= \frac{2\sin^2 A}{\sin A}$

$= 2\sin A$

பயிற்சி 3

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$

2. $\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$

3. $\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 5\theta}{\cos\theta} = 8\cos^2\theta - 4$

4. $(\cos x + \sin x)^4 = 1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x$

5. $\frac{1 - \cos 4x}{1 + \cos 4x} = \tan^2 2x$

6. $\frac{1}{1 - \tan x} + \frac{1}{1 + \tan x} = \tan 2x$

7. $\frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\cos 3A}{\cos A} = 2$

8. $\frac{\sin 3A}{\sin A} + \frac{\cos 3A}{\cos A} = 4\cos 2A$

9. $\frac{1 - \cos 2A + \sin 2A}{1 + \cos 2A + \sin 2A} = \tan A$

10. $\sqrt{\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}} = \frac{1 + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\theta}{2}} = \sec\theta + \tan\theta$

11. $1 + 2\cos 4x + \cos 8x = 4\cos 4x \cdot \cos^2 2x$

12. $1 + \cos 2A + \sin 2A = 2\cos A(\cos A + \sin A)$

13. $\sin(\alpha - \beta) + 2\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) = 4\sin\alpha \cdot \cos^2\frac{\beta}{2}$

14. $\sin 3x + \sin x = 4\sin x \cos^2 x$ **15.** $\sin 4x = 4\sin x \cos x \cos 2x$

16. $\sin 8x = 8\sin x \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$

17. பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் $\cos 2\alpha$ இன் பெறுமானத்தை காண்க.

(i) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = -\frac{5}{17}, \quad \tan\alpha = \frac{5}{12}$

18. $\tan\theta = \frac{b}{a}$ எனின், $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta$ இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

19. (i) $\sin x = \frac{1}{3}$ எனின், $\sin 3x$ ஐக் காண்க.

(ii) $\tan x = \frac{1}{2}$ எனின், $\tan 4x$ ஐக் காண்க.

20. $\frac{\sin 3A + \sin^3 A}{\cos^3 A - \cos 3A} = \cot A$ **21.** $\frac{\sin 3A - \cos 3A}{\sin A + \cos A} = 2\sin 2A - 1$

22. $t = \tan\frac{1}{2}x$ எனின், $\left(\frac{5 - 13\sin x}{\tan\frac{1}{2}x - 5}\right)$ ஐ t இல் காண்க

23. $\cos x + \sin x = a$

$\cos 2x = b$ எனின், x ஐச் சாராது

a, b இற்கிடையே தொடர்பொன்றினைப் பெறுக.

learnium.org

24. $\cos\theta = a,\ \sin 2\theta = 2b$ எனின், θ ஐச் சாராது a, b இற்கிடையே தொடர்பொன்றினைப் பெறுக.

25. $\cos 3\theta + 3\cos\theta = 4a$

$3\sin\theta - \sin 3\theta = 4b$ எனின், θ ஐச் சாராது a, b இற்கிடையே தொடர்பொன்றினைப் பெறுக.

26. $\tan A + \cot A = 2\operatorname{cosec} A$

27. $\operatorname{cosec} 2A + \cot 2A = \cot A$

28. $\dfrac{1 + \sin A - \cos A}{1 + \sin A + \cos A} = \tan\dfrac{A}{2}$

29. $\cot A = \dfrac{1}{2}\left(\cot\dfrac{A}{2} - \tan\dfrac{A}{2}\right)$

30. $\cos 4A = 1 - 8\cos^2 A + 8\cos^4 A$

31. $\sin 4A = 4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A$

32. $\cos 6A = 32\cos^6 A - 48\cos^4 A + 18\cos^2 A - 1$

33. $\cos\alpha \cdot \cos\left(60^\circ - \alpha\right) \cdot \cos\left(60^\circ + \alpha\right) = \dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$

34. $\cot\alpha + \cot\left(60^\circ + \alpha\right) - \cot\left(60^\circ - \alpha\right) = 3\cot 3\alpha$

35. $\dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A\cos A - \sin B\cos B} = \tan\left(A + B\right)$

36. $\dfrac{1 - \cos A + \cos B - \cos\left(A + B\right)}{1 + \cos A - \cos B - \cos\left(A + B\right)} = \tan\dfrac{A}{2} \cdot \cot\dfrac{B}{2}$

37. $\dfrac{\cos A}{1 - \sin A} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{A}{2}\right)$

38. $\dfrac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \tan 8A \cdot \cot 2A$

39. $4\left(\cos^6\theta - \sin^6\theta\right) = \cos^3 2\theta + 3\cos 2\theta$

40. $\sec^2 A\left(1 + \sec 2A\right) = 2\sec 2A$

41. $\operatorname{cosec} A - 2\cot 2A \cdot \cos A = 2\sin A$

42. $\sin 3A + \sin 2A - \sin A = 4 \cdot \sin A \cdot \cos\dfrac{A}{2} \cdot \cos\dfrac{3A}{2}$

43. $2\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta\right) = 1 + \cos^2 2\theta$

44. $\sin\left(2n + 1\right)A \cdot \sin A = \sin^2\left(n + 1\right)A - \sin^2\left(n - 1\right)A$

45. $\dfrac{\sin\left(A + 3B\right) + \sin\left(3A + B\right)}{\sin 2A + \sin 2B} = 2\cos\left(A + B\right)$

46. $\cos = \dfrac{11}{61}$, $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$ ஆகும். கோணங்கள் ஆகியன எனக் கொண்டு என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

47. $\left(\cos A + \cos B\right)^2 + \left(\sin A - \sin B\right)^2 = 4\cos^2\left(\dfrac{A + B}{2}\right)$

48. $\left(\cos A + \cos B\right)^2 + \left(\sin A + \sin B\right)^2 = 4\cos^2\left(\dfrac{A - B}{2}\right)$

49. $\left(\cos A - \cos B\right)^2 + \left(\sin A - \sin B\right)^2 = 4\sin^2\left(\dfrac{A - B}{2}\right)$

50. $\sec\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right) \cdot \sec\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) = 2\sec 2\theta$

51. $\tan\left(45^\circ + \dfrac{A}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$

52. $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{A}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin A$

53. $\cos^2\theta + \cos^2\left(\theta + \dfrac{2\pi}{3}\right) + COS^2\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{2}$

54. $\cos 2A + \cos 2B + \sin^2\left(A - B\right) - \sin^2\left(A + B\right)$

$= \cos\left(2A + 2B\right)$

55. $\left(\tan 4A + \tan 2A\right)\left(1 - \tan^2 3A \cdot \tan^2 A\right) = 2\tan 3A \cdot \sec^2 A$

56. $\left(1 + \tan\dfrac{A}{2} - \sec\dfrac{A}{2}\right)\left(1 + \tan\dfrac{A}{2} + \sec\dfrac{A}{2}\right)$

$= \sin A \cdot \sec^2\dfrac{A}{2}$

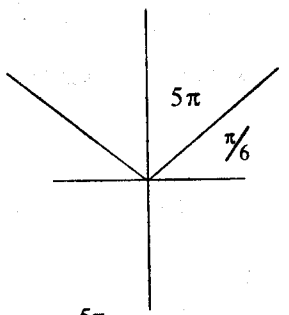
learnium.org

4. திரிகோண கணிதச் சமன்பாடுகள்

$sin\theta = O$ இன் தீர்வு.

$\theta = O,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,.....$

$-\pi, -2\pi, -3\pi, -4\pi, -5\pi,.....$



பொதுத்தீர்வு:

$\theta = n\pi,\ (n \in Z)$ ஆகும்.

$sin\,\theta = \frac{1}{2}$ என்க.

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{5\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{5\pi}{6},.....$

$= \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ என்பதால்,

$= \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 3\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6},.....$

$\theta = n\pi + (-1)^n \cdot \pi/6$; $n = 0, 1, 2, 3, 4,.....$ என எழுதலாம்.

இவ்வாறே, கோணம் வலஞ்சுழியாக அளக்கப்படின்,

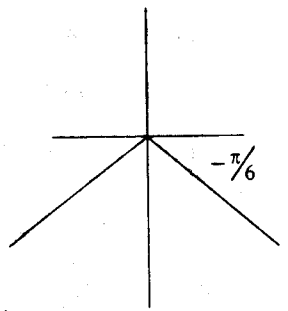
$\theta = -\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right), -2\pi + \frac{\pi}{6}, -\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right), -4\pi + \frac{\pi}{6}.....$

$\theta = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}$ $n = -1, -2, -3,.....$ என எழுதலாம்.

ஆகவே, $sin\theta = \frac{1}{2}$ இன் பொதுத்தீர்வு

$\theta = n\pi + (-1)^n \cdot \pi/6$ ஆகும்.

இங்கு n நிறையெண் ஆகும்.



$sin\,\theta = -\frac{1}{2}$ என்க.

$\theta = -\pi/6, \pi + \pi/6, 2\pi - \pi/6, 3\pi + \pi/6.....$

$\theta = n\pi + (-1)^n \cdot \left(-\pi/6\right)$; $n = O, -1, -2, -3.....$ ஆகும்.

வலஞ்சுழியாக அளக்கப்படும் போதும் இது பொருந்துவதைக் காணலாம்.

$\theta = n\pi + (-1)^n \cdot \left(-\pi/6\right)$; $n \in Z$

$sin\,\theta = sin\,\alpha$ எனின்,

$\theta = n\pi + (-1)^n\,\alpha$ ஆகும். ; $n \in Z$

$cos\theta = O$ என்க.

$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi + \pi/2, 2\pi + \frac{3\pi}{2}, 4\pi + \pi/2, 4\pi - \frac{3\pi}{2},.....$

$\frac{3\pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2}$ என எழுதுவதால்,

$\theta = \frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi - \frac{\pi}{2}, 4\pi + \frac{\pi}{2}, 6\pi - \frac{\pi}{2},.....$

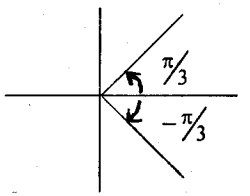
கோணங்களை வலஞ்சுழியாக அளப்பதன் மூலமும்,

$cos\,\theta = 0$ எனின்,

$\theta = 2n\pi \pm \pi/2$; $n \in Z$ என எழுதலாம்.

$cos\theta = \frac{1}{2}$ என்க,

$\theta = \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}, 4\pi - \pi/3.....$



அல்லது

$-\pi/3, -2\pi + \frac{\pi}{3}, -2\pi - \frac{\pi}{3}, -4\pi + \pi/3, -4\pi - \frac{\pi}{3}.....$

என எழுதலாம்

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \pi/3$; $n \in Z$ ஆகும்.

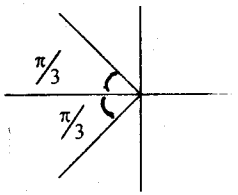
$cos = -\frac{1}{2}$ என்க.

$\theta = \frac{2\pi}{3}, 2\pi - \frac{2\pi}{3}, 2\pi + \frac{2\pi}{3}, 4\pi - \frac{2\pi}{3},.....$ ஆகும்.

learnium.org

$\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ஆகும்.

> $\cos\theta = \cos\alpha$ எனின்
> $\theta = 2n\pi \pm \alpha$ ஆகும் $n \in Z$

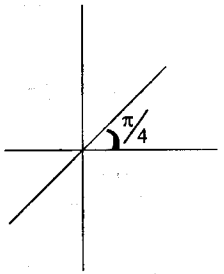


$\tan\theta = O$ என்க.

$\theta = O, \pi, 2\pi, 3\pi.....$

$-\pi, -2\pi, -3\pi,.....$

அகவே $\theta = n\pi$, $n \in Z$ ஆகும்.

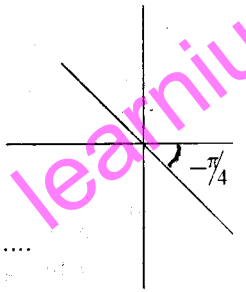


$\tan\theta = 1$ என்க.

$\theta = \pi/4, \pi + \pi/4, 2\pi + \pi/4, 3\pi + \pi/4, 4\pi + \pi/4$

$= -\pi + \pi/4, -2\pi + \pi/4, -3\pi + \pi/4,.....$

எனவே $\theta = n\pi - \pi/4$; $n \in Z$ ஆகும்.



$\tan\theta = -1$ என்க.

$\theta = \pi - \frac{\pi}{4}, 2\pi - \pi/4, 3\pi - \pi/4, 4\pi - \pi/4.....$

$= -\pi + \pi/4, -\pi - \pi/4, -2\pi + 1/4, -3\pi + \pi/4, ...$

எனவே, $\theta = n\pi - \pi/4$; $n \in Z$ ஆகும்.

> $\tan\theta = \tan\alpha$ எனின்,
> $\theta = n\pi + \alpha$ ஆகும். $n \in Z$

உதாரணம் 1

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் பொதுத்தீர்வைக் காண்க.

(a) $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = O$

(b) $\tan^2\theta - (1 + \sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = O$ **(c)** $\sin 9\theta = \sin\theta$

(a) $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = O$

$(\cos x + 2)(\cos x + 1) = O$

$\cos x + 2 = O$ அல்லது $\cos x + 1 = O$

$\cos x = -2$ $\cos x = -1$

$-1 \le \cos x \le 1$ என்பதால் $\cos x = \cos\pi$

$\cos x \neq 2$ பொருந்தாது $x = 2n\pi \pm \pi$; $n \in Z$

(b) $\tan^2\theta - (1 + \sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = O$

$(\tan\theta - 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = O$

$\tan\theta - 1 = O$ அல்லது $\tan\theta - \sqrt{3} = O$

$\tan\theta = 1$ $\tan\theta = \sqrt{3}$

$\tan\theta = \tan\pi/4$ $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$

$\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$; $n \in Z$; $\theta = m\pi + \frac{\pi}{3}$, $m \in Z$

(c) $\sin 9\theta = \sin\theta$

$\sin 9\theta - \sin\theta = O$

$2\cos 5\theta \cdot \sin 4\theta = O$

learnium.org

$\cos 5\theta = O$ அல்லது $\sin 4\theta = O$

$\cos 5\theta = \cos \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\sin 4\theta = \sin O$

$4\theta = m\pi$

$5\theta = 2n\pi \pm \pi/2 ;\ n \in Z ;\ \theta = \frac{m\pi}{4} ;\ m \in Z$

$\theta = \frac{1}{5}\left[2n\pi \pm \pi/2\right] ;\ n \in Z$

உதாரணம் 2

தீர்க்க

(a) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = O$

(b) $\cos x \cdot \cos 3x - 1 = O$ $\qquad$ **(c)** $\cos 5x - \cos 4x + \cos x = 1$

(a) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = O$

$(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = O$

$2\cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = O$

$\cos 2x\,(2\cos x + 1) = O$

$\cos 2x = O$ அல்லது $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\cos 2x = \cos \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$

$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ n \in Z$

$x = n\pi \pm \frac{\pi}{4},\ n \in Z ;$

(b) $\cos x \cdot \cos 3x - 1 = O$

$\cos x\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) - 1 = O$

$4\cos^4 x - 3\cos^2 x - 1 = O$

$\left(4\cos^2 x + 1\right)\left(\cos^2 x - 1\right) = O$

$4\cos^2 x + 1 \neq O ;\ \cos^2 x - 1 = O$

$\cos x = \pm 1$

$\cos x = 1$ $\qquad$ $\cos x = -1$

$\cos x = \cos O$ $\qquad$ $\cos x = \cos \pi$

$x = 2n\pi ;\ n \in Z$ $\qquad$ $x = 2n\pi \pm \pi ;\ n \in Z$

அல்லது

$x = m\pi ,\ m \in Z$

(c) $\cos 5x - \cos 4x + \cos x = 1$

$\cos 5x + \cos x - \cos 4x = 1$

$2\cos 3x \cdot \cos 2x - \left(2\cos^2 2x - 1\right) = 1$

$2\cos 3x \cdot \cos 2x - 2\cos^2 2x = O$

$\cos 2x\left[\cos 3x - \cos 2x\right] = O$

$\cos 2x = O$ அல்லது $\cos 3x - \cos 2x = O$

$\cos 2x = \cos \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\cos 3x = \cos 2x$

$3x = 2n\pi \pm 2x$

$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $3x = 2n\pi + 2x$ எனின்,

$x = 2n\pi ;\ n \in Z$

$x = n\pi \pm \frac{\pi}{4} ;\ n \in Z$ $\qquad$ $3x = 2n\pi - 2x$ எனின்

$5x = 2n\pi$

$x = \frac{2n\pi}{5} ;\ n \in Z$

learnium.org

உதாரணம் 3

$cos2\theta = sin(90 - 2\theta)$ என எழுதுவதன் மூலம் $sin3\theta - cos2\theta = O$ இன் O° இற்கும் 360° இற்கும் இடையிலுள்ள தீர்வுகளை எழுதுக.

$sin3\theta - cos2\theta$ ஐ $sin\theta$ இல் உணர்த்துவதன் மூலம் $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = O$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 1, $sin18^\circ$, $-sin54^\circ$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $sin18^\circ$, $-sin54^\circ$ என்பவற்றை மூலங்களாக கொண்ட இருபடிச்சமன்பாட்டினை முழுவெண் குணகங்களுடன் பெறுக.

இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டினைத் தீர்ப்பதன் மூலம் $sin18^\circ$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$sin3\theta - cos2\theta = O$$
$$sin3\theta = cos2\theta$$
$$sin3\theta = sin(90 - 2\theta)$$
$$3\theta = n \times 180^\circ + (-1)^n \cdot (90 - 2\theta)$$

n = 0 எனின், $3\theta = 90 - 2\theta$

$5\theta = 90^\circ$, $\theta = 18^\circ$ ---------- (1)

n = 1 எனின், $3\theta = 180^\circ - (90 - 2\theta)$

$\theta = 90^\circ$ ---------- (2)

n = 2 எனின், $3\theta = 360^\circ + (90 - 2\theta)$

$5\theta = 450^\circ$, $\theta = 90^\circ$

n = 3 எனின், $3\theta = 540^\circ - (90 - 2\theta)$

$\theta = 450^\circ$

n = 4 எனின், $3\theta = 720^\circ + (90 - 2\theta)$

$5\theta = 810^\circ$

$\theta = 162^\circ$ ---------- (3)

n = 6 எனின் $3\theta = 1080^\circ + (90 - 2\theta)$

$$\theta = \frac{1170}{5} = 234^\circ$$ ---------- (4)

n = 8 எனின் $3\theta = 1440 + (90 - 2\theta)$

$5\theta = 1530^\circ$

$$\theta = \frac{1530}{5} = 306^\circ$$ ---------- (5)

தீர்வுகள் $\{18^\circ, 90^\circ, 162^\circ, 234^\circ, 306^\circ\}$ $(O^\circ \le \theta \le 360^\circ)$

$sin3\theta - cos2\theta$

$= 3sin\theta - 4sin^3\theta - (1 - 2sin^2\theta)$

$= -4sin^3\theta + 2sin^2\theta + 3sin\theta - 1$

$sin3\theta - cos2\theta = O$ எனின்,

$-4sin^3\theta + 2sin^2\theta + 3sin\theta - 1 = O$

$4sin^3\theta - 2sin^2\theta - 3sin\theta + 1 = O$

$x = sin\theta$ என்க

$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = O$

$sin3\theta - cos2\theta = O$ இன் தீர்வுகள் ($O^\circ \le \theta \le 360^\circ$ எனும் வீச்சில்)

$\theta = 18^\circ, 90^\circ, 162^\circ, 234^\circ, 306^\circ$ என்பதால், $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = O$ இன் தீர்வுகள் $x = sin18^\circ, sin90^\circ, sin162^\circ\ sin234^\circ, sin306^\circ$

$\left[sin162^\circ = sin(180^\circ - 18^\circ) = sin18^\circ, sin90^\circ = 1\right.$

$sin234^\circ = sin(180^\circ + 54^\circ) = -sin54^\circ$

$\left.sin306^\circ = sin[360 - 54] = -sin54^\circ\right]$

learnium.org

ஆகவே தீர்வுகள் $x = 1, x = sin18^\circ, x = -sin54^\circ$

$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = O$

$(x-1)\left(4x^2 + 2x - 1\right) = O$

எனவே $sin18^\circ, -sin54^\circ$ என்பவற்றை மூலங்களாக கொண்ட

சமன்பாடு $4x^2 + 2x - 1 = O$

$$4x^2 + 2x - 1 = O$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$sin\,18^\circ > O$. எனவே $sin18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

மேலும் $-sin\,54^\circ = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$

$$sin\,54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$a\cos\theta + b\sin\theta = c$ எனும் வடிவிலான சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காணல்:

$a\cos\theta + b\sin\theta = C$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ என்க.

$$\cos\alpha \cdot \cos\theta + \sin\alpha \cdot \sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$-1 \le \cos(\theta - \alpha) \le 1$ என்பதால் சமன்பாடு தீர்வைக் கொண்டிருப்பதற்கு

$$-1 \le \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$$

$c^2 \le a^2 + b^2$ ஆகும்.

இப்பொழுது $-1 \le \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$ என்க

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta \text{ என்க.}$$

$$\theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta$$

$$\theta = 2n\pi \pm \beta + \alpha,\ n \in Z$$

உதாரணம் 4

தீர்க்க

(i) $\cos\theta + \sin\theta = 1$

(ii) $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ எனின் $3\sin2\theta + 2\sin^2\theta = 2$ என்னும் சமன்பாட்டின் சில தீர்வுகள் α வைச் சார்ந்தன எனவும், வேறு சில தீர்வுகள் α வைச் சாராதன எனவும் காட்டுக.

(iii) $\text{cosec}\,\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$.

(i) $\cos\theta + \sin\theta = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

learnium.org

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\pi/4$$

$$\theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \pi/4$$

$$\theta = 2n\pi \pm \pi/4 + \pi/4$$

$\theta = 2n\pi$; $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$; $n \in Z$

(ii) $3\sin 2\theta + 2\sin^2\theta = 2$

$3\sin 2\theta + (1 - \cos 2\theta) = 2$

$3\sin 2\theta - \cos 2\theta = 1$

$$\frac{3}{\sqrt{10}}\sin 2\theta - \frac{1}{\sqrt{10}}\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ என்க

$$\cos\alpha \cdot \sin 2\theta - \sin\alpha \cdot \cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\sin(2\theta - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{10}} = \sin\alpha$$

$$2\theta - \alpha = n\pi + (-1)^n \cdot \alpha$$

n ஒற்றை எனின், $2\theta - \alpha = n\pi - \alpha$

$$2\theta = n\pi$$

$$\theta = \frac{n\pi}{2} \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\ldots)$$

n ஒற்றை எனின், $2\theta - \alpha = n\pi + \alpha$

$$\theta = \frac{n\pi}{2} + \alpha \quad (n = O, \pm 2, \pm 4, \ldots\ldots$$

(iii) $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$

$$\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$$

$\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = -1$

$$\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\theta + \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$\theta + \frac{\pi}{3} = 2n\pi + \frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ $\theta + \frac{\pi}{3} = 2n\pi - \frac{2\pi}{3}$

$\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$; $n \in Z$ $\qquad$ $\theta = (2n-1)\pi$, $n \in Z$

$\theta = (2\pi - 1)\pi$ எனின், $\sin\theta = 0$; இது பொருந்தாது.

எனவே தீர்வு $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$; $n \in Z$

$a\cos\theta + b\sin\theta = C$ எனும் வடிவிலான சமன்பாடுகளை

$t = \tan\frac{\theta}{2}$, எனப் பிரதியிடுவதனால் தீர்க்கலாம்.

$$\cos\theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$a\cos\theta + b\sin\theta = c$

$$a\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) + b\cdot\frac{2t}{1 + t^2} = c$$

learnium.org

$$a\left(1-t^2\right)+2bt = c\left(1+t^2\right)$$

$$(c+a)t^2 - 2bt + (c-a) = O$$

இச் சமன்பாடு தீர்க்கப்பட (t இல் இருபடிச் சமன்பாடு) $\Delta \geq O$ ஆதல் வேண்டும்.

$$\Delta \geq O$$

$4b^2 - 4\left(c^2 - a^2\right) \geq O$ ஆதல் வேண்டும்.

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$

$\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = -1$ எனும் சமன்பாட்டைக் கருதுக.

$t = \tan\frac{\theta}{2}$ என்க.

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{\sqrt{3}\times 2t}{1+t^2} = -1$$

$$1 - t^2 - 2\sqrt{3}t = -\left(1+t^2\right)$$

$$2\sqrt{3}\,t = 2$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\theta}{2} = n\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3},\ n \in Z$$

உதாரணம் 5

$2(\cos\theta + \sin\theta) = \sqrt{3} + 1$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{12}$$

$$\theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{12}$$

$$\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\ ;\ \theta = 2n\pi - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}$$

$$= 2n\pi + \frac{\pi}{3}\ ;\ \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{6}\ ;\ n \in Z$$

உதாரணம் 6

$\tan 3\theta = 1$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = O$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$\tan\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{5\pi}{12}$, $\tan\frac{3\pi}{4}$ எனக்காட்டி $\tan\frac{\pi}{12}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$\tan 3\theta = 1$

$$\tan 3\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

learnium.org

$$3\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{1}{3}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\theta = (4n+1)\frac{\pi}{12} \; ; n \in Z \qquad \text{----------(1)}$$

$\tan 3\theta = 1$ என்க.

$$\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} = 1$$

$$3\tan\theta - \tan^3\theta = 1 - 3\tan^2\theta$$

$$\tan^3\theta - 3\tan^2\theta - 3\tan\theta + 1 = O$$

$\tan\theta = t$ என்க.

$$t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = O,$$

இப்பொழுது $\tan 3\theta = 1$ எனின் $O \le \theta < 2\pi$ இல் தீர்வுகள் பின்வருமாறு அமையும். [(1) இலிருந்து, $n = O, 1, 3, 4$]

$$\theta = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{21\pi}{12}\right\}$$

$\tan\theta = \left\{\tan\frac{\pi}{12}, \tan\frac{5\pi}{12}, \tan\frac{9\pi}{12}\right\}$ ஆகும்.

$$\left[\tan\frac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12}\right.$$

$$\tan\frac{17\pi}{12} = \tan\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = \tan\frac{5\pi}{12},$$

$$\left.\tan\frac{21\pi}{12} = \tan\frac{7\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = O$$

$$(t+1)\left(t^2 - 4t + 1\right) = O. \quad \left[\tan 3\pi/4 = -1\right]$$

$t^2 - 4t + 1 = O$ இன் தீர்வுகள் $\tan \pi/12$, $\tan 5\pi/12$ ஆகும்.

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}$$

$\tan\frac{\pi}{12} < 1$. எனவே $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ ஆகும்.

உதாரணம் 7

பொதுத்தீர்வுகளை எழுதுக.

(i) $\sin\theta = -\cos 22^\circ$ (ii) $\cot\theta = \cot 280^\circ$

(iii) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ உம் $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ உம் (iv) $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\theta + \pi/3\right)$

(i) $\sin\theta = -\cos 22^\circ = -\cos\left(90^\circ - 68^\circ\right)$

$$\sin\theta = -\sin 68^\circ = \sin\left(-68^\circ\right)$$

$$\theta = \left(180^\circ \times n\right) + (-1)^n\left(-68^\circ\right)$$

$$= \left(180^\circ \times n\right) - (-1)^n 68^\circ \quad ; n \in Z$$

(ii) $\cot\theta = \cot 280^\circ$

$$\tan\theta = \tan 280^\circ = \tan\left(360 - 80^\circ\right)$$

$$= -\tan 80^\circ$$

$$\tan\theta = \tan\left(-80^\circ\right)$$

learnium.org

$$\theta = 180^\circ \times n + (-80^\circ)$$

$$= 180^\circ \times n - 80^\circ \quad ; n \in Z$$

அல்லது

$$\tan\theta = \tan 280^\circ$$

$$\theta = 180^\circ \times n + 280^\circ \quad , n \in Z$$

(iii) $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = -\frac{-\sqrt{3}}{2}$

$O \le \theta < 2\pi$ இல்

$$\theta = \frac{5\pi}{6}$$

பொதுத்தீர்வு $\theta = 2n\pi + \frac{5\pi}{6}$, $n \in Z$

(iv) $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

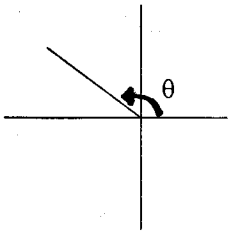
$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\theta - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \left[\frac{\pi}{2} - \left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\theta - \frac{\pi}{3} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\pi}{3}$$

$$2\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = n\pi + \frac{\pi}{4} \quad ; n \in Z$$



உதாரணம் 8

$\tan 4\theta = \frac{4\tan\theta\left(1 - \tan^2\theta\right)}{1 - 6\tan^2\theta + \tan^4\theta}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $t^4 + 4t^3 - 6t^2 - 4t + 1 = O$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதன் மூலம்,

$\tan\frac{\pi}{16} + \tan\frac{5\pi}{16} - \tan\frac{3\pi}{16} - \tan\frac{7\pi}{16} = -4$ எனவும்,

$\tan\frac{\pi}{16} \cdot \tan\frac{5\pi}{16} \cdot \tan\frac{3\pi}{16} \cdot \tan\frac{7\pi}{16} = 1$ எனவும் காட்டுக.

$\tan 4\theta = \tan(2\theta + 2\theta)$

$$= \frac{2\tan 2\theta}{1 - \tan^2 2\theta}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}}{1 - \left(\frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{4\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \times \frac{\left(1 - \tan^2\theta\right)^2}{\left(1 - 6\tan^2\theta + \tan^4\theta\right)}$$

$$= \frac{4\tan\theta\left(1 - \tan^2\theta\right)}{\left(1 - 6\tan^2\theta + \tan^4\theta\right)}$$

$\tan\theta = t$ என்க ; மேலும் $\tan 4\theta = 1$ எனின்,

$$\tan 4\theta = \frac{4t\left(1 - t^2\right)}{1 - 6t^2 + t^4} = 1$$

$$t^4 + 4t^3 - 6t^2 - 4t + 1 = O \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

இது t இல் நான்காம் படியிலுள்ள சமன்பாடு.

learnium.org

மூலங்கள் $t_1 + t_2, t_3, t_4$ என்க.

$$(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)(t - t_4) = O$$

$$t^4 - (t_1 + t_2 + t_3 + t_4)t^3 + \ldots\ldots\ldots + t_1\ t_2\ t_3\ t_4 = O \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\tan 4\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$4\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{\pi}{16}(4n + 1)\ ;\ n \in Z$$

$O \le \theta \le 2\pi$ இல் θ இன் தீர்வுகள்:

$$\theta = \left\{\frac{\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}, \frac{21\pi}{16}, \frac{25\pi}{16}, \frac{29\pi}{16}\right\}$$

$$\tan\theta = \left\{\tan\frac{\pi}{16}, \tan\frac{5\pi}{16}, \tan\frac{9\pi}{16}, \tan\frac{13\pi}{16}\right\}$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) என்பவற்றை ஒப்பிடுவதால்,

$$\tan\frac{\pi}{16} + \tan\frac{5\pi}{16} + \tan\frac{9\pi}{16} + \tan\frac{13\pi}{16} = -4$$

$$\tan\frac{\pi}{16} + \tan\frac{5\pi}{16} - \tan\frac{7\pi}{16} - \tan\frac{3\pi}{16} = -4$$

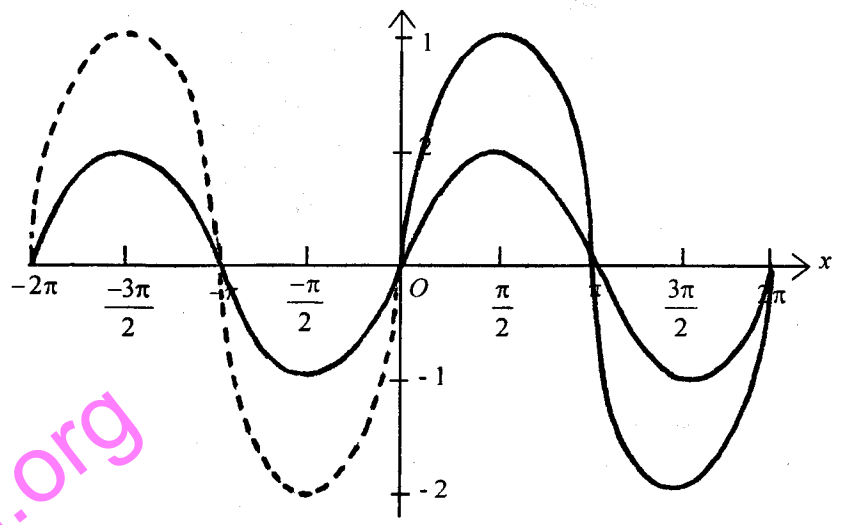
$$\tan\frac{\pi}{16} \cdot \tan\frac{5\pi}{16} \cdot \tan\frac{9\pi}{16} \cdot \tan\frac{13\pi}{16} = 1$$

$$\tan\frac{\pi}{16} \cdot \tan\frac{5\pi}{16} \cdot \left(-\tan\frac{7\pi}{16}\right) \cdot \left(-\tan\frac{3\pi}{16}\right) = 1$$

$$\tan\frac{\pi}{16} \cdot \tan\frac{5\pi}{16} \cdot \tan\frac{7\pi}{16} \cdot \tan\frac{3\pi}{16} = 1$$

வரைபுகள்

$y = \sin x$, $y = 2\sin x$ என்பவற்றின் வரைபுகள்



$y = \sin x$, $y = 2\sin x$ என்ற இருவளையிகளும் ஒரே ஆவர்த்தனம் 2π ஐக் கொண்டவை.

$y = \sin x$ இல் $-1 \le y \le 1$

$y = 2\sin x$ இல் $-2 \le y \le 2$ ஆகும்.

$y = \sin x$, $y = \sin 2x$ என்பவற்றின் வரைபுகள்

$\sin 2x = O \Rightarrow 2x = n\pi,\ n \in Z$

$$x = \frac{n\pi}{2}$$

$x = -\pi, -\frac{\pi}{2}, O, \frac{\pi}{2}, \pi$ என்பவற்றில் $\sin 2x = O$

$\sin 2x$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் 1 ஆகும்.

$\sin 2x = 1$ எனின்,

$$2x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2}$$

learnium.org

$$x = \frac{1}{2}\left[n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2}\right]$$

$x = -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ என்பவற்றில் $\sin 2x = 1$.

$\sin 2x$ இன் இழிவுப்பெறுமானனம் -1 ஆகும்.

$$\sin 2x = -1$$

$$2x = n\pi + (-1)^n \left(\frac{-\pi}{2}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left[n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{2}\right]$$

$x = \frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ என்பவற்றில் $y = -1$

இருவளையிகளும் வெட்டும் புள்ளிகள்

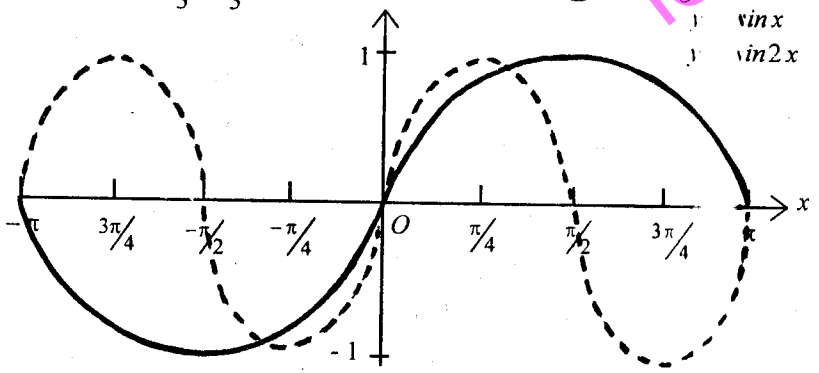
$$\sin 2x = \sin x$$

$$\sin 2x - \sin x = O$$

$$2 \sin x \cos x - \sin x = O$$

$\sin x = O$ அல்லது $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = -\pi, O, \pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ என்பவற்றில் இரு வளையிகளும் வெட்டும்



$-1 \le \sin x \le 1$,

$-1 \le \sin$

$y = \sin 2x$ ஆவர்த்தனமானது. ஆவர்த்தனம் π ஆகும்.

$y = \cos x$, $y = \cos 3x$ என்பவற்றின் வரைபுகள்

$\cos 3x = O$ எனின், $3x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$; $n \in Z$

$$x = \frac{1}{3}\left[2n\pi \pm \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{6}[4n \pm 1]$$

$x = -\frac{3\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}$ என்பவற்றில் $\cos 3x = O$.

$\cos 3x = 1$ எனின், $3x = 2n\pi$

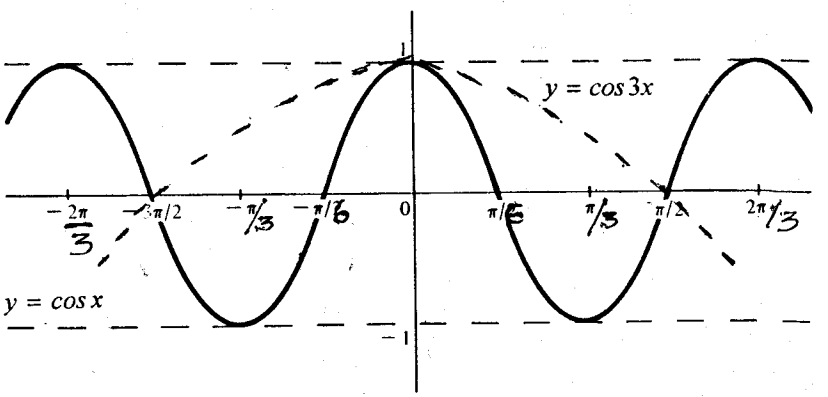
$$x = \frac{2n\pi}{3}$$

$x = \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$ என்பவற்றில் $\cos 3x = 1$ ஆகும்.

$\cos 3x = -1$ எனின், $3x = 2n\pi \pm \pi$

$$x = \frac{\pi}{3}(2n \pm 1)$$

$x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ என்பவற்றில் $\cos 3x = -1$ ஆகும்.



$y = \cos 3x$ இன் ஆவர்த்தனம் $\frac{2\pi}{3}$ ஆகும்.

learnium.org

$y = sin(x + \alpha)$ இன் வரைபு $(\alpha > 0)$

$y = 0,\ sin(x + \alpha) = O$

$\Rightarrow x + \alpha = n\pi$

$x = n\pi - \alpha$

$x = -\pi - \alpha, -\alpha, \pi - \alpha, 2\pi - \alpha$ என்பவற்றில் $y = O$

$sin(x + \alpha)$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் 1

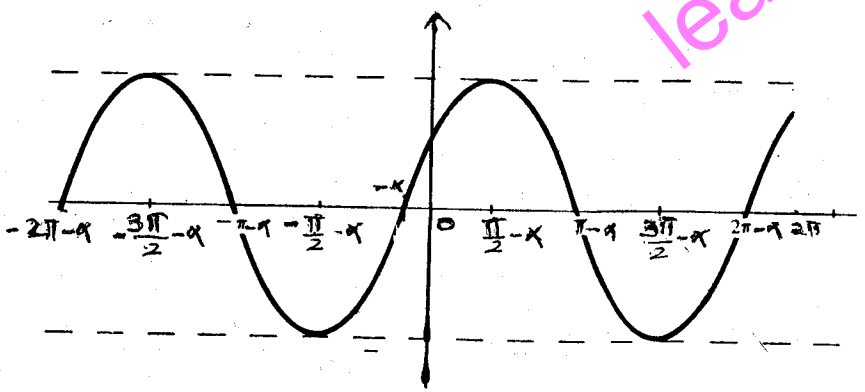
$sin(x + \alpha) = 1$

$x + \alpha = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2}$

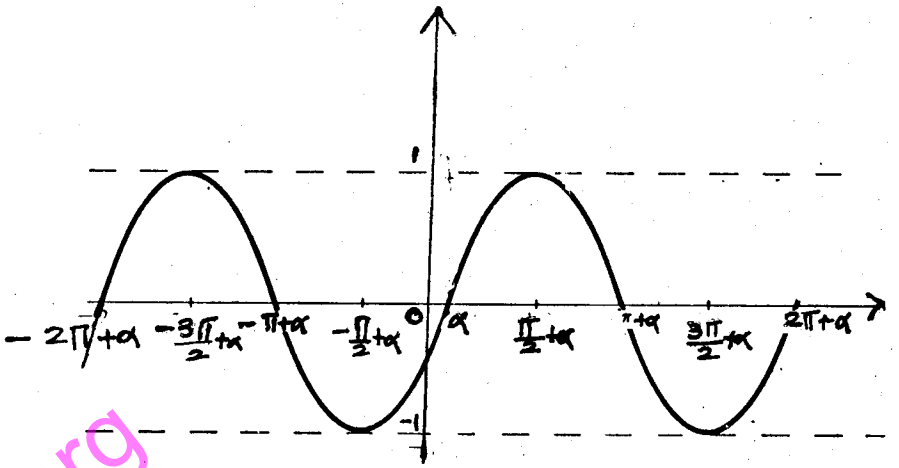
$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2} - \alpha$

$x = -\frac{3\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha$ என்பவற்றில் $y = 1$

$x = -\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{3\pi}{2} - \alpha$ என்பவற்றில் $y = -1$

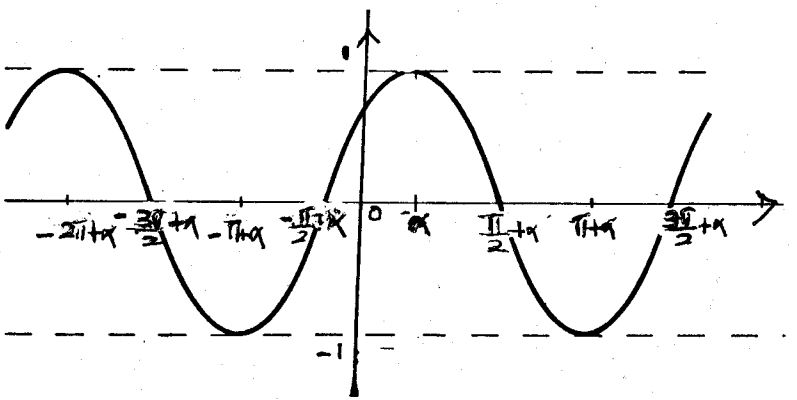


$y = sin(x - \alpha)$ இன் வரைபு



learnium.org

$y = cos(x - \alpha)$ இன் வரைபு



$y = \cos x + \sin x$ இன் வரைபு

$$y = \cos x + \sin x$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right]$$

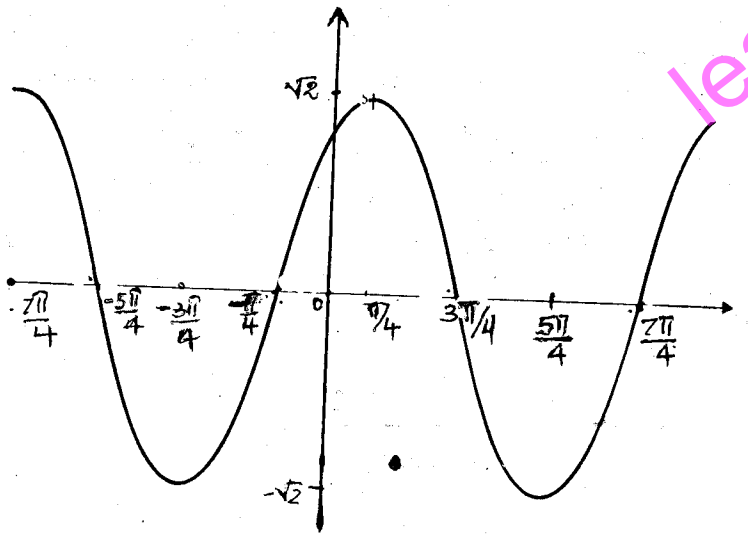
$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right]$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

y இன் உயர்வுப் பெறுமான்ம் $= \sqrt{2}$; $x = -\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

y இன் இழிவுப் பெறுமானம் $= -\sqrt{2}$; $x = -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

$y = O$; $x = -\frac{5\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

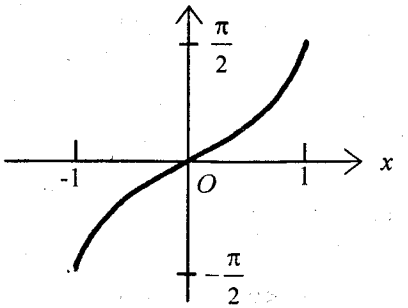


$y = \sin^{-1} x$

இங்கு $-1 \le x \le 1$

மேலும் $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ஆகுமாறு

y வரையறுக்கப்படுகிறது.

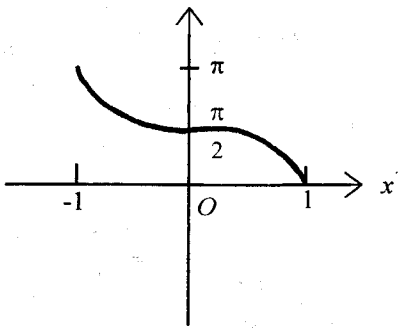


$y = \cos^{-1} x$

$-1 \le x \le 1$ ஆகும்.

$o \le y \le \pi$ ஆகுமாறு

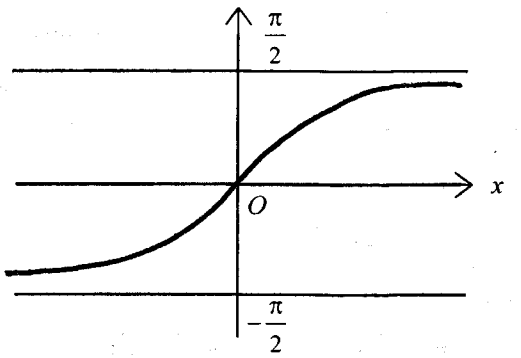
y வரையறுக்கப்படுகிறது.



$y = \tan^{-1} x \quad x \in R$

$-\pi/2 < y < \frac{\pi}{2}$ என

y வரையறுக்கப்படும்.



உதாரணம் 9

$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right), \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right), \theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$ எனின்,

$O < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < \frac{3\pi}{4}$ என நிறுவுக.

learnium.org

இதிலிருந்து $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{4}$ எனக் காட்டுக.

$\theta_1\ tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right),\ \theta_2 = tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right),\ \theta_3 = tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$

$-\frac{\pi}{2} < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

மேலும் $O < \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{9} < 1$ என்பதால்,

$O < \theta_1, \theta_2 < \theta_3 < \frac{\pi}{4}$ ஆகும்.

ஆகவே $O < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < \frac{3\pi}{4}$ ஆகும் .

$$tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{tan\theta_1 + tan\theta_2}{1 - tan\theta_1\ tan\theta_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right)} = \frac{7}{11}$$

$$tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \frac{tan(\theta_1 + \theta_2) + tan\,\theta_3}{1 - tan(\theta_1 + \theta_2) \cdot tan\,\theta_3}$$

$$= \frac{\frac{7}{11} + \frac{2}{9}}{1 - \frac{7}{11} \times \frac{2}{9}}$$

$$= \frac{\frac{85}{99}}{1 - \frac{14}{99}} \qquad = \frac{\frac{85}{99}}{\frac{85}{99}} = 1$$

$tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 1$

ஆகவே , $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{4}$

உதாரணம் 10

$cos^{-1}x + cos^{-1}y + cos^{-1}z = \pi$ எனின்,

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ என நிறுவுக.

$cos^{-1}x = A,\ cos^{-1}y = B,\ cos^{-1}z = C$ என்க .

$cos\,A = x,\ cos\,B = y,\ cos\,C = z,\ (O \le A, B, C \le \pi)$

$A + B + C = \pi$

$A + B = \pi - C$

$cos(A + B) = cos(\pi - C)$

$cos\,A\,cos\,B - sin\,A\,sin\,B = -cos\,C$

$xy - \left(\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1-y^2}\right) = -z$

$(xy + z) = \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}$

$(xy + z)^2 = \left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)$

$x^2y^2 + 2xyz + z^2 = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$

பயிற்சி 4

4(a)

பின்வரும் சமன்பாடுகளிற்கு பொதுத்தீர்வை எழுதுக.

1. $sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $tan^2\theta = \frac{1}{3}$
6. $2\,cot^2\theta = cosec^2\theta$

learnium.org

7. $2\sqrt{3}\cos^2\theta = \sin\theta$

8. $\cos 5\theta = \cos 4\theta$

9. $\cot\theta = \tan 8\theta$

10. $\sin 2\theta = \cos 3\theta$

11. $2\cos^2 x = 3(1 - \sin x)$

12. $6\sin^2 x + 4\cos^2 x = 5\tan x$

13. $\sin 8\theta - \sin 6\theta + \sin 4\theta = 0$

14. $4\tan\theta \cdot \tan 2\theta + 3\sec^2\theta = 0$

15. $\cos 3\theta + \sin 4\theta + \cos 7\theta = 0$

16. $6\tan 2\theta - 3\tan\theta - 5\cot\theta = 0$

17. $2\sin\theta \cdot \sin 3\theta - 1 = 0$

18. $\cos 6x \cdot \cos 2x - \cos 3x \cdot \cos x = 0$

19. $\tan x - \sec 2x + 1 = 0$

20. $2\sin 5x \cos 3x - \sin 4x = 0$

21. $\cos 3x - 4\cos 2x + 2\cos 2x - 2 = 0$

22. $3\tan x \cdot \tan 2x - 4\cos^2 x + 13 = 0$

23. $\sin 3\theta - \sin 2\theta + \sin\theta = 0$

24. $4\cos 3\theta - \sin 2\theta \cos\theta = 0$

25. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

26. $\cos\theta + \sin\theta = 1$

27. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$

28. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

29. $\operatorname{cosec} x = \cot x + \sqrt{3}$

30. $2\sin 3\theta - 7\cos 2\theta + \sin\theta + 1 = 0$

31. $\cos\theta - \sin 2\theta + \cos 3\theta - \sin 4\theta = 0$

32. (i) $\sin x = \cos 2x$ இன் தீர்வை, $0 < x < 2\pi$ இல் தருக.

(ii) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$ இன் தீர்வை, $0 < x < 360^\circ$ இல் தருக.

(iii) $\sin\theta + \cos\theta + \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = 0$ இன் தீர்வை, $-180^\circ < x < 180^\circ$ இல் தருக.

33. $4\sin^3\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

34. $4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

35. $\sin\theta + \cos\theta = \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$

36. (i) $\tan A = \dfrac{2\tan A/2}{1 - \tan^2 A/2}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + 1 = 4\cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 3\theta$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $4\cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 3\theta - 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(iii) $\tan^2\theta + 2\cos 2\theta - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

4(b)

1. $\sin A = \cos(B + C)$ எனின், A ஐ, B, C இன் உறுப்புகளில் காண்க.

2. $\sin A = -\cos(B + C)$ எனின், A ஐ B, C இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

3. $\cos 3\theta = \cos 3\alpha$ எனின், θ ஐ α இல் தருக. $\cos\theta$ இன் இயல்தகு பெறுமானங்கள் எவை?

learnium.org

4. $sin3\theta = sin3\alpha$ எனின், θ ஐ α இல் தருக. $sin\theta$ இன் இயல்தகு பெறுமானங்களை காண்க.

5. பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

$(cos\theta + sin\theta)(1 - 2sin2\theta) = 2(cos\,3\theta - sin3\theta)$

6. $tan5\theta - tan\theta = 1 + tan5\theta \cdot tan\theta$ இன் பொதுத்தீர்வை எழுதுக.

7. $sin4\theta = \dfrac{4tan\theta\left(1 - tan^2\theta\right)}{\left(1 + tan^2\theta\right)^2}$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $t^4 + 8t^3 + 2t^2 - 8t + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

$tan\dfrac{\pi}{24} \cdot tan\dfrac{5\pi}{24} \cdot tan\dfrac{7\pi}{24}\ tan\dfrac{11\pi}{24} = 1$ என உய்த்தறிக.

8. (a) (i) $\dfrac{sin\alpha + sin\beta}{cos\,\alpha - cos\,\beta} = cot\left(\dfrac{\beta - \alpha}{2}\right)$ என நிறுவுக.

(ii) $\dfrac{sin(\alpha + \beta)}{sin(\alpha - \beta)} = \dfrac{3}{2}$ எனின், $tan\alpha = 5tan\beta$ என நிறுவுக.

(b) $cosec\theta + cot\theta = cot\dfrac{1}{2}\theta$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து,

(i) $cot\dfrac{\pi}{8}, cot\dfrac{\pi}{12}$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $cosec\theta + cosec2\theta + cosec4\theta$ இனை இரு கோதான்களின் வித்தியாசமாகத் தருக.

(iii) $cosec\dfrac{4\pi}{15} + cosec\dfrac{8\pi}{15} + cosec\dfrac{16\pi}{15} + cosec\dfrac{32\pi}{15} = 0$ என நிறுவுக.

9. (i) $tan\theta = sec\,2\alpha\ cot\,\phi$ எனின், $\dfrac{cos(\theta + \phi)}{cos(\theta - \phi)} = -tan^2\alpha$ என நிறுவுக.

(ii) $cos\,A + 3sin\,B = 2$ ஆகும் வண்ணம் A, B என்பன இரு நேரான கூர்ங்கோணங்களாகும். $r = sin\,A + 3cos\,B$ எனின், r இன் மிகப் பெரிய பெறுமானம் $2\sqrt{3}$ எனவும், $A = 2B = \dfrac{\pi}{3}$ எனவும் நிறுவுக.

10. $sin\,2x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$, $cos2x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ எனவும் நிறுவுக.

இங்கு $t = tan\,x$ ஆகும்.

$sin\theta + sin\phi = a$

$cos\theta + cos\phi = b$ ஆகவும் இருப்பின் $cos(\theta + \phi), cos(\theta - \phi)$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களை a, b இல் காண்க.

$tan\theta + tan\phi = \dfrac{8ab}{\left(a^2 + b^2\right)^2 - 4a^2}$ எனவும் நிறுவுக.

11. (a) $f(\theta) = cos\,k\theta$ எனும் சார்பின் ஆவர்த்தனம் யாது?

$k = 2, k = \dfrac{1}{2}$ ஆகும் போது வரைபுகளை வரைக. ஒவ்வொரு வகையிலும் $f(\theta) = 0$, $f(\theta) = 1$, $f(\theta) = -1$ ஆகும் போது பொதுத் தீர்வுகளை எழுதுக.

(b) $0 \le x \le 180°$ இல் தீர்வுகளை எழுதுக.

(i) $cos(x + 30°) = cos(60° - 3x)$

(ii) $sin(x + 20°) = cos3x$

12. (i) கூர்ங்கோணம் A, $sin\,A = \dfrac{3}{5}$ ஆகவும், விரிகோணம் B, $sin\,B = \dfrac{5}{13}$ ஆகவும் இருப்பின் $cos(A + B), tan(A - B)$ என்பவற்றைக் காண்க.

(ii) $sin^2\dfrac{\pi}{8} - cos^4\dfrac{3\pi}{8}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) தீர்க்க : $0 < \theta < 2\pi$ இல் $tan\theta + 3cot\theta = 5sec\theta$

learnium.org

13. தீர்க்க :(i) $2\sin\theta + \cos 2\theta = 1, \quad 0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

(ii) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1, \quad 0 \le \theta^\circ \le 360^\circ$

(iii) $\cos 3x + \cos x = \sin 2x$

14. (i) $\sin 2\theta = \sin\frac{\pi}{6}$ எனின் $O \le \theta \le 2\pi$ இல் தீர்வைக் காண்க.

(ii) x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,

$(2\cos x + 3\sin x)^2 \le 13$ எனக் காட்டுக.

(iii) $O < \theta < 2\pi$ இல், $\sin\theta + \sin 3\theta = \cos\theta + \cos 3\theta$ இன் தீர்வைக் காண்க.

15. (i) $\sin(\theta - \alpha) = k\sin(\theta + \alpha)$ எனின், $\tan\theta$ ஐ $k, \tan\alpha$ இல் காண்க.

$K = \frac{1}{2}, \alpha = 150^\circ$ ஆக, 0° இற்கும் 360° இற்குமிடையில் θ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $(\sin 2\theta - \sin\theta)(1 + 2\cos\theta) = = \sin 3\theta$ என நிறுவுக.

(iii) தீர்க்க. $7\tan 2\theta + 4\sin\theta = 0$

16. (i) $\cos 3\theta - \sin 3\theta = \sqrt{2}\cdot\sin(45^\circ - 3\theta)$ எனநிறுவி,

$\cos\theta - \sin 3\theta = \sqrt{2}$ ஐத் தீர்க்க.

(ii) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ = \frac{3}{2}$ என நிறுவுக.

17. (i) $\sec x + \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ என நிறுவுக. $\sec x - \tan x$ இற்கு இதையொத்த கோவையைப் பெறுக. இதிலிருந்து,

$\tan\frac{7\pi}{12}, \quad \tan\frac{\pi}{12}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $\cos 3\theta - \sin 3\theta = (\cos\theta + \sin\theta)(1 - 4\sin\theta - \cos\theta)$ என நிறுவுக.

(iii) $\sec A = \cos B + \sin B$ எனின்,

(a) $\tan^2 A = \sin 2B$ (ii) $\cos 2A = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - B\right)$ எனக் காட்டுக.

18. (i) $\sec 2x, \tan 2x$ என்பவற்றை $\tan x$ இல் எழுதுக. இதிலிருந்து $2\tan x + \sec 2x = 2\tan 2x$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(ii) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta$ ஐ $R\sin(\theta - \alpha)$ எனும் வடிவில் எழுதுக. $R > 0$ ஆகும்.

$4\sin\theta\cdot\cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta$ ஐ $0^\circ < \theta < 180^\circ$ எனும் வீச்சில் தீர்க்க.

19. (a) தீர்க்க. $\sin 2x + \sin 3x + \sin 5x = 0$.

(b) $t = \tan\theta/2$ எனின், $\sin\theta, \cos\theta$ என்பவற்றை t இல் எழுதுக.

$\frac{1 + \sin\theta}{5 + 4\cos\theta} = \frac{(1+t)^2}{9 + t^2}$ எனக்காட்டுக. θ இன் எல்லாப் பெறுமானங்கட்கும், $0 \le \frac{1 + \sin\theta}{5 + 4\cos\theta} \le \frac{10}{9}$ என உய்த்தறிக.

20. (i) $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$ எனக்காட்டுக.

(ii) $\sin x + \sin 5x = \sin 3x$ ஐ $0^\circ \le x \le 180^\circ$ எனும் வீச்சில் தீர்க்க.

(iii) $t = \tan\theta$ எனின், $\tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து

$\tan\frac{1}{12}\pi = 2 - \sqrt{3}$ எனக்காட்டுக. θ என்பது 0 இற்கும் π இற்குமிடையில் இருப்பின் θ இன் எப்பெறுமானத்திற்கு $\tan\theta = 2 + \sqrt{3}$ ஆகும்.

learnium.org

21. (i) $\cos x + \cos y = 1$

$\sec x + \sec y = 4$ எனும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை

$0° < x < 180°$, $0 < y < 180°$ இல் காண்க.

(ii) தீர்க்க (a) $\cos 2x - \sin 2x = 1$

(b) $\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}\cos 4x$

22. (i) $\cos 5x = \cos$ இன் தீர்வை $-180° < x < 180°$ இல் காண்க.

(ii) $4\sin\theta = \sec\theta$ இன் பொதுத் தீர்வை எழுதுக.

(iii) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$ எனின், θ ஆனது $\frac{\pi}{2}$ இன்

மடங்கு அல்லது $\frac{2\pi}{5}$ இன் மடங்கு என நிறுவுக.

23. தீர்க்க. (i) $2\sin 2x = \tan x$

(ii) $10\sin\frac{\pi x}{3} + 24\cos\frac{\pi x}{3} = 13$

(iii) $2\cos\theta \cdot \cos 2\theta + \sin 2\theta = 2\left(3\cos^3\theta - \cos\theta\right)$ இன்

தீர்வை $0 < \theta < 2\pi$ இல் தருக.

24. தீர்க்க (i) $2\sin\theta = \sqrt{3}\tan\theta$

(ii) $3\cos^2\theta + 5\sin\theta - 1 = 0$; $0° \le \theta \le 360°$

(iii) $\cos 2x + \sin x = 0$; $0 \le \theta \le 360°$

(iv) $\sin x - \sin 2x + \sin 3x = 0$; $0° \le \theta \le 360°$

25. (a) $x = 2\sin\left(nt + \frac{\pi}{3}\right)$ உம், $y = 4\sin\left(nt + \frac{\pi}{6}\right)$ எனவும்

தரப்படின் x, y என்பவற்றை $\sin n\,t, \cos n\,t$ என்பவற்றின்

உறுப்புக்களில் காண்க. t மாறும் போது (x, y) இன் ஒழுக்கின்

சமன்பாட்டை $(x, y$ இல்$)$ காண்க.

(b) $A = 36°$ எனின், $\sin 3A = \sin 2A$ எனக் காட்டுக.

$\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ என உய்த்தறிக.

(c) $A + B = \frac{\pi}{4}$, $\tan A = \frac{n}{n+1}$ எனின், $\tan B$, $\tan(A - B)$

என்பவற்றைக் காண்க.

26. (a) $\sin 4x = \cos x$ இன் தீர்வை $0° \le x \le 180°$ இல் காண்க.

(b) $2\sin 2x + \cos 2x = k$ எனின்,

$(1 + k)\tan^2 x - 4\tan x - 1 + k = 0$ எனக் காட்டுக.

$\tan x_1$, $\tan x_2$ என்பன இச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனின்,

$\tan(x_1 + x_2) = 2$ எனக்காட்டுக.

(c) $2x + y = \frac{\pi}{4}$ எனின், $\tan y = \frac{1 - 2\tan x - \tan^2 x}{1 + 2\tan x - \tan^2 x}$ எனக் காட்டுக.

$t^2 + 2t - 1 = 0$ இன் ஒரு மூல ம் $\tan\frac{\pi}{8}$ எனவும், அதன்

பெறுமானம் $\sqrt{2} - 1$ எனவும் உய்த்தறிக.

27. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x + y}{1 - xy}$ என நிறுவுக. இம் முடிபினை

உபயோகித்து $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ எனின்,

$xy + yz + zx = 1$ எனக் காட்டுக.

28. $\tan^{-1}\frac{1}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{3} = \sin^{-1} x$ எனின், x ஐக் காண்க.

29. தீர்க்க, $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1} x$

learnium.org

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க

30. $\sin 2\theta - \cos 2\theta - \sin\theta + \cos\theta = O$

31. $\sin(3\theta + \alpha) + \sin(3\theta - \alpha) + \sin(\alpha - \theta) - \sin(\alpha + \theta) = \cos\alpha$

32. $\cos(3\theta + \alpha) \cdot \cos(3\theta - \alpha) + \cos(5\theta + \alpha)\cos(5\theta - \alpha) = \cos 2\alpha$

33. $\cos n\theta = \cos(n-2)\theta + \sin\theta$

34. $\sin^2 n\theta - \sin^2(n-1)\theta = \sin^2\theta$

35. $(2+\sqrt{3})\cos\theta = 1 - \sin\theta$

36. $4\cot 2\theta = \cot^2\theta - \tan^2\theta$

37. $3\tan\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right)$

38. $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = O$

39. $\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta \cdot \tan 2\theta = \sqrt{3}$

40. $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$

41. $\cos(2A + 3B) = \frac{1}{2}$, $\cos(3A + 2B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

42. $\tan(\pi\cot\theta) = \cot(\pi\tan\theta)$

43. $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$ எனின்,

$\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ என நிறுவுக.

44. $\sin(\pi\cot\theta) = \cos(\pi\tan\theta)$ எனின், n என்பது ஒரு நிறையெண்ணாக இருக்க $\operatorname{cosec} 2\theta$ அல்லது $\cot 2\theta$ ஆனது, $n + \frac{1}{4}$ இற்குச் சமம் எனக் காட்டுக.

4C

1. பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

(i) $\cos x + \cos 7x = \cos 4x$

(ii) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

(iii) $6\tan 2\theta - 3\tan\theta - 5\cot\theta = 0$

2. **(i)** $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{3}$ எனில்,

$x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{4}$ என நிறுவுக.

(ii) $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{1}(2)$ ஐத் தீர்க்க.

(iii) α என்பது ஓர் ஒருமையாகவும் θ என்பது ஒரு ஒருமையான கூர்ங்கோணமாயிருக்க,

$f(x) = \cos^2 x - 2\sin x\cos x - \sin^2 x$, $O \le x \le 2\pi$

எனில், $f(x)$ ஐ $a\cos(2x + \theta)$ எனும் வடிவில் எடுத்துரைக்க.

இதிலிருந்து, **(i)** $f(x) = 0$ ஆக

(ii) $f(x) = 1$ ஆக x இன் தீர்வுகளைக் காண்க.

3. **(i)** $\cos n\theta = 2\cos\theta \cdot \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\cos 4\theta$ வை, $\cos\theta$ வில் எடுத்துரைக்க.

(ii) $\cot\alpha\cot\beta = k$ எனில்,

$(k+1)\cos(\alpha+\beta) = (k-1)\cos(\alpha-\beta)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\cot\theta\cot\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3}$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

4. **(i)** α என்பது 2π இன் ஒரு மடங்கன்று எனவும்,

$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin\alpha}$ எனவும் கொண்டு $\tan\beta = \tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

learnium.org

இதிலிருந்து $tan^{-1}(x) = 2\,tan^{-1}\left(cosec\,tan^{-1}x - tan\,cot^{-1}x\right)$ என நிறுவுக.

(ii) $7sin\theta + cos\theta = 5$ என்னும் சமன்பாட்டை

(a) $Rsin(\theta+\alpha)$ என எழுதுவதன் மூலம் R, α ஒருமைகள்

(b) $t = tan\frac{\theta}{2}$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் தீர்க்க.

5. (a) தீர்க்க.

(i) $\sqrt{3}\,cos x - sin x = \sqrt{2}$

(ii) $cos x + \sqrt{3}\,sin x = 2$

(iii) $cos 7x - \sqrt{3}\,cos 3x + cos x = 0$

(b) $\theta_1 = tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right), \theta_2 = tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right), \theta_3 = tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$

எனின், $O < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < \frac{3\pi}{4}$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{4}$ எனக் காட்டுக.

6. (i) $2\,tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.

(ii) $sin\theta + sin 3\theta = sin 2\theta$ என்னும் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

(iii) $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ எனின், $3sin 2\theta + 2sin^2\theta = 2$ என்னும் சமன்பாட்டின் சில தீர்வுகள் α ஐச் சார்ந்தன எனவும், வேறு சில தீர்வுகள் α வைச் சாராதவை எனவும் காட்டுக.

7. (i) $2cos x = \sqrt{3}\,cot x$ எனும் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

α என்பது ஒரு கூர்ங்கோணமாயிருக்க $4cos x - 3sin x$ என்பதை $a\,cos(x+\alpha)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு முறையாலோ

(a) $4cos x - 3sin x = 3$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து O இற்கும் 2π இற்குமிடையே இருக்கும் எல்லாத் தீர்வுகளையும் தருக.

(b) $\frac{1}{4sin x - 3cos x + 6}$ என்பதன் மிக உயர்ந்த பெறுமானத்தையும் மிகக் குறைந்த பெறுமானத்தையும் காண்க.

8. $cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ஆகவும், $sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$ இருக்க

$\sqrt{6}\,cos(x-\alpha) - tan x = \sqrt{2}$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்கும் x இன் பெறுமானங்களை O இற்கும் 2π இற்குமிடையில் காண்க.

$O, 2\pi$ இற்கிடையிலுள்ள x இன் பெறுமானங்களுக்கு $\sqrt{6}\,cos(x-\alpha)$, $\sqrt{2} + tan x$ என்பவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து $tan x - \sqrt{6}\,cos(x-\alpha) + \sqrt{2} > 0$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமான ஆயிடைகளை O இலிருந்து 2π வரையிலான ஆட்சியினுள் காண்க.

9. (i) $tan(A-2B) = cot(2A-B)$ உம்

$tan(A+2B) = cot(2A+B)$ உம் எனின்,

A, B ஆகிய இரண்டும் $\frac{\pi}{6}$ ஆரையின் மடங்குகள் என்பதையும் A ஆனது ஓர் ஒற்றை மடங்காயின் B ஆனது ஓர் இரட்டை மடங்காகும் என்பதையும் காட்டுக.

(ii) u, v என்பன $12cos x + 5sin x = 1$ என்னும் சமன்பாட்டின் இரு தீர்வுகளாகும். u, v ஆகியன 2π ஆரையனின் ஒருமடங்கினால் வேறுபடாவெனின் $cos u + cos v = \frac{24}{169}$ எனக் காட்டுக.

learnium.org

10. (i) $\sec\theta + \tan\theta = u$ எனின் $\sin\theta$ ஒரேயொரு பெறுமானத்தையே கொண்டிருக்குமெனக்காட்டி இப் பெறுமானத்தைத் துணிக.

(ii) $\cos x + \cos y + \cos z = \frac{3}{2}$,

$\tan x = \tan y = \tan z$ எனின்,

x, y, z என்பவற்றிற்கு O இற்கும் 2π இற்குமிடையிலான இரண்டு தொடைப் பெறுமானங்கள் இருப்பது சாத்தியமெனக் காட்டி, பொதுத் தீர்வைக் காண்க

11. $c^2 \leq a^2 + b^2$ எனின், $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

θ_1, θ_2 என்பன O இற்கும் 2π இற்குமிடையிலான இரண்டு தீர்வுகள் எனின்,

$\tan\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right), \cos(\theta_1 - \theta_2)$ என்பவற்றைக் காண்க.

12. (i) θ இன் பெறுமானம் எதுவாக இருந்தாலும் $\cos\phi = -\frac{1}{2}$ எனின்

$\cos\theta + \cos(\theta + \phi) + \cos(\theta + 2\phi)$ இன் பெறுமானம் பூச்சியம் எனக் காட்டுக.

(ii) $\cot\theta - (7 + 4\sqrt{3})\cot(\theta + \alpha) = 0$ எனின்,

$\sqrt{3}\sin(2\theta + \alpha) = 2\sin\alpha$ ஆகுமெனக் காட்டுக θ இற்கு ஒருதீர்வு பெறக்கூடியவாறு $\sin\alpha$ இன் வீச்சைக் குறிப்பிடுக. இதிலிருந்து

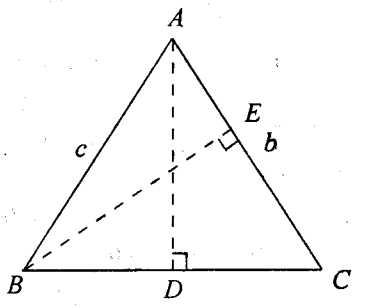
$\cot\theta - (7 + 4\sqrt{3})\cot\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ஐத் திருப்தியாக்கும் θ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

5. முக்கோணியின் பக்கங்களும், கோணங்களும்

யாதும் ஒரு முக்கோணி ABC இல் கோணம் A யிற்கு எதிரான பக்கம் BC ஆனது a யினாலும், கோணம் B யிற்கு எதிரான பக்கம் CA ஆனது b யினாலும், கோணம் C யிற்கு எதிரான பக்கம் AB ஆனது c யினாலும் குறிக்கப்படும்.

1. யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC இல்

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ஆகும்.



(i) ΔABC இல் AD, BC யிற்கு செங்குத்தாக வரையப்பட்டுள்ளது.

$AD = AB\sin B$

$AD = AC\sin C$

$AB\sin B = AC\sin C$

$c\sin B = b\sin C$

இருபக்கமும் $\sin B\ \sin C$ ஆல் பிரிக்க,

$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$

இவ்வாறே AC யிற்கு செங்குத்தாக BE ஐ வரைவதன் மூலம்

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ என நிறுவலாம்.

(ii) கோணம் B செங்கோணமாக இருக்கும் போது,

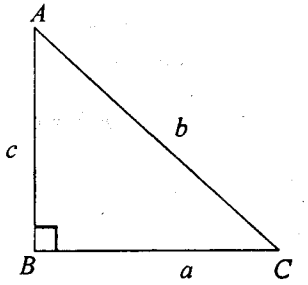
$AB = AC\sin C$

$c = b\sin C$

$c\sin\frac{\pi}{2} = b\sin C$

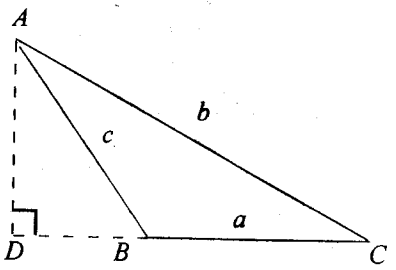
$c\sin B = b\sin C$

எனவே $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$



learnium.org

(iii) கோணம் B விரிகோணமாக இருக்கும் போது,



$$AD = b\sin C$$

$$AD = c\sin(\pi - B) = c\sin B$$

$$b\sin C = c\sin B$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

எனவே யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC இல்,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ஆகும்.

2. யாதாயினும் ஒரு முக்கோணியின் ஒரு கோணத்தின் கோசைனை பக்கங்கள் சார்பாகக் காணல்

$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ ஆகும்.

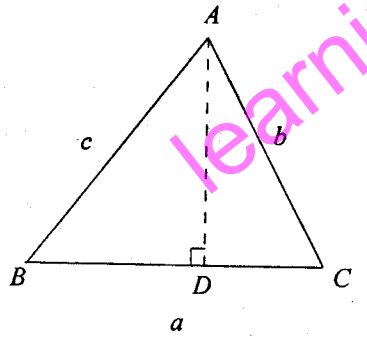
$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$b^2 = (c\sin B)^2 + (a - c\cos B)^2$$

$$b^2 = c^2\sin^2 B + a^2 - 2ac\cos B + c^2\cos^2 B$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$$

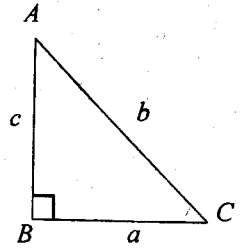
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$



கோணம் B செங்கோணமெனின்,

$b^2 = a^2 + c^2$; $\cos B = \cos\frac{\pi}{2} = O$

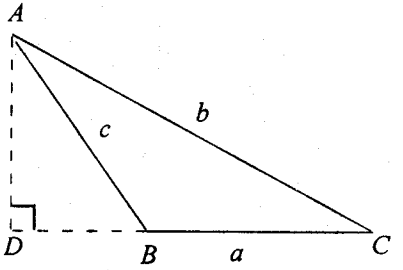
$c^2 + a^2 - b^2 = O$



$$c^2 + a^2 - b^2 = O$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

கோணம் B, விரிகோணமெனின்,



$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$b^2 = \left[c\sin(\pi - B)\right]^2 + \left[a + c\cos(\pi - B)\right]^2$$

$$= c^2\sin^2 B + (a - c\cos B)^2$$

$$= c^2\sin^2 B + a^2 - 2ac\cos B + c^2\cos^2 B$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

ஆகவே, யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC இல்,

$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ ஆகும்.

இவ்வாறே,

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ab}$

உதாரணம் 1

யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC இல் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$

(ii) $a(\cos B + \cos C) = 2(b + c)\sin^2\frac{A}{2}$

learnium.org

(i) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{C}{\sin C}$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b-c}{\sin B - \sin C}$$

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin A}$$

$$\frac{b-c}{a} = \frac{2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}}$$

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}}$$

$$\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2} = \sin\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

(ii) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}} = \frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$\frac{a}{\sin A/2} = \frac{b+c}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$(b+c)\sin\frac{A}{2} = a\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$2(b+c)\sin^2\frac{A}{2} = a\left[2\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \cdot \sin\frac{A}{2}\right]$$

$$= a\left[2\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\right]$$

$$= a\left[\cos B + \cos C\right]$$

உதாரணம் 2

யாதாயினும் ஒரு முக்கோணியில் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $(b+c-a)\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = 2a\cot\frac{A}{2}$

(ii) $a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$

(iii) $c^2 = (a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$

(i) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c-a}{\sin B + \sin C - \sin A}$$

$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}} = \frac{b+c-a}{2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) - 2\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}}$$

$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}} = \frac{b+c-a}{2\cos\frac{A}{2}\left[\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) - \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\right]}$$

learnium.org

$$\frac{2a\cdot\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{2(b+c-a)\cdot\cos\frac{A}{2}}{\cdot\left[\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)-\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\right]}$$

$$2a\cot\frac{A}{2} = 2(b+c-a)\frac{\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)}{2\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}$$

$$2a\cot\frac{A}{2} = (b+c+a)\frac{\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}$$

$$= (b+c-a)\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

(ii) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$ ----------(1)

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\ \cos B$ ----------(2)

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C$ ----------(3)

$(1)+(2)+(3) \Rightarrow$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$$

(iii) $(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$

$= \left(a^2 - 2ab + b^2\right)\cos^2\frac{C}{2} + \left(a^2 + 2ab + b^2\right)\sin^2\frac{C}{2}$

$= \left(a^2+b^2\right)\left(\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right) - 2ab\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$= c^2$

உதாரணம் 3

$A + B + C = 180°$ எனின், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$

(ii) $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(iii) $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2\sin A\cdot\sin B\cdot\cos C$

(i) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$

$= 2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1$

$= -1 - 2\cos C\cdot\cos(A-B) + 2\cos^2 C$

$= -1 - 2\cos C\left[\cos(A-B) - \cos C\right]$

$= -1 - 2\cos C\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$

$= -1 - 2\cos C\left[2\cos A\cdot\cos B\right]$

$= -1 - 4\cos A\cos B\cdot\cos C$

(ii) $\sin A + \sin B - \sin C$

$= 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - 2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - 2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cdot\left[2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\right]$

$= 4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$

learnium.org

(iii) $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C$

$= \frac{\cos 2A + 1}{2} + \frac{\cos 2B + 1}{2} - \cos^2 C$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C$

$= 1 + \cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2 C$

$= 1 - \cos C \cos(A - B) - \cos^2 C$

$= 1 - \cos C\left[\cos(A - B) - \cos(A + B)\right]$

$= 1 - \cos C\left[2 \sin A \sin B\right]$

$= 1 - 2 \sin A \sin B \cdot \cos C$

உதாரணம் 4

$A + B + C = \pi$ எனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \frac{C}{2}$

(ii) $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} - 1 = 4 \sin \frac{\pi - A}{4} \cdot \sin \frac{\pi - B}{4} \sin \frac{\pi - C}{4}$

(i) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos A) + \frac{1}{2}(1 - \cos B) + \sin^2 C/2$

$= 1 - \frac{1}{2}(\cos A + \cos B) + \sin^2 \frac{C}{2}$

$= 1 - \frac{1}{2} \times 2 \cos\left(\frac{A + B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A - B}{2}\right) + \sin^2 \frac{C}{2}$

$= 1 - \sin \frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A - B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A + B}{2}\right)\right]$

$= 1 - \sin \frac{C}{2} \cdot \left[2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}\right]$

$= 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$

(ii) $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} - 1$

$= 2 \sin\left(\frac{A+B}{4}\right) \cos\left(\frac{A-B}{4}\right) + 1 - 2 \sin^2\left(\frac{A+B}{4}\right) - 1$

$= 2 \sin\left(\frac{A+B}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{4}\right) - \sin\left(\frac{A+B}{4}\right)\right]$

$= 2 \sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{4}\right) - \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{A+B}{4}\right)\right]\right]$

$= 2 \sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right)\left[2 \sin\left(\frac{\pi - A}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi - B}{4}\right)\right]$

$= 4 \sin\left(\frac{\pi - A}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi - B}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$

உதாரணம் 5

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ எனின்,

(i) $A + B + C$ என்பது π இன் நிறையெண் மடங்கு எனவும்,

(ii) $\tan rA + \tan rB + \tan rC = \tan rA \cdot \tan rB \cdot \tan rC$

எனவும் நிறுவுக. (r - நிறையெண்)

$x + y + z = xyz$ எனின்,

(a) $\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$

(b) $x(1 - y^2)(1 - z^2) + y(1 - z^2)(1 - x^2) + z(1 - x^2)(1 - y^2) = 8xyz$

என உய்த்தறிக.

learnium.org

(i) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

$$\tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A \cdot \tan B)$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = -\tan C$$

$$\tan(A + B) = \tan(\pi - C)$$

$$A + B = n\pi + (\pi - C)$$

$$\underline{A + B + C = (n+1)\pi = k\pi} \quad (k \text{ - நிறையெண்})$$

$$rA + rB + rC = m\pi \quad (m \text{- நிறையெண்})$$

$$rA + rB = m\pi - rC$$

$$\tan(rA + rB) = \tan(m\pi - rC) = -\tan rC$$

$$\frac{\tan rA + \tan rB}{1 - \tan rA \cdot \tan rB} = -\tan rC$$

$$\tan rA + \tan rB + \tan rC = \tan rA \cdot \tan rB \cdot \tan rC$$

$$x + y + z = xyz$$

$x = \tan A,\ y = \tan B,\ z = \tan C$ என்க.

இப்பொழுது $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

எனவே, மேலே பெறப்பட்ட முடிவிலிருந்து, $r = 3$ எனின்,

(a) $\tan 3A + \tan 3B + \tan 3C = \tan 3A \cdot \tan 3B \cdot \tan 3C$

ஆகவே,

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$$ ஆகும்.

(b) $r = 2$ எனின்,

$$\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \cdot \tan 2B \cdot \tan 2C$$

$$\frac{2x}{1 - x^2} + \frac{2y}{1 - y^2} + \frac{2z}{1 - z^2} = \frac{2x \cdot 2y \cdot 2z}{(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)}$$

$$\frac{x}{1 - x^2} + \frac{y}{1 - y^2} + \frac{z}{1 - z^2} = \frac{4xyz}{(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)}$$

$$x(1 - y^2)(1 - z^2) + y(1 - x^2)(1 - z^2) + z(1 - x^2)(1 - y^2) = 4xyz$$

உதாரணம் 6

$A + B + C = 180^\circ$ எனின்,

$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து,

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = 4\cos\left(\frac{\pi - A}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi - B}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$$

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

என்பவற்றை உய்த்தறிக.

$$\sin A + \sin B + \sin C$$

$$= 2\sin\left(\frac{A + B}{2}\right)\cos\left(\frac{A - B}{2}\right) + 2\sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A - B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A + B}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2}\right]$$

$$= 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \quad \text{---------- (1)}$$

$A \to 90 - \frac{A}{2},\ B \to 90 - \frac{B}{2},\ C \to 90 - \frac{C}{2}$ எனப் பிரதியிட

learnium.org

(1) $\Rightarrow \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = 4\cos\left(\frac{\pi - A}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi - B}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$

$A \to 180^\circ - 2A,\ B \to 180^\circ - 2B,\ C \to 180^\circ - 2C$

என (1) இல் பிரதியிட

(1) $\Rightarrow \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ ஆகும்.

குறிப்பு: $A + B + C = 180^\circ$ ஆகுமாறுள்ள A, B, C இற்கு பெறப்படும் முடிபுகளில் A, B, C என்பவற்றிற்கு முறையே

(i) $90^\circ - \frac{A}{2},\ 90^\circ - \frac{B}{2},\ 90^\circ - \frac{C}{2}$ என்பவற்றையோ

(ii) $180^\circ - 2A,\ 180^\circ - 2B,\ 180^\circ - 2C$ என்பவற்றையோ பிரதியிடலாம். ஏனெனில்,

$\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = 180^\circ$

$\left(180^\circ - 2A\right) + \left(180^\circ - 2B\right) + \left(180^\circ - 2C\right) = 180^\circ$ ஆகும்.

பயிற்சி 5(a)

யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC இல் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

2. $a\cos\frac{B-C}{2} = (b+c)\sin\frac{A}{2}$

3. $(a+b+c)\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right) = 2c\cdot\cot\frac{C}{2}$

4. $a\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) = (b-c)\cos\frac{A}{2}$

5. $a(\cos C - \cos B) = 2(b-c)\cos^2\frac{A}{2}$

6. $\frac{a+b}{a-b} = \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)\cot\left(\frac{A-B}{2}\right)$

7. $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right) = (b+c)\sin\frac{A}{2}$

8. $(b+c-a)\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = 2a\cot\frac{A}{2}$

9. $b^2\sin 2C + c^2\sin 2B = 2bc\cdot\sin A$

10. $a(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$

11. $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$

12. $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2-c^2}{a^2}$

13. $\left(a^2 - b^2 + c^2\right)\tan B = \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\tan C$

14. $a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + C\sin(A-B) = 0$

15. a,b,c என்பன கூட்டல் விருத்தியில் அமைந்திருப்பின்

$\cot\frac{A}{2},\ \cot\frac{B}{2},\ \cot\frac{C}{2}$ என்பனவும் கூட்டல் விருத்தியில் அமைந்திருக்கும் எனக்காட்டுக.

16. a^2, b^2, c^2 என்பன கூட்டல் விருத்தியில் அமைந்திருப்பின் $\cot A, \cot B, \cot C$ என்பனவும் கூட்டல் விருத்தியில் அமைந்திருக்கும் எனக்காட்டுக.

learnium.org

5(b)

$A + B + C = 180^{\circ}$ எனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

2. $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \cos A \cos B \sin C$

3. $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4 \sin A \sin B \cos C$

4. $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

5. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

6. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

7. $\cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

8. $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$

9. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$

10. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$

11. $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

12. $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$

13. $\cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}$

14. $\cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A + \cot A \cdot \cot B = 1$

15. $\sin(B+2C) + \sin(C+2A) + \sin(A+2B)$

$$= 4 \sin \frac{B-C}{2} \cdot \sin \frac{C-A}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

16. $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{\pi + A}{4} \cos \frac{\pi + B}{4} \cos \frac{\pi - C}{4}$

மேலதிக உதாரணங்கள்

உதாரணம் 1

(i) $\tan 3\theta = 1$ எனின், $\tan \theta$ என்பது $t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் எனக்காட்டுக.
இச்சமன்பாட்டைத் தீர்த்து, இம்மூன்று மூலகங்களுக்கும் ஒத்த θ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $\cos x + \cos y = \frac{1}{3}$

$\sin x + \sin y = \frac{1}{4}$ எனின், $\tan \frac{1}{2}(x+y) = \frac{3}{4}$ எனக்காட்டுக.

இச்சமன்பாடுகளைத் திருப்தி செய்யும் x, y இன் எல்லா இயல்தகு பெறுமானங்களையும் காண்க.

(1982)

$$\tan 3\theta = \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}$$

$$= \frac{3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta}{4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta (3 - 4 \sin^2 \theta)}{\cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3)}$$

$$= \frac{\tan \theta \left[3 \sec^2 \theta - 4 \tan^2 \theta\right]}{\left[4 - 3 \sec^2 \theta\right]}$$

$$= \frac{\tan \theta (3 - \tan^2 \theta)}{1 - 3 \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$$

learnium.org

$\tan 3\theta = 1$ எனின்,

$$\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} = 1 \qquad (\tan\theta = t \text{ என்க.})$$

$$t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$(t+1)\left(t^2 - 4t + 1\right) = 0$$

$t + 1 = 0$ அல்லது $t^2 - 4t + 1 = 0$

$t = -1$ அல்லது $t = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$

$t = -1$ அல்லது $t = 2 \pm \sqrt{3}$

$t = -1,\ 2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}$ ஆகும்.

$$\tan 3\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$3\theta = n\pi + \frac{\pi}{4} \ ; \ n \in Z$$

$$\theta = \frac{1}{3}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

0 இற்கும் 2π இற்குமிடையில் தீர்வுகள்

$$\theta = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{21\pi}{12}\right\}$$

$$= \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

$$\tan\frac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12}$$

$$\tan\frac{17\pi}{12} = \tan\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = \tan\frac{5\pi}{12}$$

$$\tan\frac{7\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{3\pi}{12}\right) = \tan\frac{3\pi}{12}$$

$$0 < \tan\frac{\pi}{12} < 1 \qquad \tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12} = \tan\frac{17\pi}{12} \ ; \qquad \tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\tan\frac{3\pi}{4} = \tan\frac{7\pi}{4} \ ; \quad \underline{\tan\frac{3\pi}{4} = -1}$$

(ii) $\cos x + \cos y = \frac{1}{3}$

$$\sin x + \sin y = \frac{1}{4}$$

$$2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{3} \text{ ---------- (1)}$$

$$2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{4} \text{ ---------- (2)}$$

(2) ÷ (1) $\quad \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{3}{4}$

$$\frac{x+y}{2} = n\pi + \alpha \quad \left(\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4}\right) \text{ ---------- (3)}$$

$2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{3}$ என்பதில்,

$$2\cos(n\pi + \alpha) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$2(-1)^n \cos\alpha \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = (-1)^n \cdot \frac{5}{24} \quad \left[\tan\alpha = \frac{3}{4}, \cos\alpha = \frac{4}{5}\right]$$

$$\frac{x-y}{2} = 2m\pi \pm \cos^{-1}\left[(-1)^n \cdot \frac{5}{24}\right] \text{ ---------- (4)}$$

learnium.org

$x + y = 2n\pi + 2\alpha$

$x - y = 4m\pi \pm \cos^{-1}\left[(-1)^n \cdot \frac{5}{24}\right]$

இரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் x, y இன் பெறுமானங்களைக் கணிக்கலாம்.

உதாரணம் 2

(i) $6\tan 2\theta - 3\tan\theta - 5\cot\theta = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(ii) $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ எனக் காட்டுக.

இங்கு $t = \tan x$

$\sin\theta + \sin\phi = a$

$\cos\theta + \cos\phi = b$ எனின்,

$\sin(\theta + \phi)$, $\cos(\theta + \phi)$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களை a, b யில் காண்க.

$\tan\theta + \tan\phi = \frac{8ab}{\left(a^2 + b^2\right)^2 - 4a^2}$ எனக் காட்டுக.

(1983)

(i) $6\tan 2\theta - 3\tan\theta - 5\cot\theta = 0$

$\frac{6 \times 2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} - 3\tan\theta - \frac{5}{\tan\theta} = 0$

$12\tan^2\theta - 3\tan^2\theta\left(1 - \tan^2\theta\right) - 5\left(1 - \tan^2\theta\right) = 0$

$3\tan^4\theta + 14\tan^2\theta - 5 = 0$

$\left(3\tan^2\theta - 1\right)\left(\tan^2\theta + 5\right) = 0$

$\tan^2\theta + 5 = 0$ அல்லது $3\tan^2\theta - 1 = 0$

$\tan^2\theta + 5 = 0$ $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

பொருத்தமற்றது $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$; $n \in Z$

(ii) $\sin\theta + \sin\phi = a$

$\cos\theta + \cos\phi = b$

$2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = a$ ----------(1)

$2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = b$ ----------(2)

$\frac{(1)}{(2)}$, $t = \tan\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) = \frac{a}{b}$ ஆகும்.

$\sin(\theta+\phi) = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{\frac{2a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$

$\cos(\theta+\phi) = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cdot\sin\phi + \sin^2\phi = a^2$ ----------(3)

$\cos^2\theta + 2\cos\theta\cdot\cos\phi + \cos^2\phi = b^2$ ----------(4)

(3) + (4) ; $2 + 2\cos(\theta-\phi) = a^2 + b^2$

$\cos(\theta-\phi) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$

$\tan\theta + \tan\phi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$

$= \frac{\sin(\theta+\phi)}{\cos\theta\cdot\cos\phi}$

$= \frac{\sin(\theta+\phi)}{\frac{1}{2}\left[\cos(\theta+\phi)+\cos(\theta-\phi)\right]}$

learnium.org

$$= \frac{2ab}{a^2+b^2} \times \frac{2}{\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} + \frac{a^2+b^2-2}{2}}$$

$$= \frac{4ab}{a^2+b^2} \times \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{2\left(b^2-a^2\right)+\left(a^2+b^2-2\right)\left(a^2+b^2\right)}$$

$$= \frac{8ab}{\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2}$$

உதாரணம் 3

x இன் எல்லா பெறுமானங்களுக்கும்

$a\cos^2 x\ 2b\sin x\cos x + c\cdot\sin^2 x$ என்னும் கோவையானது,

$\frac{a+c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2}$ என்பதற்கும்,

$\frac{a+c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2}$ என்பதற்குமிடையில் அமைகிறது என நிறுவுக.

$f(x) = 9\cos^2 x + 24\sin x\cos x + 16\sin^2 x - k = 0$ என்பதில் k இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

$9\cos^2 x + 24\sin x\cos x + 16\sin^2 x - k = 0$ என்பதன்
மிகப்பெரிய பெறுமானத்தையும், மிகச்சிறிய பெறுமானத்தையும் காண்க.

$9\cos^2 x + 24\sin x\cos x + 16\sin^2 x - \frac{25}{4} = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(1985)

$g(x) = a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cdot\sin^2 x$ என்க.

$$= \frac{a}{2}(1+\cos 2x) + b\sin 2x + \frac{c}{2}(1-\cos 2x)$$

$$= \left(\frac{a-c}{2}\right)\cos 2x + b\sin 2x + \left(\frac{a+c}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+b^2}\left[\frac{\frac{a-c}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+b^2}}\cos 2x + \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+b^2}}\sin 2x\right] + \left(\frac{a+c}{2}\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2}\ \left[\cos(2x-\alpha)\right] + \left(\frac{a-c}{2}\right)$$

$-1 \le \cos(2x+\alpha) \le 1$

$$-\frac{1}{2\sqrt{(a-c)^2+4b^2}} \le \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2}\ \cos(2x+\alpha) \le \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2}$$

ஆகவே,

$$\frac{a+c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2} \le g(x) \le \frac{a+c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2}$$ ஆகும்.

$f(x) = 9\cos^2 x + 24\sin x\cos x + 16\sin^2 x - k = 0$

$k = 9\cos^2 x + 24\sin x\cos x + 16\sin^2 x$

இங்கு $a = 9,\quad b = 12,\quad c = 16$ ஆகும்.

மேலே பெற்ற முடிபிலிருந்து,

$$\frac{a+c}{2} = \frac{9+16}{2} = \frac{25}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2} = \frac{1}{2}\times 25 = \frac{25}{2}$$

$$\frac{25}{2} - \frac{25}{2} \le k \le \frac{25}{2} + \frac{25}{2}$$

$$0 \le k \le 25$$

$9\cos^2 x + 24\sin x\cos x + 16\sin^2 x$ இன் இழிவு பெறுமானம் 0.
உயர்வுப்பெறுமானம் 25 ஆகும்.

learnium.org

$$9\cos^2 x + 24\sin x\cos x + 16\sin^2 x - \frac{25}{4} = 0$$

$$\frac{25}{2}\cos(2x-\alpha) + \frac{25}{2} - \frac{25}{4} = 0 \quad \left[\cos\alpha = -\frac{7}{25} \quad \sin\alpha\ \frac{24}{25}\right]$$

$$\frac{25}{2}\cos(2x-\alpha) = -\frac{25}{4}$$

$$\cos(2x-\alpha) = -\frac{1}{2}$$

$$2x - \alpha = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\underline{x = n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}} \quad ; \quad n \in Z$$

உதாரணம் 4

(i) $\sin x + \cos y = 1$

$\cos 2x - \cos 2y = 1$ என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(ii) $\cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{x-y}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{yz+1}{y-z}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{zx+1}{z-x}\right) = n\pi$ எனக்காட்டுக.

இங்கு n நிறையெண் ஆகும்.

(1986)

(i) $\sin x + \cos y = 1$ ---------- (1)

$\cos 2x - \cos 2y = 1$ ---------- (2)

(2) இலிருந்து, $\left(1 - 2\sin^2 x\right) - \left(2\cos^2 y - 1\right) = 1$

$$2\sin^2 x + 2\cos^2 y = 1 \quad \text{---------- (3)}$$

(1), (3) இலிருந்து,

$$2\sin^2 x + 2(1-\sin x)^2 = 1$$

$$4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$$

$$(2\sin x - 1)^2 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

(1) இலிருந்து $\cos y = \frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos y = \frac{1}{2}$

$\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $\cos y = \cos\frac{\pi}{3}$

$x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $y = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3}$

இங்கு m, n என்பன நிறையெண்களாகும்.

(ii) $\cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{x-y}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{yz+1}{y-z}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{zx+1}{z-x}\right) = n\pi$

$\cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{x-y}\right) = A$ என்க; $\qquad \tan A = \frac{x-y}{xy+1}$

$\cot^{-1}\left(\frac{yz+1}{y-z}\right) = B$ என்க; $\qquad \tan B = \frac{y-z}{yz+1}$

$\cot^{-1}\left(\frac{zx+1}{z-x}\right) = C$ என்க; $\qquad \tan C = \frac{z-x}{zx+1}$

learnium.org

இப்பொழுது $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$

$$= \frac{\frac{x-y}{xy+1} + \frac{y-z}{yz+1}}{1 - \left(\frac{x-y}{xy+1}\right)\left(\frac{y-z}{yz+1}\right)}$$

$$= \frac{(x-y)(yz+1) + (y-z)(xy+1)}{(xy+1)(yz+1) - (x-y)(y-z)}$$

$$= \frac{xyz + x - y^2z - y + xy^2 - xyz + y - z}{xy^2z + xy + yz + 1 - xy + xz + y^2 - yz}$$

$$= \frac{(x-z) + y^2(x-z)}{(1+xz) + y^2(1+xz)}$$

$$= \frac{(x-z)(1+y^2)}{(1+xz)(1+y^2)}$$

$$= \frac{x-z}{1+xz} = -\tan C = \tan(-C)$$

$\tan(A+B) = \tan(-C)$

$A + B = n\pi + (-C)$; n - நிறையெண்

$\underline{\underline{A + B + C = n\pi}}$; n - நிறையெண்

உதாரணம் 5

(i) $(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^3$ என்பதை விரிவுபடுத்தியோ அல்லது வேறு முறையிலோ $\cos^6\theta + \sin^6\theta$ என்பதை $\cos 4\theta$ இன் உறுப்புகளில் எழுதி, அதிலிருந்து $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \frac{1}{2}\sin 4\theta + \frac{5}{4}$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(ii) $\tan 2\alpha + \tan 2\beta = 0$ எனின், $\alpha + \beta$ என்பது $\frac{\pi}{2}$ இன் நிறையெண்மடங்கு என நிறுவுக.

$\tan\theta + \tan\phi + 3 = 0$

$\tan 2\theta + \tan 2\phi = 0$ என்னும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியைத் திருப்தியாக்கும், ஆனால் $0°$ இற்கும் $180°$ இற்குமிடையில் திட்டமாய் அமையும் எல்லா கோணச்சோடிகள் θ, ϕ என்பவற்றைக் காண்க.

(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{x}{2} + \tan^{-1}\frac{x}{3} = \frac{\pi}{2}$ ஐத் தீர்க்க.

(1987)

(i) $(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^3 = 1^3 = 1$

$\cos^6\theta + 3\cos^4\theta\sin^2\theta + 3\cos^2\theta\sin^4\theta + \sin^6\theta = 1$

$\cos^6\theta + \sin^6\theta = 1 - 3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= 1 - 3\cos^2\theta\sin^2\theta$

$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\theta$

$= 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4\theta)$

$= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\theta$

$\cos^6\theta + \sin^6\theta = \frac{1}{2}\sin 4\theta + \frac{5}{4}$

$\frac{3}{8}\cos 4\theta + \frac{5}{8} = \frac{1}{2}\sin 4\theta + \frac{5}{4}$

$3\cos 4\theta - 4\sin 4\theta = 5$

$\frac{3}{5}\cos 4\theta - \frac{4}{5}\sin 4\theta = 1$

$\cos(4\theta + \alpha) = 1 \quad \left[\cos\alpha = \frac{3}{5},\ \sin\alpha = \frac{4}{5}\right]$

learnium.org

$$4\theta + \alpha = 2n\pi$$

$$\theta = \frac{1}{4}\left[2n\pi - \alpha\right] \; ; n \text{ - நிறையெண்}$$

(ii) $tan2\alpha + tan2\beta = 0$

$$tan2\alpha = -tan2\beta = tan(-2\beta)$$

$$2\alpha = n\pi - 2\beta$$

$$2\alpha + 2\beta = n\pi$$

$$\alpha + \beta = n\frac{\pi}{2} \quad (n \text{ - நிறையெண்})$$

ஆகவே $(\alpha + \beta)$ ஆனது $\frac{\pi}{2}$ இன் நிறையெண் மடங்காகும்.

$$tan\theta + tan\,\phi + 3 = 0 \quad \text{---------- (1)}$$

$$tan2\theta + tan2\,\phi = 0 \quad \text{---------- (2)}$$

மேலே நிறுவியதிலிருந்து (2) $\Rightarrow$

$(\theta + \phi)$ ஆனது $\frac{\pi}{2}$ இன் நிறையெண் மடங்காகும்.

மேலும் $0 < \theta, \phi < 180$ என்பதால்

$0 < \theta + \phi < 360$ ஆகும்.

(2) இலிருந்து $\theta + \phi = n\frac{\pi}{2}$

எனவே n எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள் 1, 2, 3 ஆகும்.

$n = 1$ எனின் $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$

$tan\theta + tan\phi + 3 = 0$ என்பவற்றிலிருந்து,

$$tan\theta + tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 3 = 0$$

$$tan\theta + \frac{1}{tan\theta} + 3 = 0$$

$$tan^2\theta + 3tan\theta + 1 = 0$$

$$tan\theta = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$tan\theta = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \quad tan\theta = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

இங்கு $tan\,\theta < 0$ $\theta > 90^\circ$

$0^\circ < \theta, \phi < 180^\circ$ $\theta + \phi = 90^\circ$ என்பதால்,

θ, ϕ இற்கு தீர்வு இல்லை.

$n = 2$ எனின்,

$$\theta + \phi = \pi$$

$$tan\theta + tan\phi + 3 = 0$$

$$tan\theta + tan\,(\pi - \theta) + 3 = 0$$

$$3 = 0$$

ஆகவே $n = 2$ பொருந்தாது.

$n = 3$ எனின்,

$$\theta + \phi = \frac{3\pi}{2}$$

$$tan\theta + tan\phi + 3 = 0$$

$$tan\theta + \frac{1}{tan\theta} + 3 = 0$$

$$tan^2\theta + 3tan\theta + 1 = 0$$

$$tan\theta = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$tan\theta = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ என்க. $\theta = \theta_1 \quad \left[90 < \theta_1 < 180^\circ\right]$

எனவே $\phi_1 = 270 - \theta_1$ ஆகும்.

$tan\theta = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ என்க. $\theta = \theta_2 \quad [90 < \theta_2 < 180]$

எனவே $\phi_2 = 270 - \theta_2$ ஆகும்.

learnium.org

(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{x}{2} + \tan^{-1}\frac{x}{3} = \frac{\pi}{2}$ ----------(1)

$\tan^{-1}x = A, \quad \tan^{-1}\frac{x}{2} = B, \quad \tan^{-1}\frac{x}{3} = C$

$\tan A = x, \quad \tan B = \frac{x}{2}, \quad \tan C = \frac{x}{3}$

(1) இலிருந்து $A + B + C = \frac{\pi}{2}$

$$A + B = \frac{\pi}{2} - C$$

$$\tan(A+B) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \frac{1}{\tan C}$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{1}{\tan C}$$

$$\frac{x + \frac{x}{2}}{1 - x \cdot \frac{x}{2}} = \frac{3}{x}$$

$$\frac{\frac{3x}{2}}{\frac{2-x^2}{2}} = \frac{3}{x}$$

$$\frac{x}{2-x^2} = \frac{1}{x}$$

$$x^2 = 2 - x^2$$

$$2x^2 = 2; \qquad x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$A + B + C = \pi/2$ என்பதால், $x \neq -1$.

$\therefore x = 1$

உதாரணம் 6

(i) $a^2 + b^2 > c^2$ எனின், $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ எனும் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்குகின்ற 0 இற்கும் 2π இற்குமிடையே α, β என்னும் இரு வேறு பெறுமானங்கள் இருக்குமெனக்காட்டுக.

$\cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$ என நிறுவுக.

(ii) $x = \sin\alpha$ என்பது $4x^3 - 3x + \sin 3\alpha = 0$ இன் ஒருமூலமெனக்காட்டி, அதன் மற்றைய மூலங்களைப் பெற்று அவற்றை கோணங்களின் சைன்களாக எடுத்துரைக்க.

$\alpha = 10^\circ$ எனக்கொண்டோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ

$\operatorname{cosec} 10^\circ + \operatorname{cosec} 130^\circ + \operatorname{cosec} 250^\circ = 6$ எனக்காட்டுக.

(1988)

$a\cos\theta + b\sin\theta = c$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\phi \cdot \cos\theta + \sin\phi \cdot \sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos(\theta - \phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$-1 \leq \cos(\theta - \phi) \leq 1$ என்பதால்,

$$\frac{c^2}{a^2+b^2} \leq 1 \qquad \text{(ii)}$$

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$

இங்கு $a^2 + b^2 > c^2$ என்பதால்,

$-1 < \cos(\theta - \phi) < 1$ ஆகும்.

learnium.org

$$\cos(\theta-\phi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\gamma \quad \text{என்க.} \quad [0<\gamma<\pi]$$

$\theta-\phi=2n\pi\pm\gamma$; n- நிறையெண்

$\theta=2n\pi+\gamma+\phi$; $2n\pi-\gamma+\phi$.

$\alpha=2n_1\pi+\gamma+\phi \qquad \beta=2n_2\pi-\gamma+\phi$ என்க.

$\alpha-\beta=(n_1-n_2)2\pi+2\gamma$ ---------- (1)

$\cos(\alpha-\beta)=\cos 2\gamma=2\cos^2\gamma-1$ ---------- (2)

$$=2\frac{c^2}{a^2+b^2}-1$$

$\alpha=\beta$ எனின், $\frac{2c^2}{a^2+b^2}-1=1$

எனவே, $c^2=a^2+b^2$

ஆனால் $c^2<a^2+b^2$

எனவே $\alpha\neq\beta$

(1) இலிருந்து, $2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-1=2\cos^2\gamma-1$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos^2\gamma$$

$$\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]^2=\cos^2\gamma=\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

(ii) $4x^3-3x+\sin 3\alpha=0$

$4x^3-3x+3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=0$

$x=\sin\alpha$ என இடப்பக்கத்தில் பிரதியிட,

$4\sin^3\alpha-3\sin\alpha+3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=0$

$\therefore x=\sin\alpha$ ஒரு மூலமாகும்.

$4x^3-3x+3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=0$

$(x-\sin\alpha)\left[4x^2+4x\sin\alpha-\left(3-4\sin^2\alpha\right)\right]=0$

$x-\sin\alpha=0$ அல்லது $4x^2+4\sin\alpha x+\left(3-4\sin^2\alpha\right)=0$

$x=\sin\alpha$

$$x=\frac{-4\sin\alpha\pm\sqrt{16\sin^2\alpha+16\left(3-4\sin^2\alpha\right)}}{8}$$

$$=\frac{-4\sin\alpha\pm\sqrt{48\cos^2\alpha}}{8}$$

$$=\frac{-\sin\alpha\pm\sqrt{3}\cos\alpha}{2}$$

$x=\frac{1}{2}\left(-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha\right)$;

$x=-\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$

$x=\cos\frac{2\pi}{3}\sin\alpha+\sin\frac{2\pi}{3}\cos\alpha$

$=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)$

$=\sin\left(120^\circ+\alpha\right)$

$x=\frac{1}{2}\left(-\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha\right)$

$x=-\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$

$=\cos\frac{4\pi}{3}\sin\alpha+\sin\frac{4\pi}{3}\cos\alpha$

$=\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)$

$=\sin\left(240^\circ+\alpha\right)$

தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\left(4x^3-3x+\sin 3\alpha=0\right)$

$\sin\alpha,\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right),\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)$ ஆகும்.

learnium.org

இப்பொழுது $\frac{1}{\sin\alpha}$, $\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)}$, $\frac{1}{\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு $4x^3 - 3x + \sin 3\alpha = 0$ என்பதில்,

x இற்கு $\frac{1}{x}$ ஐப் பிரதியிடுவதனால் பெறப்படும்.

$$4\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{x}\right) + \sin 3\alpha = 0$$

$$\sin 3\alpha \cdot x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

$\alpha = 10^\circ$ எனின் $\sin 3\alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ஆகும்.

$\therefore$ சமன்பாடு $x^3 - 6x^2 + 8 = 0$

மூலங்கள் $x_1, x_2, x_3 = 0$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$$

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x + x_1x_2x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} + \frac{1}{\sin 130^\circ} + \frac{1}{\sin 250^\circ} = 6$$

$\operatorname{cosec} 10^\circ + \operatorname{cosec} 130^\circ + \operatorname{cosec} 250^\circ = 6$ ஆகும்.

உதாரணம் 7

$\tan(\theta + \alpha) - (3 + 2\sqrt{2})\tan\theta = 0$ எனின்,

$\sin(2\theta + \alpha) = \sqrt{2}\sin\alpha$ எனக் காட்டுக.

இங்கு θ விற்குரிய மெய்த்தீர்வுகள் சாத்தியமாகும். $\sin\alpha$ இன் வீச்சைக் கூறுக.

இதிலிருந்து $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - (3 + 2\sqrt{2})\tan\theta = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்கும் θ வின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) ஒரு முக்கோணியின் கோணங்கள் A, B, C ஆகும். θ வின் எப்பெறுமானத்திற்கும்

$$\tan A + \tan(B+\theta) + \tan(C-\theta) = \tan A \cdot \tan(B+\theta) \cdot \tan(C-\theta)$$

என நிறுவுக.

(iii) $\tan\left(\cos^{-1}x\right) = \sin\left(\cot^{-1}\frac{1}{2}\right)$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(1989)

(i) $\tan(\theta+\alpha) = (3+2\sqrt{2})\tan\theta$

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)} = (3+2\sqrt{2})\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin(\theta+\alpha)\cos\theta = (3+2\sqrt{2})\sin\theta\cos(\theta+\alpha)$$

$$2\sin(\theta+\alpha)\cos\theta = (3+2\sqrt{2}) \times 2\sin\theta\cdot\cos(\theta+\alpha)$$

$$\sin(2\theta+\alpha) + \sin\alpha = (3+2\sqrt{2})\left[\sin(2\theta+\alpha) - \sin\alpha\right]$$

$$(4+2\sqrt{2})\sin\alpha = (2+2\sqrt{2})\sin(2\theta+\alpha)$$

$$\sin(2\theta+\alpha) = \frac{4+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}\sin\alpha$$

$$\sin(2\theta+\alpha) = \sqrt{2}\sin\alpha \quad \text{---------- (1)}$$

$-1 \le \sin(2\theta+\alpha) \le 1$ ஆதலால்,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin\alpha \le \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ஆகும்.}$$

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) = (3+2\sqrt{2})\tan\theta$$

இங்கு (1) இல் $\alpha = \frac{\pi}{6}$ எனப் பிரதியிட,

$$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

learnium.org

$$2\theta + \frac{\pi}{6} = n\pi + (-1)^n \pi/4$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left[n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right] ; \quad n \text{ - நிறையெண்}$$

(ii) $A + B + C = 180^\circ$

$$B + C = 180^\circ - A$$

$$(B + \theta) + (C - \theta) = 180^\circ - A$$

$$\tan\left[(B+\theta) + (C-\theta)\right] = \tan\left[180^\circ - A\right]$$

$$\frac{\tan(B+\theta) + \tan(C-\theta)}{1 - \tan(B+\theta)\tan(C-\theta)} = -\tan A$$

$$\tan A + \tan(B+\theta) + \tan(C-\theta) = \tan A \cdot \tan(B+\theta) \cdot \tan(C-\theta)$$

(iii) $\tan\left(\cot^{-1} x\right) = \sin\left(\cot^{-1}\frac{1}{2}\right)$

$$\cot^{-1} x = A; \qquad \cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = B$$

$$\tan A = \sin B \; ; \quad \cot A = x, \; \cot B = \frac{1}{2}$$

$$\tan^2 A = \sin^2 B$$

$$\frac{1}{x^2} - 1 = \frac{4}{5}$$

$$5\left(1 - x^2\right) = 4x^2$$

$$x^2 = 5/9 \qquad x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$\tan A = \sin B; \quad 0 < B < \frac{\pi}{2}$ ஆதலால் $\sin B > 0$

$\tan A > 0, \qquad \therefore \quad 0 < A < \frac{\pi}{2}$

$\therefore x > 0$

ஆகவே $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

உதாரணம் 8

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **(ii)** $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{6}$

(iii) $\sin x \cos x - 6\sin x + 6\cos x + 6 = 0$

(1990)

(i) $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta - \sin\frac{\pi}{4}\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \; ; \quad n \text{ - நிறையெண்}$$

(i)

(ii) $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{6}$

$\cos^{-1} x = A$ என்க. $\cos A = x$

$\sin^{-1} x = B$ என்க. $\sin B = x$

learnium.org

$$B = \frac{\pi}{2} - A$$

$$A - \left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$2A = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore\ A = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos A = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

(iii) $\sin x \cos x + 6 = (\sin x - \cos x)$

$$(\sin x \cos x + 6)^2 = 36(\sin x - \cos x)^2$$

$$\sin^2 x \cos^2 x + 12 \sin x \cos x + 36 = 36(1 - 2\sin x \cos x)$$

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x + 84 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x \cos x (\sin x \cos x + 84) = 0$$

$$\sin x \cdot \cos x = 0 \left[\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \neq -84\right]$$

$\sin x = 0$: $x = n\pi$

$\cos x = 0$ $x = 2m\pi$ n, m – நிறையெண்

உதாரணம் 9

(i) $a\cos^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta$ என்பதை $A\cos(2\theta + B) + C$ எனும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க. இங்கு A, B, C ஆகியவை θ வைச் சாராதவை. இதிலிருந்து $E = 8\cos^2\theta + 9\sin\theta \cdot \cos\theta - 4\sin^2\theta$ என்னும் கோவையின் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தையும் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தையும் காண்க. அத்துடன் $E = 0$ ஆக இருக்கும் கூர்ங்கோணம் θ வைக் காண்க.

(ii) தீர்க்க.

(a) $5\sin x - 12\cos x = -13\sin 3x$

(b) $\sin^{-1}x + \tan^{-1}\left(\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$

(1991 Aug.Special)

(i) $a\cos^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta$

$$= \frac{1}{2}\left[a(1 + \cos 2\theta) + b\sin 2\theta + c(1 - \cos 2\theta)\right]$$

$$= \left(\frac{a-c}{2}\right)\cos 2\theta + \frac{b}{2}\sin 2\theta + \frac{a+c}{2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}\left[\frac{\frac{a-c}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}\cos 2\theta - \frac{\left(\frac{-b}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}\sin 2\theta\right] + \frac{a+c}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + b^2}\cdot\cos(2\theta + B) + \left(\frac{a+c}{2}\right)$$

இங்கு $A = \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + b^2}$

$$C = \frac{a+c}{2}$$

$\cos B = \frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}$; $\sin B = \frac{-b}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}$ ஆகும்.

learnium.org

$$E = 8\cos^2\theta + 9\sin\theta\cos\theta - 4\sin\theta$$

$a = 8,\ b = 9,\ c = -4$

$$\frac{a+c}{2} = \frac{8-4}{2} = 2$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 9^2} = \frac{15}{2}$$

$$E = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + b^2} \cdot \cos(2\theta + B)$$

$$E = 2 + \frac{15}{2}\cos(2\theta + B)$$

E இழிவு ; $\cos(2\theta + B) = -1$; $\quad E$ இழிவு $= 2 - \frac{15}{2} = \frac{-11}{2}$

E உயர்வு ; $\cos(2\theta + B) = 1 \quad E$ உயர்வு $= 2 + \frac{15}{2} = \frac{19}{2}$

$E = O$ ஆக, $\cos(2\theta + B) = \frac{-4}{15} = \cos\alpha$ என்க.

$$\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$$

$$2\theta + B = 2n\pi \pm \alpha \quad \left[\begin{array}{l} \cos B = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \\ \sin B = \frac{-9}{15} = \frac{-3}{5} \end{array}\right]$$

$$\theta = n\pi \pm \frac{\alpha}{2} - \frac{B}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{B}{2} \text{ (கூர்ங்கோணம்)}$$

(a) $5\sin x - 12\cos x = -13\sin 3x$

$$\frac{5}{13}\sin x - \frac{12}{13}\cos x = -\sin 3x$$

$$\sin x\cos\alpha - \cos x\sin\alpha = -\sin 3x$$

$$\sin(x - \alpha) = -\sin 3x$$

$$\sin 3x = \sin\left[-(x - \alpha)\right]$$

$$3x = n\pi + (-1)^n\left[-(x - \alpha)\right]$$

n ஒற்றை எனின், $\quad 3x = n\pi - (-x + \alpha)$

$$3x = n\pi + x - \alpha$$

$$x = \frac{n\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$x = (2n-1)\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \quad (n \text{ - நிறையெண்.})$$

n இரட்டை எனின்,

$$3x = n\pi + (-x + \alpha)$$

$$4x = n\pi + \alpha$$

$$x = \frac{n\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}$$

$$x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\alpha}{4}; \quad (n \text{ - நிறையெண்.})$$

உதாரணம் 10

(a) $\cos(A + B)$ இற்கான நியம சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ எனக் காட்டுக. $\cos 2\theta \cdot \tan\theta + \sin\theta = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

learnium.org

$2\cos^2\theta - 2\cos^2 2\theta \equiv \cos 2\theta - \cos 4\theta$ என்னும் சர்வசமன்பாட்டை நிறுவுக. இதிலிருந்து

$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ என உய்த்தறிந்து $\cos\frac{3\pi}{5}$ இற்கான பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) பின்வரும் சமன்பாடுகளை x இற்காகத் தீர்க்க.

$\tan x - \tan(x-\alpha) = \tan\alpha \ (\alpha \neq 0)$

$\tan^{-1}x + \tan^{-1}2x = \frac{\pi}{4}$

(1992)

(a) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$A = B = \theta$ எனின்,

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)$

$= 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 2\theta \cdot \tan\theta + \sin\theta = 0$

$\cos 2\theta \cdot \tan\theta + \cos\theta \cdot \tan\theta = 0$

$\tan\theta = 0$ அல்லது

$\theta = n\pi$

$\cos 2\theta + \cos\theta = 0$

$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\cos\theta = -1$

$\theta = 2n\pi \pm \pi$

தீர்வு: $\theta = n\pi$; $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; n – நிறையெண்.

$\cos 2\theta - \cos 4\theta = (2\cos^2\theta - 1) - (2\cos^2 2\theta - 1)$

$= 2\cos^2\theta - 2\cos^2 2\theta$ ---------- (1)

$\theta = \frac{\pi}{5}$ என்க.

$\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{4\pi}{5} = 2\left[\cos^2\frac{\pi}{5} - \cos^2\frac{2\pi}{5}\right]$

$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5} = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}\right)$

ஆகவே, $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$ ஆகும்.

$\cos\frac{\pi}{5} - \left(2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1\right) = \frac{1}{2}$

$4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0$

$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{8}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$\cos\frac{\pi}{5} > 0$ ஆகவே, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

learnium.org

(1) இல் $\theta = \frac{3\pi}{5}$ எனப் பிரதியிடின்,

$$\cos\frac{6\pi}{5} - \cos\frac{12\pi}{5} = 2\left[\cos^2\frac{3\pi}{5} - \cos^2\frac{6\pi}{5}\right]$$

$$-\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = 2\left[\cos^2\frac{2\pi}{5} - \cos^2\frac{\pi}{5}\right]$$

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5} = 2\left(\cos^2\frac{\pi}{5}-\cos^2\frac{2\pi}{5}\right)$$

$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$ ஆகும்.

எனவே மற்றைய தீர்வு $\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ ஆகும்.

(b)(i) $\tan x - \tan(x-\alpha) = \tan\alpha$ ----------(1)

$\tan\alpha = \tan\left[x-(x-\alpha)\right]$ என எழுதலாம்

$$\tan\alpha = \frac{\tan x - \tan(x-\alpha)}{1+\tan x\cdot\tan(x-\alpha)} \text{ ----------(2)}$$

(1),(2) இலிருந்து

$\tan\alpha\left[1+\tan x\cdot\tan(x-\alpha)\right] = \tan\alpha$

$\tan x\cdot\tan(x-\alpha) = 0$

$\tan x = 0$ அல்லது , $\tan(x-\alpha) = 0$

$x = n\pi$ அல்லது $x = n\pi+\alpha$; n - நிறையெண்

(ii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}(2x) = \frac{\pi}{4}$

$\tan^{-1}x = A$, $\tan^{-1}(2x) = B$ என்க.

$A+B = \frac{\pi}{4}$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\,\tan B} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\frac{x+2x}{1-2x^2} = 1$$

$2x^2 + 3x - 1 = 0$

$$x = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{17}-3}{2}, \quad x = \frac{-\sqrt{17}-3}{2}$$

$0 < A < \frac{\pi}{4}$ என்பதால், $x = \frac{\sqrt{17}-3}{2}$ (>0)

உதாரணம் 11

(a) பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $\sqrt{3}(\sin x+\cos x)^2 = \cos 2x$

(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

(b) $2\sin y.\sin(x+y) = \cos x$

$\cot x+\sin 2y = \sin 2x$

ஆகிய சமன்பாடுகளை x, y திருப்தி செய்கின்றன. முதலாவது சமன்பாடு $\sin x.\sin 2y = \cos x.\cos 2y$ எனும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம் எனக் காட்டுவதன் மூலம் அல்லது வேறுவிதமாக y இலே ஒரு சமன்பாட்டைப் பெறுக. இதிலிருந்து $0\le x\le\pi$, $0\le x\le\pi$ ஆக இருக்க x, y ஆகியவற்றுக்கு மேலே குறிப்பிட்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(1993)

learnium.org

(i) $\sqrt{3}(\sin x+\cos x)^2 = \cos 2x$

$\sqrt{3}\ (1+\sin 2x) = \cos 2x$

$\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}$

$\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$

$2x+\frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$x = n\pi \pm \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}$; n – நிறையெண்.

(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$A = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right) \Rightarrow \tan A = \frac{1}{x-1}$

$B = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right) \Rightarrow \tan B = \frac{1}{x+1}$

$C = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \tan C = \frac{1}{2}$

$A-B=C$

$\tan(A-B) = C$

$\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\ \tan B} = \tan C$

$\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-1}}{1+\frac{1}{x-1}.\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{2}$ $\frac{2}{x^2} = \frac{1}{2}$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$

(b) $2\sin y\cdot\sin(x+y) = \cos x$

$2\sin y[\sin x\cos y+\cos x.\sin y] = \cos x$

$2\sin y\cos y.\sin x+\cos x.(2\sin^2 y) = \cos x$

$\sin 2y.\sin x = \cos x(1-2\sin^2 y)$

$\sin 2y.\sin x = \cos x(\cos 2y)$

$\frac{\sin 2y}{\cos 2y} = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\tan 2y = \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$2y = n\pi+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

(i) $\sin 2y = \cos x$ [n இரட்டை எனின்]

(ii) $\sin 2y = -\cos x$ [n ஒற்றை எனின்]

$\cot x+\sin 2y = \sin 2x$ என்பதில்,

(i) $\cot x+\cos x = \sin 2x$

$\frac{\cos x}{\sin x}+\cos x = 2\sin x\cos x$

$\cos x\left[1+\sin x-2\sin^2 x\right] = 0$

learnium.org

$\cos x = 0,\ (1 - \sin x)(1 + 2\sin x) = 0$

$\cos x = 0,\ (1-\sin x) = 0,\ (1+2\sin x) = 0$

$0 \le x \le \pi$ என்பதால்,

$x = \frac{\pi}{2}$.

$x = \frac{\pi}{2}$ எனின், $\sin 2y = \cos x = \cos \pi/2 = 0$

$2y = 0, \pi, 2\pi$

$y = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ---------- (1)

(ii) $\sin 2y = -\cos x$ எனின்,

$\cot x + \sin 2y = \sin 2x$ என்பதில்

$\cot x - \cos x = \sin 2x$

$\cos x\left(1 - \sin x - 2\sin^2 x\right) = 0$

$\cos x(1+\sin x)(1-2\sin x) = 0$

$\cos x = 0, \quad \sin x = -1, \quad \sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{6}, \ \frac{5\pi}{6}$ $[0 \le x \le \pi$ என்பதால்]

$x = \frac{\pi}{2}$ எனில், $\sin 2y = 0 \cdot\ y = 0, \pi/2, \pi$

$x = \frac{\pi}{6}$ எனில், $\sin 2y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2y = \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$y = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ ----------(2)

$x = \frac{5\pi}{6}$ எனில், $\sin 2y = -\cos\frac{5\pi}{6}$

$\sin 2y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2y = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

$y = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ ---------- (3)

தீர்வு $x = \frac{\pi}{2}$ எனின், $y = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

$x = \frac{\pi}{6}$ எனின், $y = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$

$x = \frac{5\pi}{6}$ எனின், $y = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ ஆகும்.

உதாரணம் 12

(a) தீர்க்க :

(i) $6\tan^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{2\pi}{3} (x > 1)$

(b) $\sin\frac{x+y}{2} = u$ எனவும், $\cos\frac{x-y}{2} = v$ எனவும் இருப்பின்,

$\sin x + \sin y = \sqrt{2}$

$\cos x \,.\, \cos y = \frac{1}{2}$ ஆகிய ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்

$uv = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v^2 - u^2 = \frac{1}{2}$ என ஒருங்கும் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து தரப்பட்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை x, y இல் ஆகியவற்றுக்காகத் தீர்க்க.

(1994)

learnium.org

(i) $6\tan^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$

$6\tan^2 x - (\cos 2x + 1) = \cos 2x$

$6\tan^2 x = 2\cos 2x + 1$

$t = \tan x$ என்க.

$$6t^2 = 2\frac{(1-t^2)}{1+t^2} + 1$$

$$(6t^2 - 1)(1+t^2) = 2(1-t^2)$$

$$6t^4 + 5t^2 - 1 = 2 - 2t^2$$

$$6t^4 + 7t^2 - 3 = 0$$

$$(3t^2 - 1)(2t^2 + 3) = 0$$

$3t^2 - 1 = 0;$ $\quad t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$x = n\pi \pm \frac{\pi}{6};$ $\quad n-$ நிறையெண்.

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{2\pi}{3} (x > 1)$

$x = \tan\alpha$ என்க.

$$\cos^{-1}(-\cos 2\alpha) + \tan^{-1}(-\tan 2\alpha) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos^{-1}(-\cos 2\alpha) + \tan^{-1}[\tan(-2\alpha)] = \frac{2\pi}{3} \quad \text{----------(1)}$$

$$(\pi - 2\alpha) + (-2\alpha) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\pi - 4\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$4\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{12}$$

$x = \tan\alpha = \tan\frac{\pi}{12} < 1 -$ பொருந்தாது.

(1) இலிருந்து

$$\cos^{-1}[\cos(\pi - 2\alpha)] + \tan^{-1}[\tan(\pi - 2\alpha)] = \frac{2\pi}{3}$$

$$(\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\alpha) = \frac{2\pi}{3}$$

$$2\pi - 4\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$4\alpha = \frac{4\pi}{3}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \tan\alpha = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$u = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right),\ v = \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\sin x + \sin y = \sqrt{2}$

$$2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sqrt{2} \quad \text{----------(1)}$$

learnium.org

$2uv = \sqrt{2}\,; \qquad uv = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$2\cos x.\cos y = 1$

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 1$

$\left[1 - 2\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right] + \left[2\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) - 1\right] = 1$

$\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ----------(2)

$v^2 - u^2 = \frac{1}{2}$

$uv = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad v^2 - u^2 = \frac{1}{2}$

$v^2 - \frac{1}{2v^2} = \frac{1}{2}$

$2v^4 - v^2 - 1 = 0$

$(2v^2+1)(v^2-1) = 0$

$2v^2 + 1 \neq 0 \;;\; v^2 - 1 = 0$

$v = \pm 1$ $\quad \left.\begin{matrix} v = 1 \\ u = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right\}$ $\quad \left.\begin{matrix} v = -1 \\ u = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right\}$

$v = 1, \qquad u = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1; \qquad \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{x-y}{2} = 2n\pi \qquad \frac{x+y}{2} = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{4}$

$x = (m+2n)\pi + (-1)^m \frac{\pi}{4}$

$y = (m-2n)\pi - (-1)^m \frac{\pi}{4}$ இங்கு m , n - நிறையெண்கள்

$v = 1, \qquad u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = -1 \qquad \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{x-y}{2} = 2n\pi + \pi \qquad \frac{x+y}{2} = m\pi - (-1)^m \frac{\pi}{4}$

$x = (m+2n+1)\pi - (-1)^m \frac{\pi}{4}$

$y = (m-2n-1)\pi + (-1)^m \frac{\pi}{4}$; m , n - நிறையெண்கள்

உதாரணம் 13

x இற்காகத் தீர்க்க.

(i) $3\cos x - 4\sin x = 5\sin kx$; k - ஒரு மாறிலி

(ii) $4 - 4(\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0$

(iii) $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{6}\left[0 \le \cos^{-1} x \le \pi, -\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x \le \frac{\pi}{2}\right]$

(1995)

(i) $3\cos x - 4\sin x = 5\sin kx$

$\frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x = \sin kx$

$\cos\alpha\cos x - \sin\alpha \cdot \sin x = \sin kx$

learnium.org

$$\cos(x+\alpha) = \sin k\,x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - k\,x\right)$$

$$x + \alpha = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - k\,x\right)$$

$$x = \frac{1}{(k+1)}\left[2n\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right] \quad n \text{ - நிறையெண்}$$

$$x = \frac{1}{(1-k)}\left[2n\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right]; \quad n \text{ - நிறையெண்}$$

(ii) $4 - 4(\cos x - \sin x) + \left[(\cos x - \sin x)^2 - 1\right] = 0$

$t = \cos x - \sin x$ என்க.

$$4 - 4t + t^2 - 1 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-3)(t-1) = 0$$

$t = 3$ அல்லது $t = 1$

$-\sqrt{2} \le \cos x - \sin x \le \sqrt{2}$ என்பதால் $t = 3$ பொருந்தாது.

$$\cos x - \sin x = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$x = 2n\pi$ அல்லது $2n\pi + \frac{\pi}{2}$; n - நிறையெண்

(i) $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{6}$

$\cos^{-1} x = A$ என்க, $\sin^{-1} x = B$ என்க. $\left(B = \frac{\pi}{2} - A\right)$

$$A - B = \frac{\pi}{6}$$

$$A - \left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$2A = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$A = \frac{\pi}{3}; \quad \cos A = x$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = x = \frac{1}{2}$$

உதாரணம் 14

(i) $\frac{\cos x + 2\sin x + 1}{\cos x + \sin x}$ என்பது 1 இற்கும் 2 இற்குமிடையே அமைய முடியாதெனக் காட்டுக.

(ii) $A + B + C = \pi$ எனின்,

$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C . \cot A = 1$ எனக் காட்டுக.

(iii) தீர்க்க. $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = 0$

(iv) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ என நிறுவுக.

(1996)

learnium.org

$$E = \frac{\cos x + 2\sin x + 1}{\cos x + \sin x}$$

$$(E-1)\cos x + (E-2)\sin x = 1$$

$k = \sqrt{(E-1)^2 + (E-2)^2}$ என்க.

$$\frac{E-1}{k}\cos x + \frac{E-2}{k}\sin x = \frac{1}{k}$$

$$\cos(x-\alpha) = \frac{1}{k}$$

$$|\cos(x-\alpha)| \leq 1$$

$$\frac{1}{k^2} \leq 1$$

$$k^2 - 1 \geq 0$$

$$(E-1)^2 + (E-2)^2 - 1 \geq 0$$

$$2E^2 - 6E + 4 \geq 0$$

$$E^2 - 3E + 2 \geq 0$$

$$(E-1)(E-2) \geq 0$$

$E \leq 1$ அல்லது $E \leq 2$.

ஆகவே E, 1 இற்கும் 2 இற்குமிடையே எப்பெறுமானத்தையும் எடுக்காது.

(ii) $A + B + C = \pi$

$$A + B + = \pi - C$$

$$\tan(A+B) = \tan(\pi - c)$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C$$

$\tan A . \tan B . \tan C$ ஆல் பிரிக்க,

$$\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$$

(iii) $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = 0$

$$\tan\theta + \tan 2\theta + \frac{\tan\theta + \tan 2\theta}{1 - \tan\theta . \tan 2\theta} = 0$$

$$(\tan\theta + \tan 2\theta)(2 - \tan\theta . \tan 2\theta) = 0$$

$\tan 2\theta + \tan\theta = 0$ அல்லது $2 - \tan\theta . \tan 2\theta = 0$

$$\tan 2\theta = -\tan\theta = \tan(-\theta)$$

$$2\theta = n\pi + (-\theta)$$

$$\theta = \frac{n\pi}{3} \; ; \; n \text{- நிறையெண்}$$

$$2 - \tan\theta . \tan 2\theta = 0$$

$$2 - \frac{2\tan^2\theta}{1 - \tan^2\theta} = 0$$

$$\tan\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \tan\alpha = \tan(\pm\alpha)$$

$\theta = n\pi \pm \alpha$; n - நிறையெண்

(iv) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$$A = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \quad B = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\tan A = \frac{1}{2}, \quad \tan B = \frac{1}{3} \; : \; 0 < A < \frac{\pi}{4}; \; 0 < B < \pi/4$$

learnium.org

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 1$$

$$0 < A+B < \pi/2 \;\; ; \;\; A+B = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$C = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right),\; D = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\tan C = \frac{1}{4};\; \tan D = \frac{3}{5} \quad 0 < C, \quad D < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan(C+D) = \frac{\tan C+\tan D}{1-\tan C.\tan D} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}.\frac{3}{5}}$$

$$C+D = \frac{\pi}{4} \quad (C+D<\pi)$$

$$A+B = C+D$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

உதாரணம் 15

(a) தீர்க்க. **(i)** $\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = 0$

(ii) $\sin 3x = 4\sin x\,.\,\sin 2x\,.\,\sin 4x$

(b) A, B, C, D ஆகிய மாறிலிகள் எல்லாம் x ஐச் சாராதனவாயிருக்க $A\sin x + B\cos x + C\sin 2x + D\cos 2x = 0$ என்னும் சமன்பாடு x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் உண்மையாக இருப்பின் இந்த மாறிலிகள் ஒவ்வொன்றும் பூச்சியமாக இருத்தல் வேண்டும் எனக் காட்டுக.

(1997)

(a) (i) $\cos x + \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\cos x + \cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$x+\frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3} \;\; ; \;\; x = 2n\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$$

$$= 2n\pi+\frac{\pi}{6}\;; \quad 2n\pi-\frac{5\pi}{6}\;; \quad n \text{ - நிறையெண்}$$

(ii) $\sin 3x = 4\sin x.\sin 2x.\sin 4x$

$$= 2(\cos x-\cos 3x)\sin 4x$$

$$= 2\cos x\,.\,\sin 4x - 2\cos 3x\,.\,\sin 4x$$

$$= (\sin 5x+\sin 3x)-(\sin 7x+\sin x)$$

$$0 = \sin 5x-\sin 7x-\sin x$$

$$0 = -2\cos 6x\,.\,\sin x-\sin x$$

learnium.org

$$0 = \sin x\,(1 + 2\cos 6x)$$

$$\sin x = 0; \quad \cos 6x = -\frac{1}{2}$$

$$x = n\pi; \quad 6x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \frac{1}{6}\left[2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right]; \quad n - \text{நிறையெண்}$$

(b) $A\sin x + B\cos x + C\sin 2x + D\cos 2x = 0$

(x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்)

$x = 0$ எனின், $B + D = 0$ ----------(1)

$x = \frac{\pi}{2}$ எனின், $A - D = 0$ ----------(2)

$x = -\frac{\pi}{2}$ எனின், $-A - D = 0$ ----------(3)

$x = \pi$ எனின், $-B + D = 0$ ----------(4)

$(1), (4) \Rightarrow B = 0; D = 0$

$(2), (3) \Rightarrow A = 0; D = 0$

$\therefore A = B = C = D = 0$

உதாரணம் 16

(a) **(i)** $\theta < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ ஆயிருக்க,

$\cos x + \cos(x+\alpha) + \cos(x+\beta) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வைப் பெறுக.

(ii) $x > -\sqrt{3}$ எனின், $\tan^{-1} x - \tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

எனக்காட்டுக.

(b) எந்த ஒரு முக்கோணிக்கும் கோசைன் விதியைக் கூறி நிறுவுக. ஒரு முக்கோணி ABC யில் கோணம் $C = \frac{\pi}{3}$ என இருந்தால் மாத்திரமே

$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ எனக் காட்டுக.

(1997)

(a) **(i)** $\cos x + \cos(x+\alpha) + \cos(x+\beta) = 0$

$\cos x + \cos x.\cos\alpha - \sin x \sin\alpha + \cos x.\cos\beta - \sin x \sin\beta = 0$

$\cos x\,(1 + \cos\alpha + \cos\beta) - \sin x\,(\sin\alpha + \sin\beta) = 0$

$$\tan x = \frac{1 + \cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

$$x = n\pi + \tan^{-1}\left[\frac{1 + \cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}\right]; \; n - \text{நிறையெண்.}$$

(ii) $\tan^{-1} x - \tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}\right)$

$A = \tan^{-1} x, \quad B = \tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}\right)$

$-\frac{\pi}{2} < A, B < \frac{\pi}{2};$

$x > -\sqrt{3} \Rightarrow x + \sqrt{3} > 0$

$x - \frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}} = \frac{x^2+1}{x+\sqrt{3}} > 0 \; : \Rightarrow x > \frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}} \Rightarrow A > B$

$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

learnium.org

$$= \frac{x - \frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}}{1 + \frac{x\left(x\sqrt{3}-1\right)}{x+\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{x^2+1}{\sqrt{3}\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$-\pi < A - B < \pi$, அத்துடன் $A - B > 0$,

$\therefore \quad A - B = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \quad tan^{-1} x - tan^{-1} \frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ ஆகும்.

(b) $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} - \frac{3}{a+b+c} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(b+c)(a+b+c) + (a+c)(a+b+c) - 3(a+c)(b+c)}{(a+c)(b+c)(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-c^2-ab}{(a+c)(b+c)(a+b+c)} = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 - ab = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$

$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$

$cos C = \frac{1}{2} \quad \therefore C = \frac{\pi}{3}$

உதாரணம் 17

வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் ஒரு முக்கோணி ABC யில்,

$\frac{a}{sin A} = \frac{b}{sin B} = \frac{c}{sin C}$ என நிறுவுக.

(i) $a = (b-c)\, cos\frac{A}{2}\, cosec\frac{B-C}{2}$

(ii) $cot\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{b+c}{b-c} tan\frac{A}{2}$ என நிறுவுக.

இவற்றிலிருந்து, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos A$ என உய்த்தறிக.

(1983)

$\frac{a}{sin A} = \frac{b}{sin B} = \frac{c}{sin C}$

$\frac{a}{sin A} = \frac{b-c}{sin B - sin C}$

$\frac{a}{2 sin\frac{A}{2} cos\frac{A}{2}} = \frac{b-c}{2 cos\left(\frac{B+C}{2}\right). sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}$

$\frac{a}{2 sin\frac{A}{2}.cos\frac{A}{2}} = \frac{b-c}{2 sin\frac{A}{2}.sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}$

$a = (b-c)\, cos\frac{A}{2}.cosec\left(\frac{B-C}{2}\right)$ ---------- (1)

$\frac{b}{sin B} = \frac{c}{sin C}$

$\Rightarrow \frac{b-c}{sin B - sin C} = \frac{b+c}{sin B + sin C}$

learnium.org

$$\frac{b-c}{2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right).\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)} = \frac{b+c}{2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right).\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \cot\frac{A}{2}\cdot\frac{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$\frac{b+c}{b-c}\cdot\tan\frac{A}{2} = \cot\left(\frac{B-C}{2}\right) \quad \text{----------(2)}$$

(1) இலிருந்து

$$a^2 = (b-c)^2\cdot\cos^2\frac{A}{2}\cdot\operatorname{cosec}^2\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= (b-c)^2\cdot\cos^2\frac{A}{2}\left[1+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2\cdot\tan^2\frac{A}{2}\right]$$

$$= (b-c)^2\cdot\cos^2\frac{A}{2} + (b+c)^2\cdot\sin^2\frac{A}{2}$$

$$= b^2+c^2-2bc.\left(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$= b^2+c^2-2bc.\cos A$$

உதாரணம் 18

வழமையான குறிப்பீடுகளுடன் ஒரு முக்கோணம் ABC யில்

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ எனக் காட்டுக.

(i) $b\sin\left(\frac{B}{2}+C\right) = (c+a)\sin\frac{B}{2}$

(ii) $\dfrac{\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}} = \dfrac{2b}{c+a-b}$

(iii) a,b,c என்பன கூட்டல் விருத்தியில் அமைந்தால்

$\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ என்பனவும் இவ்வாறு அமையும் எனக் காட்டுக.

(1984)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a+c}{\sin A+\sin C}$$

$$\frac{b}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{a+c}{2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right).\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)}$$

$$\frac{b}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{a+c}{\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)}$$

$$(a+c)\sin\frac{B}{2} = b\cdot\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)$$

$$= b\cos\left[\frac{180^\circ - B - C - C}{2}\right]$$

$$= b\cos\left[90^\circ - \left(\frac{B}{2}+C\right)\right]$$

$$= b\sin\left(\frac{B}{2}+C\right) \quad \text{----------(1)}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a+c-b}{\sin A+\sin C-\sin B}$$

learnium.org

$$\frac{b}{2\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}} = \frac{a+c-b}{2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) - 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$\frac{b}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{a+c-b}{\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

$$\frac{b}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{a+c-b}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}$$

$$\frac{2b}{a+c-b} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}} \times \frac{1}{\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}}$$

$$= \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}} \times \frac{1}{\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}} \times \frac{1}{\cot\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}} \times \frac{1}{\cot\frac{B}{2}}$$

$$\frac{2b}{a+c-b} = \frac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{B}{2}}$$

(iii) $a, b, c,$ என்பன கூட்டல் விருத்தியில் அமையின்,

$b-a=c-b \Rightarrow a+c=2b$

$$\frac{2b}{2b-b} = \frac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{B}{2}}$$

$$2\cot\frac{B}{2} = \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}$$

ஆகவே $\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ என்பன கூட்டல் விருத்தியில் அமையும்.

உதாரணம் 19

$\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$ எனின்,

$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ எனக் காட்டுக.

பொருத்தமான வகையில் x, y, z ஐத் தெரிவு செய்து

$A+B+C=\pi$ எனின்,

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=1$$

என்பதை உய்த்தறிக.

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ என்பன உச்சிகள் வட்டத்தில் அமைந்துள்ளதும் $A_1A_2 = A_2A_3 = 2a;\ A_3A_4 = A_4A_5 = 2b;\ A_5A_6 = A_6A_1 = 2c$ எனும் வகையில் அமைந்துள்ள அறு கோணியாகும். இவ்வட்டத்தின் ஆரை λ என்பது $\lambda^3 - (a^2+b^2+c^2)\lambda - 2abc = 0$ என்பதால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

(1985)

learnium.org

$\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$

$\alpha = \cos^{-1}x, \quad \beta = \cos^{-1}y, \quad \delta = \cos^{-1}z$ என்க.

$\cos\alpha = x, \quad \cos\beta = y, \quad \cos\delta = z; \quad 0 \le \alpha, \beta, \delta \le \pi$

$\alpha + \beta + \delta = \pi$

$\alpha + \beta = \pi - \delta$

$\cos(\alpha+\beta) = -\cos\delta$

$\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta = -\cos\delta$

$x.y - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2} = -Z$

$(xy+z)^2 = (1-x^2)(1-y^2)$

$x^2y^2 + 2xyz + z^2 = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2$

$x^2y^2 + z^2 + 2xyz = 1$

$\alpha + \beta + \delta = \pi$ ஆகும். $A + B + C = \pi$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \quad \delta = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ என்க.

$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - \left(\frac{A+B+C}{2}\right)$

$= \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$

$\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \quad \cos^{-1}y = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \quad \cos^{-1}z = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) = y, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = Z$

$\sin\frac{A}{2} = x, \quad \sin\frac{B}{2} = y, \quad \sin\frac{C}{2} = z$

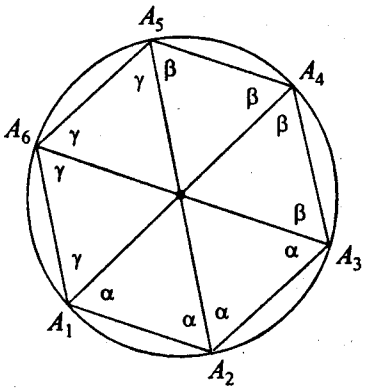
$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ என்பதில் பிரதியிட

$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = 1$ ஆகும்.

$4(\alpha+\beta+\gamma) = 4\pi$

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ஆகும்.

வட்டத்தின் ஆரை λ என்பது.



$x = \cos\alpha = \frac{a}{\lambda},$

$y = \cos\beta = \frac{b}{\lambda}$

$z = \cos\gamma = \frac{C}{\lambda}$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ என்பதில்,

$\frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{b^2}{\lambda^2} + \frac{c^2}{\lambda^2} + \frac{2abc}{\lambda^3} = 1$

$\lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\lambda - 2abc = 0$ ஆகும்.

உதாரணம் 20

வழமையான குறிப்பீடுகளுடன் யாதுமொரு முக்கோணி ABC இல்

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ எனக் காட்டுக.

(i) $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = O$

(ii) $a^{2+} + c^2 = 2b^2$ எனின், $\cot A + \cot C = 2\cot B$ எனக்காட்டுக.

(1986)

learnium.org

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$$

$$k^2 = \frac{b^2 - c^2}{\sin^2 B - \sin^2 C}$$

$$\cot A\left(b^2 - c^2\right) = k^2\left(\sin^2 B - \sin^2 C\right)\cot A$$

$$= \frac{k^2}{2}\left[(1-\cos 2B) - (1-\cos 2C)\right]\cot A$$

$$= \frac{k^2}{2}\left[\cos 2C - \cos 2B\right]\cot A$$

$$= \frac{k}{2}\cdot 2\sin(B+C)\sin(B-C)\cdot\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= k^2\sin(B-C)\cos A$$

$$\left(b^2-c^2\right)\cot A + \left(c^2-a^2\right)\cot B + \left(a^2-b^2\right)\cot C$$

$$= k^2.\sin(B-C)\cos A + k^2.\sin(C-A)\cos B + k^2.\sin(A-B)\cos C$$

$$= k^2\left[(\sin B\cdot\cos C - \cos B\sin A)\cos A + (\sin C\cos A - \cos C\sin A)\cos B\right.$$

$$\left. + (\sin A\cos B - \cos A\sin B)\cos C\right] = 0$$

(ii) $a^2 + c^2 = 2b^2$ எனின்,

$a^2 - b^2 = b^2 - c^2$ ஆகும். மேலும் $a^2 - c^2 = 2b^2 - 2c^2 = 2\left(a^2 - b^2\right)$

(1) இலிருந்து,

$$\left(b^2 - c^2\right)\cot A + \left(c^2 - a^2\right)\cot B + \left(a^2 - b^2\right)\cot C = 0$$

$$\left(a^2 - b^2\right)\cot A + \left(a^2 - b^2\right)\cot C = \left(a^2 - c^2\right)\cot B$$

$$\left(a^2 - b^2\right)(\cot A + \cot C) = 2\left(a^2 - b^2\right)\cot B$$

$$\cot A + \cot C = 2\cot B$$

உதாரணம் 21

முக்கோணி ABC இற்குரிய வழமையான குறிப்பீடுகளைக் கொண்டு,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ என நிறுவுக.

முக்கோணம் ABC யில் கோணம் A யின் உள் இரு கூறாக்கியானது, BC ஐ D இல் சந்திப்பின் $AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ ஆகும் என நிறுவுக.

$c > b$ எனின், கோணம் A யின் வெளியிரு கூறாக்கியானது BC ஐ E இல் சந்திப்பின் AE இற்குரிய இயல்பொத்த கோவையொன்றைப் பெறுக.

கோணம் DAE இன் உள்ளிரு கூறாக்கியானது, DE ஐ X இல் சந்திப்பின்

$AX = \frac{\sqrt{2}\,bc.\sin A}{c\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right) + b\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right)}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

$b = c$ எனின், AE, AX பற்றி யாது கூறமுடியும்?

(1987)

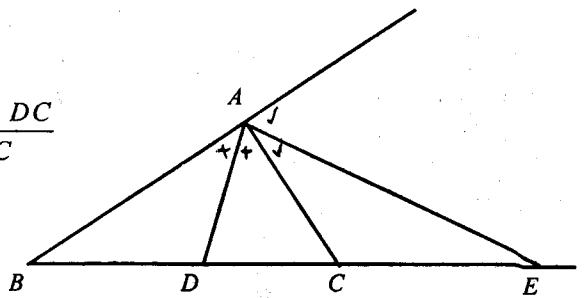
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$ (உள்ளிரு கூறாக்கி)

$$\frac{c}{b} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{c+b}{b} = \frac{BD+DC}{DC}$$

$$\frac{b+c}{b} = \frac{BC}{DC}$$

$$DC = \frac{ab}{b+c}$$



ΔADC இல், $\frac{DC}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{AD}{\sin C}$

learnium.org

ΔADC இல், $\frac{DC}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{AD}{\sin C}$

$$AD = \frac{DC \cdot \sin C}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{ab \sin C}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{bc \cdot \sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} \qquad [a\sin C = c\sin A]$$

$$AD = \frac{2bc \cdot \cos\frac{A}{2}}{(b+c)} \text{ ----------(1)}$$

கோணம் A இன் வெளி இருகூறாக்கி AE ஆகும்.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE} ; \frac{c}{b} = \frac{BE}{CE}$$

$$\frac{c}{b} - 1 = \frac{BE}{CE} - 1$$

$$\frac{c-b}{b} = \frac{BC}{CE} = \frac{a}{CE}$$

$$CE = \frac{ab}{c-b}$$

ΔACE இல், $\frac{AE}{\sin C} = \frac{CE}{\sin\left(90 - \frac{A}{2}\right)}$

$$AE = \frac{CE \sin C}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{ab \sin C}{(c-b)\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{bc \cdot \sin A}{(c-b)\cos\frac{A}{2}} = \frac{2bc \cdot \sin\frac{A}{2}}{(c-b)} \text{ ----------(2)}$$

ΔADE இல் $\angle DAE$ இன் உள்ளிரு கூறாக்கி AX ஆகும்.

முடிபு (1) இலிருந்து

$$AX = \frac{2AD \cdot AE}{AD + AE} \cos\frac{\hat{DAE}}{2}$$

$$AX = \frac{\frac{2bc}{c+b}\cos\frac{A}{2} \cdot \frac{2bc}{c-b}\sin\frac{A}{2}}{\frac{2bc}{c+b}\cos\frac{A}{2} + \frac{2bc \cdot \sin\frac{A}{2}}{c-b}} \cdot \cos 45°$$

$$= \frac{2bc \cdot 2bc \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{A}{2}}{2bc\left[(c-b)\cos\frac{A}{2} + (c+b)\sin A/2\right]} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\ bc \cdot \sin A}{c\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right) + b\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right)}$$

$b = c$ எனின், AE, BC ஐச் சந்திக்காது. $AE \| BC$

$AD \perp BC$ ஆகும். $AX = \sqrt{2}\, b \cdot \cos\frac{A}{2}$

learnium.org

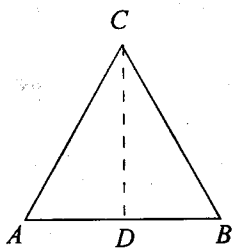
உதாரணம் 22

Δ என்பது ஒரு முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவாகும். வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் $\Delta = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$ என நிறுவுக. முக்கோணி ABC யின் கோணங்கள் A, B, C என்பவற்றின் உள்ளிரு கூறாக்கிகள் எதிர்ப்பக்கங்களை முறையே D, E, F ஆகியவற்றில் வெட்டுகின்றன. முக்கோணி ABC யின் உள்வட்டமையம் I ஆகும்.

$AI = \dfrac{2\Delta \operatorname{cosec} A/2}{a+b+c}$ எனக்காட்டுக.

முக்கோணி D, E, F இன் பரப்பளவு $\dfrac{2abc\Delta}{(b+c)(c+a)(a+b)}$ எனவும் காட்டுக.

(1988)

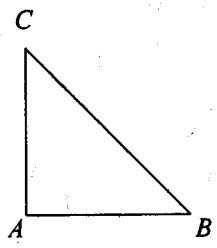


ΔABC இன் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2} AB \cdot CD$

$= \frac{1}{2} c \cdot b \sin A$

$= \frac{1}{2} bc \sin A$



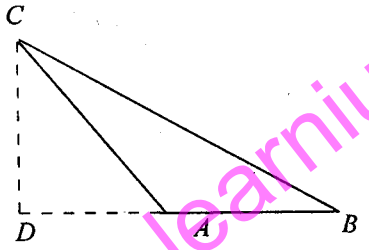
ΔABC இன் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2} AB \cdot AC$

$= \frac{1}{2} c \cdot b$

$= \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin \frac{\pi}{2}$

$= \frac{1}{2} b \cdot c \sin A$



ΔABC இன் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2} AB \cdot CD$

$= \frac{1}{2} c \cdot b \sin (\pi - A)$

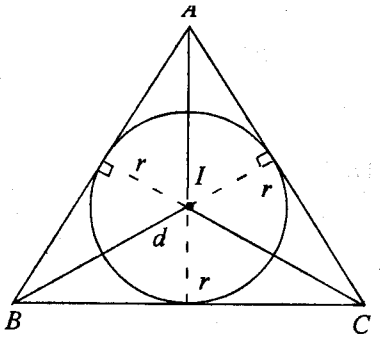
$= \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$

$\Delta ABC = \Delta AIB + \Delta BIC + \Delta CIA$

$\Delta = \frac{1}{2} c \cdot r + \frac{1}{2} b \cdot r + \frac{1}{2} a \cdot r$

$= \frac{r}{2}(a+b+c)$

$r = \dfrac{2\Delta}{a+b+c}$



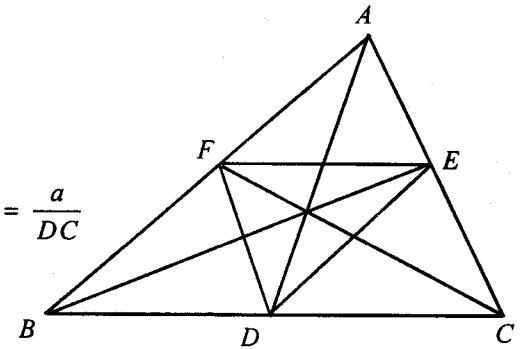
$AI = r \operatorname{cosec} \frac{A}{2} = \dfrac{2\Delta}{a+b+c} \operatorname{cosec} \frac{A}{2}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

$\frac{c}{b} = \frac{BD}{DC}$

$\frac{c+b}{b} = \frac{BD+DC}{DC} = \frac{BC}{DC} = \frac{a}{DC}$

$DC = \dfrac{ab}{c+b}$



இதேபோல் $CE = \dfrac{ba}{a+c}$

ΔDEC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ab}{a+c} \cdot \sin C$

$= \dfrac{ab}{(a+c)(b+c)} \Delta$ (ΔABC யின் பரப்பளவு)

ΔAEF இன் பரப்பளவு $= \dfrac{bc}{(b+a)(c+a)} \Delta$

learnium.org

ΔBFD இன் பரப்பளவு $= \dfrac{ca}{(a+b)(b+c)}\Delta$

ΔDEF இன் பரப்பளவு $= \Delta - \left\{\dfrac{ab}{(a+c)(b+c)} + \dfrac{bc}{(b+a)(c+a)} + \dfrac{ca}{(c+b)(a+b)}\right\}$

$$= \Delta\left[\frac{(a+b)(b+c)(c+a) - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a)}{(a+c)(b+c)(c+a)}\right]$$

$$= \Delta\left[\frac{2abc}{(a+c)(b+c)(c+a)}\right]$$

உதாரணம் 23

வழமையான குறிப்பீட்டுக்களுடன் $\cos A = \dfrac{b^2+c^2+a^2}{2bc}$ என நிறுவுக.

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ என உய்த்தறிக.

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b}$ எனின்,

(a) $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin C} = \dfrac{2}{\sin C}$ எனவும்,

(b) $\dfrac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} = \dfrac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}$ எனவும் நிறுவுக.

(1989)

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)}{(2bc)^2}$$

$$= \frac{(2bc)^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{(2bc)^2}$$

$$= \frac{\left(2bc - b^2 - c^2 + a^2\right)\left(2bc + b^2 + c^2 - a^2\right)}{(2bc)^2}$$

$$= \frac{\left[a^2 - (b-c)^2\right]\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2c^2}$$

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{4a^2b^2c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c+a)(c+a-b)}$$

இவ்வாறே, $\dfrac{b^2}{\sin^2 B}$, $\dfrac{c^2}{\sin^2 C}$ என்பனவும் பெறப்படும்.

$$\therefore \frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} = \frac{c^2}{\sin^2 C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad [a, b, c, \sin A, \sin B, \sin C > O]$$

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b}$ எனின்,

(a) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = k$ என்க.

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} = \frac{k}{a} + \frac{k}{c}$$

$$= k \cdot \frac{2}{b} = 2 \cdot \frac{1}{\sin B} = \frac{2}{\sin B}$$

learnium.org

$$\cos = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$$

$$2\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

$$= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{4bc}{(a-b+c)(a+b-c)} + \frac{4ab}{(c-a+b)(c+a-b)}$$

$$= \frac{4b}{(b-c+a)(b+c-a)} \left[\frac{c(c-a+b) + a(b+a-c)}{a-b+c} \right]$$

$$= \frac{8ac}{(b-c+a)(b+c-a)} \left[\frac{c\left(c-a+\frac{2ac}{c+a}\right) + a\left(a-c+\frac{2ac}{a+c}\right)}{(a+c)\left\{a+c-\frac{2ac}{a+c}\right\}} \right]$$

$$= \frac{8ac}{(b-c+a)(b+c-a)} \left[\frac{c(c-a)(c+a) + 2ac^2 + a(a-c)(a+c) + 2a^2c}{(a+c)(a^2+c^2)} \right]$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$$

$$\frac{a+c}{ac} = \frac{2}{b}$$

$$b = \frac{2ac}{a+c}$$

$$= \frac{8ac}{(b-c+a)(b+c-a)} \left[\frac{(c+a)\{c(c-a) + 2ac + a(a-c)\}}{(a+c)(a^2+c^2)} \right]$$

$$= \frac{8ac}{(b-c+a)(b+c-a)} \left[\frac{(a+c)(a^2+c^2)}{(a+c)(a^2+c^2)} \right]$$

$$= \frac{8ac}{(b-c+a)(b+c-a)} = 2 \times \frac{4ac}{(b-c+a)(b+c-a)}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 \frac{B}{2}}$$

உதாரணம் 24

முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் a, b, c உம் அரைச்சுற்றளவு s உம் குத்துயரங்கள் h_1, h_2, h_3 உம், உள்வட்ட ஆரை r உம் எனின், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$

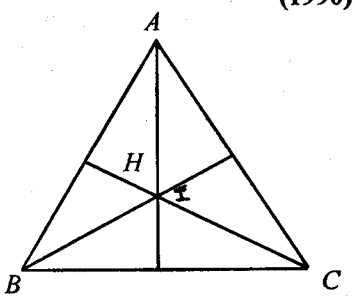
(ii) கோணங்கள் ABC என்பன $1:2:4$ என இருப்பின், $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

(iii) $2\left(PA^2 + PB^2 + PC^2\right) = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{48s(s-a)(s-b)(s-c)}$

இங்கு P என்பது, அதில் (P யில்) முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $120°$ அமைக்குமாறு முக்கோணத்தினுள் ஒரு புள்ளியாகும்.

(1990)

(i) முக்கோணியின் செங்குத்துமையம் H
உள்வட்டமையம் I என்க.
உள்வட்ட ஆரை r.



$\Delta AIB + \Delta BIC + \Delta AIC = \Delta ABC$

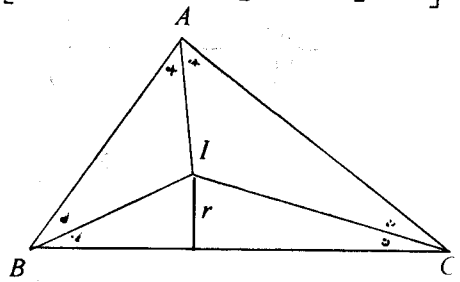
learnium.org

$$\frac{1}{2}c\cdot r+\frac{1}{2}a\cdot r+\frac{1}{2}b\cdot r=\Delta ABC$$

$$\frac{\frac{1}{2}cr}{\frac{1}{2}c\cdot h_3}+\frac{\frac{1}{2}ar}{\frac{1}{2}a\cdot h_1}+\frac{\frac{1}{2}br}{\frac{1}{2}b\cdot h_2}=1\left[\Delta ABC=\frac{1}{2}a\cdot h=\frac{1}{2}b\cdot h_2=\frac{1}{2}c\cdot h_3\right]$$

$$r\left[\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right]=1$$

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$$



(ii) $A=\frac{\pi}{7}$, $B=\frac{2\pi}{7}$, $C=\frac{4\pi}{7}$

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=k$$

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k\left[\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}\right]$$

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{k\cdot 2\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}}$$

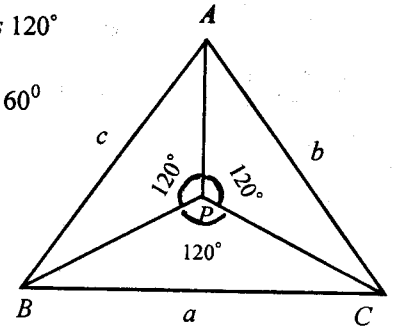
$$=\frac{k\cdot 2\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}}=k\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{a}$$

ஆகவே $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$

(iii) $a^2=PB^2+PC^2-2PB\cdot PC\cdot\cos 120^\circ$

$=PB^2+PC^2+2PB\,.\,PC\,.\,\cos 60^0$

$=PB^2+PC^2+PB\,.\,PC$



இவ்வாறு b^2, c^2 என்பவற்றைக் கருதுவதால்,

எனவே,

$$a^2+b^2+c^2=2\left(PA^2+PB^2+PC^2\right)+PB\cdot PC+PC\cdot PA+PA\cdot PB$$

$$=2\left(PA+PB+PC\right)^2-3\left(PB\cdot PC+PC\cdot PA+PA\cdot PB\right)\text{ --------(1)}$$

$2s=a+b+c$

$48s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)$

$$=3\times 2s\times(2s-2a)\,(2s-2b)\,(2s-2c)$$

$$=3\,(a+b+c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)\,(a+b-c)$$

$$=3\left[(b+c)^2-a^2\right]\left[a-(b-c)\right]\left[a+(b-c)\right]$$

$$=3\left[(b+c)^2-a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]$$

$$=3\times 2bc\,(1+\cos A)\times 2\,bc\,(1-\cos A)$$

$$=3\,(2bc)^2\cdot\sin^2 A$$

$$\sqrt{48s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{3}\times 2bc\cdot\sin A$$

$$=\sqrt{3}\times 4\times\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$$

$$=4\sqrt{3}\,\Delta\text{ ---------- (2)}$$

learnium.org

$$\Delta ABC = \Delta APB + \Delta BPC + \Delta CPA$$

$$\Delta = \frac{1}{2} PA \cdot PB \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} PB \cdot PC \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} PC \cdot PA \cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PA\right]$$

$$4\sqrt{3}\,\Delta = 3\left(PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PA\right) \text{----------(3)}$$

(1) இலிருந்து, (2), (3) என்பவற்றையும் பிரயோகித்து,

$$2\left(PA + PB + PC\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 3\left(PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PA\right)$$

$$2\left(PA + PB + PC\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{48s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

உதாரணம் 25

முக்கோணி ABC இல் வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன்

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ என நிறுவுக.

(i) ஒரு முக்கோணி ABC யின் C யிற்கு அப்பால் உள்ள பக்கம் AB மீது ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC_1 வரையப்பட்டுள்ளது. Δ என்பது முக்கோணியின் பரப்பளவெனின்,

$CC_1^{\,2} = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2\sqrt{3}\,\Delta$ எனக் காட்டுக.

(ii) ABC என்னும் ஒரு முக்கோணியில் $a = 4$, $b = 3$ ஆகும்.

A, B ஆகியவற்றினூடான இடையங்கள் தம்முள் செங்குத்தெனின்

$\cos C = \frac{5}{6}$ எனக்காட்டுக.

(1990 விசேட)

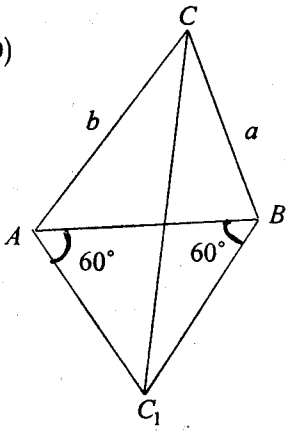
(i) $CC_1^{\,2} = AC^2 + AC_1^{\,2} - 2\,AC \cdot AC_1 \cdot \cos\left(A + 60\right)$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cdot\left(\cos A \cdot \cos 60 - \sin A \cdot \sin 60\right)$

$= b^2 + c^2 - bc\cdot\cos A + \sqrt{3}\,bc\cdot\sin A$

$= b^2 + c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\right) + 2\sqrt{3}\,\Delta$

$= \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 + a^2\right) + 2\sqrt{3}\,\Delta$



(ii) ΔABC இல்,

$\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba}$

$= \frac{4^2 + 3^2 - c^2}{24}$

$= \frac{25 - c^2}{24}$ ----------(1)

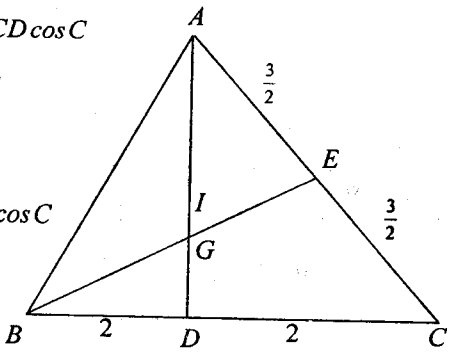
$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2\,AC\cdot CD\cos C$

$AD^2 = 9 + 4 - 2\times 3\times 2\cos C$

$= 13 - 12\cos C$

$BE^2 = 4^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\times 4\times\frac{3}{2}\cos C$

$= \frac{73}{4} - 12\cos C$



learnium.org

$$AB^2 = AG^2 + BG^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}AD\right)^2 + \left(\frac{2}{3}BE\right)^2$$

$$C^2 = \frac{4}{9}\left[(13 - 12\cos C) + \left(\frac{73}{4} - 12\cos C\right)\right]$$

$$= \frac{4}{9}\left[\frac{125}{4} - 24\cos C\right] \quad \text{---------- (2)}$$

(1), (2) இலிருந்து

$$25 - 24\cos C = \frac{125}{9} - \frac{32}{3}\cos C$$

$$225 - 216\cos C = 125 - 96\cos C$$

$$100 = 120\cos C$$

$$\cos C = \frac{5}{6}$$

உதாரணம் 26

(i) வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் ஒரு முக்கோணி ABC இற்கு $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ என நிறுவுக.

$a - b = k\,c$ எனின்,

$\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = k\cos\frac{C}{2}$ எனவும்,

$\frac{k\cdot\sin A}{1-k\cdot\cos B} = \frac{a}{b}\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$ எனவும் காட்டுக.

(i) கோணம் $\theta\,(>0)$ என்பது $\cos\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ என்னும் தொடர்பால் தரப்படுகிறது. இங்கு A,b,c என்பன முக்கோணி ABC இற்கு பிரயோகிக்கப் படுகின்றவாறு அவற்றின் வழக்கமான கருத்துக்களை உடையன.

$a = (b+c)\sin\theta$ என நிறுவுக.

(1991)

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin A - \sin B}{a - b} = \frac{\sin C}{c}$$

$\frac{c}{a-b} = \frac{\sin C}{\sin A - \sin B} = \frac{1}{k}$ ஆகும்.

$$\sin A - \sin B = k\sin C$$

$$2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = 2k\cdot\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = k\cdot\cos\frac{C}{2}$$

$$\frac{k\sin A}{1-k\cdot\cos B} = \frac{\frac{a-b}{c}\cdot\sin A}{1-\frac{a-b}{c}\cdot\cos B}$$

$$= \frac{(a-b)\sin A}{c-(a-b)\cos B}$$

$$= \frac{(a-b)\sin A}{c - a\cos B + b\cos B}$$

$$= \frac{(a-b)\sin A}{b\cos A + b\cos B}$$

learnium.org

$$= \frac{a-b}{b} \cdot \frac{\sin A}{\cos A + \cos B}$$

$$= \frac{\sin A - \sin B}{\sin B} \times \frac{\sin A}{\cos A + \cos B}$$

$$= \frac{\sin A}{\sin B} \times \frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

(ii) $\cos\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cos\frac{A}{2}$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{4bc}{(b+c)^2} \cos^2\frac{A}{2}$$

$$= \frac{b^2 + 2bc + c^2 - 4bc \cdot \cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - 2bc\left(2\cos^2\frac{A}{2} - 1\right)}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}{(b+c)^2}$$

$$(b+c)^2 \sin^2\theta = a^2$$

$$(b+c)\sin\theta = a$$

உதாரணம் 27

வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பெறுக.

(i) ஒரு முக்கோணி ABC யினது பக்கம் BC யினது நடுப்புள்ளி D எனில்,

$4AD^2 = a^2 + 4bc \cdot \cos A$ என நிறுவுக.

(ii) ஒரு முக்கோணி ABC யினது கோணம் BAC யினது உள்ளிரு கூறாக்கி AX எனின், $AX = \frac{2bc \cdot \cos\frac{A}{2}}{b+c}$ ஆகுமென நிறுவுக.

(iii) A, B, C என்பன முக்கோணி ஒன்றின் கோணங்கள் எனின்,

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$ ஆகுமென நிறுவுக.

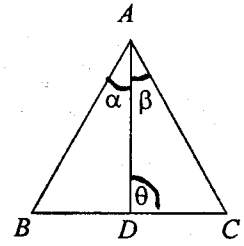
(1991 விசேட)

learnium.org

(i) (1) $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC \cdot \cos ADC$

(2) $AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \cos ADB$

(1)+(2) $AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + DC^2 + DB^2$



$$b^2 + c^2 = 2AD^2 + 2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$b^2 + c^2 = 2AD^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$4AD^2 = 2\left(b^2 + c^2\right) - a^2$$

$$= 2\left[a^2 + 2bc\cos A\right] - a^2$$

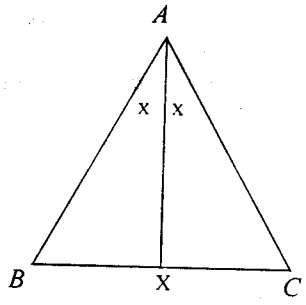
$$= a^2 + 4bc\cos A$$

(ii) $\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC}$

$\frac{AB + AC}{AC} = \frac{BX + XC}{XC}$

$\frac{c + b}{b} = \frac{a}{XC}$

$XC = \frac{ab}{b + c}$



ΔAXC இல்,

$\frac{AX}{\sin C} = \frac{XC}{\sin\frac{A}{2}}$

$AX = \frac{ab}{b + c} \cdot \frac{\sin C}{\sin\frac{a}{2}}$

$= \frac{cb}{b + c} \frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}}$ $\quad [a \cdot \sin C = c \cdot \sin A\ ]$

$= \frac{2bc \cdot \cos\frac{A}{2}}{b + c}$

(iii) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$= \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C$

$= 1 + \frac{1}{2}[\cos 2A + \cos 2B] + \cos^2 C$

$1 + \cos(A+B) \cdot \cos(A-B) + \cos^2 C$

$1 - \cos C\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$

$1 - 2\cos C \cdot \cos A \cdot \cos B$

உதாரணம் 28

வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணம் ABC இல்,

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ என நிறுவுக.

$BD : DC = m : n$ ஆகுமாறு இம்முக்கோணியின் பக்கம் BC மீதுள்ள ஒரு புள்ளி D ஆகும். $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$, $\angle CDA = \theta$ எனின்,

$(m + n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$

$= n\cot C - m\cot C$ என நிறுவுக.

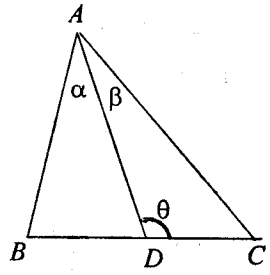
பக்கம் AB யின் நடுப்புள்ளி F ஆகும். உச்சி A யிலிருந்து பக்கம் BC க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடி L ஆகும். CF உம் AL உம் P யில் இடைவெட்டுகின்றன.

$\tan\angle APF = \frac{2 - \cot B(\cot A - \cot B)}{\cot A + \cot B}$ எனக்காட்டுக.

(1992)

$\frac{m}{n} = \frac{BD}{DC}$; $\angle ABD = \theta - \alpha$,

$= \frac{BD}{AD} \cdot \frac{AD}{DC}$ $\angle ACB = \pi - (\theta+\beta)$



$\frac{m}{n} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)} \cdot \frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta}$

$\frac{m}{n} = \frac{\sin\alpha(\sin\theta \cdot \cos\beta + \cos\theta \cdot \sin\beta)}{\sin\beta(\sin\theta \cdot \cos\alpha - \cos\theta \cdot \sin\alpha)}$

$m\sin\beta \cdot [\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha] = n\sin\alpha \cdot [\sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta]$

$\sin\theta \cdot [m\sin\beta\cos\alpha - n\sin\alpha\cos\beta] = \cos\theta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta(m+n)$

$\frac{m\sin\beta \cdot \cos\alpha - n\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = (m+n)\cot\theta$

$m\cot\alpha - n\cot\beta = (m+n)\cot\theta$

learnium.org

$$\frac{m}{n} = \frac{BD}{DC} = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{AD}{DC}$$

$$= \frac{\sin(\theta - B)}{\sin B} \cdot \frac{\sin C}{\sin[\pi - (\theta + C)]}$$

$$= \frac{\sin(\theta - B)}{\sin B} \cdot \frac{\sin C}{\sin(\theta + C)}$$

$$= \frac{[\sin\theta \cdot \cos B - \cos\theta \cdot \sin B]\sin C}{[\sin\theta \cdot \cos C + \cos\theta \cdot \sin C]\sin B}$$

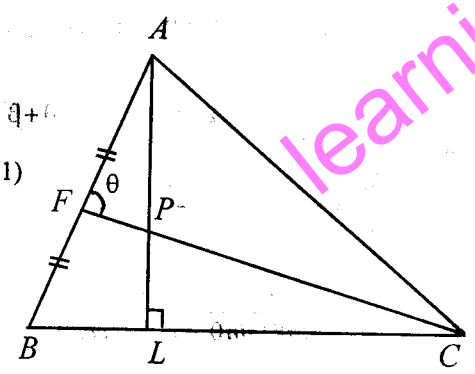
$$m \sin B [\sin\theta \cdot \cos C + \cos\theta \cdot \sin C] = n \sin C [\sin\theta \cdot \cos B - \cos\theta \cdot \sin B]$$

$$\sin\theta [m \sin B \cdot \cos C - n \sin C \cdot \cos B] = -\cos\theta (m+n) \sin B \cdot \sin C$$

$$n \cot B - m \cot C = (m+n) \cot\theta$$

ΔABC இல், $AF = FB$

$\angle AFC = \theta$



(1+1) $\cot\theta = 1 \cot B - 1 \cot A$

$$2 \cot\theta = \cot B - \cot A \quad \text{-------(1)}$$

ΔAPF இல்

$$\angle APF = \pi - \left[\theta + \left(\frac{\pi}{2} - B\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - (\theta - B)$$

$$\tan APF = \tan\left[\frac{\pi}{2} - (\theta - B)\right]$$

$$= \cot(\theta - B) = \frac{1 + \tan\theta \cdot \tan B}{\tan\theta - \tan B}$$

$$\tan APF = \frac{\cot\theta + \tan B}{1 - \cot\theta \cdot \tan B} \quad \text{----------(2)}$$

(1) இலிருந்து,

$$\tan APF = \frac{\frac{\cot B - \cot A}{2} + \tan B}{1 - \frac{(\cot B - \cot A)}{2} \cdot \tan B}$$

$$= \frac{\frac{\cot B - \cot A}{2} + \frac{1}{\cot B}}{1 - \frac{(\cot B - \cot A)}{2} \cdot \frac{1}{\cot B}}$$

$$= \frac{2 + \cot B(\cot B - \cot A)}{\cot B + \cot A}$$

$$= \frac{2 - \cot B(\cot A - \cot B)}{\cot B + \cot A}$$

learnium.org

உதாரணம் 29

(a) வழமையான குறிப்பீட்டுடன், ஒரு முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு Δ ஆனது, $\Delta = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$ என்பதாற் தரப்படுகிறது என நிறுவுக. அதோடு

$\frac{\Delta}{\tan\frac{A}{2}} + \Delta \tan\frac{A}{2} = bc$ எனவும், $\frac{\Delta}{s \tan\frac{A}{2}} + s = b + c$ எனவும் நிறுவுக.

இங்கு $2s = a + b + c$

(b) ஒரு முக்கோணி ABC யிற்கு,

$\tan\angle AOH = \frac{\sin 2B - \sin 2C}{1 + \cos 2B + \cos 2C}$ என நிறுவுக.

இங்கு O, H என்பன முறையே முக்கோணியின் சுற்றுமையம், நிமிர்மையம் என்பனவாகும்.

(1994)

(a) $\Delta = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$

$= \frac{\Delta}{\tan\frac{A}{2}} + \Delta \cdot \tan\frac{A}{2}$

$= \frac{1}{2} bc \cdot \sin A \cdot \frac{1}{\tan\frac{A}{2}} + \frac{1}{2} bc \cdot \sin A \cdot \tan\frac{A}{2}$

$= \frac{1}{2} bc \cdot \sin A \left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \right)$

$= \frac{1}{2} bc \times 2 \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} \times \frac{1}{\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}} = bc$

$\frac{\Delta}{s\tan\frac{A}{2}} + s = \frac{\frac{1}{2} bc \cdot \sin A}{\frac{1}{2}(a+b+c)} \cdot \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \left(\frac{a+b+c}{2} \right)$

$= \frac{2bc}{(a+b+c)} \cos^2\frac{A}{2} + \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{bc}{a+b+c}[1 + \cos A] + \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{bc}{a+b+c}\left[1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right] + \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{bc}{a+b+c}\left[\frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}\right] + \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{bc}{a+b+c} \times \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} + \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{b+c-a}{2} + \frac{a+b+c}{2} = b+c$

(b) ΔAHB இல், $\angle HAB = 90^\circ - B$

$\angle ABH = 90^\circ - A$

ஆகவே, $\angle AHB = (A + B)$

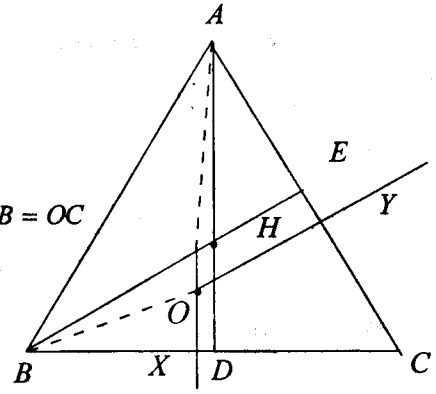
$\frac{AH}{\sin(90-A)} = \frac{AB}{\sin(A+B)}$

$AH = \frac{c \cdot \cos A}{\sin C}$ ----------(1)

O சுற்றுவட்ட மையம். ஆகவே $OA = OB = OC$

$BX = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a$

$OB = \frac{a}{2\sin A} = OA$ ----------(2)



$\angle HAO = (90^\circ - B) - (90^\circ - C) = (C - B)$

$\angle AOH = \theta$ என்க.

$\therefore \angle AHO = 180^\circ - (C - B + \theta)$

ΔAOH இல், $\frac{AH}{\sin\theta} = \frac{OA}{\sin(C-B+\theta)}$ ----------(3)

learnium.org

(1),(2) இலிருந்து, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ என்பதால்,

$$AH = \frac{c}{\sin C}\cos C = \frac{a}{\sin A}\cos A$$

$$OA = \frac{a}{2\sin A}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{a \cdot \cos A}{\sin A \sin\theta} = \frac{a}{2\sin A} \cdot \frac{1}{\sin(C-B+\theta)}$$

$$\frac{\cos A}{\sin\theta} = \frac{1}{2\sin(C-B+\theta)}$$

$$\sin\theta = 2\cos A\left[\sin(C-B)\cos\theta + \cos(C-B)\sin\theta\right]$$

$$\sin\theta\left[1 - 2\cos A \cdot \cos(C-B)\right] = 2\cos A \cdot \sin(C-B)\cdot\cos\theta$$

$$\tan\theta\left[1 - 2\cos A \cdot \cos(C-B)\right] = 2\cos A \cdot \sin(C-B)$$

$$\tan\theta\left[1 + 2\cos(B+C)\cdot\cos(C-B)\right] = -2\cos(B+C)\cdot\sin(C-B)$$

$$\tan\theta\left[1 + \cos 2B + \cos 2C\right] = \sin 2B - \sin 2C$$

$$\tan\theta = \frac{\sin 2B - \sin 2C}{1 + \cos 2B + \cos 2C}$$

உதாரணம் 30

(i) வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC இல், $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ எனக்காட்டுக.

ABC எனுமொரு முக்கோணியில் $C = \frac{\pi}{2} + A$ ஆயிருக்க, மிகச்சிறிய கோணம் A ஆகவும், மிகப்பெரிய கோணம் C ஆகவும் உள்ளன. பொது வித்தியாசம் d ஆகவுள்ள கூட்டல் விருத்தியில் a,b,c உள்ளன.

$\sin A = \frac{a}{\left[2a^2 + 4ad + 4d^2\right]^{1/2}}$ எனக் காட்டி,

$\cos A$ இற்கும் $\cos 2A$ இற்குமான ஒத்த கோவைகளைப் பெறுக.

$\frac{a}{d} = \sqrt{7} - 1$ என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) ABC ஒரு முக்கோணி. O, H என்பன முறையே அதன் சுற்றுமையமும், நிமிர் மையமும் ஆகும். கோடு OH ஆனது BC யுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{3 - \tan B \tan C}{\tan B - \tan C}\right)$ எனும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளதெனக் காட்டுக.

(1995)

(i) ΔABC இல் மிகச்சிறிய கோணம் $A = A$

மிகப் பெரிய கோணம் $\frac{\pi}{2} + A = C$

ஆகவே $B = \frac{\pi}{2} - 2A$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ என்பதில்

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2A\right)} = \frac{c}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + A\right)}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos 2A} = \frac{c}{\cos A}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\cos A} \Rightarrow \frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{c^2}{\cos^2 A} = \frac{a^2 + c^2}{1}$$

$$\sin^2 A = \frac{a^2}{a^2 + c^2}, \quad \cos^2 A = \frac{c^2}{a^2 + c^2}$$

$c = a + 2d$ என்பதால்

learnium.org

$$\sin^2 A = \frac{a^2}{a^2 + (a+2d)^2}$$

$$= \frac{a^2}{2a^2 + 4ad + 4d^2}$$

$0 < A < \frac{\pi}{2}$ என்பதால்

$$\sin A = \frac{a}{\left[2a^2 + 4ad + 4d^2\right]^{1/2}}$$ ஆகும். ----------(1)

$$\cos^2 A = \frac{(a+2d)^2}{2a^2 + 4ad + 4d^2}$$

$0 < A < \frac{\pi}{2}$ என்பதால், $$\cos A = \frac{a+2d}{\left[2a^2 + 4ad + 4d^2\right]^{1/2}}$$ ----------(2)

(1) இலிருந்து $\frac{a}{\sin A} = \left[2a^2 + 4ad + 4d^2\right]^{1/2}$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos 2A} = \frac{c}{\cos A} = \left[2a^2 + 4ad + 4d^2\right]^{1/2}$$

$$\cos 2A = \frac{b}{\left[2a^2 + 4ad + 4d^2\right]^{1/2}} = \frac{a+d}{\left[2a^2 + 4ad + 4d^2\right]^{1/2}}$$ ------(3)

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\frac{a+d}{\left[2a^2 + 4ad + d^2\right]^{1/2}} = 1 - 2 \times \frac{a^2}{2a^2 + 4ad + 4d^2}$$

$$a + d = \frac{4ad + 4d^2}{\left[2a^2 + 4ad + 4d^2\right]^{1/2}} = \frac{4d(a+d)}{\left[2a^2 + 4ad + 4d^2\right]^{1/2}}$$

$$2a^2 + 4ad + 4d^2 = 16d^2$$

$$2a^2 + 4ad - 12d^2 = 0$$

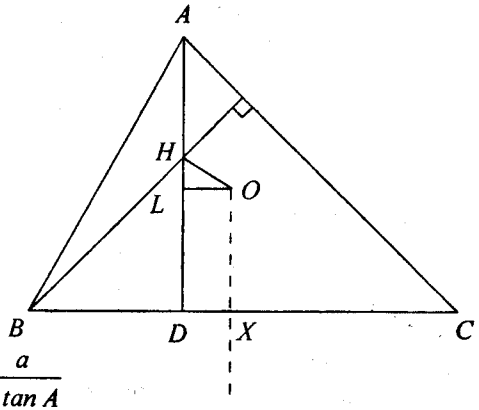
$$a^2 + 2ad - 6d^2 = 0 \qquad \left(\frac{a}{d}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{d}\right) - 6 = 0$$

$$\frac{a}{d} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$a, d > 0$. எனவே $\frac{a}{d} = \frac{\sqrt{7} - 1}{2}$

(ii) ΔABD இல்,



$$BD = c \cdot \cos B$$

$$HD = \frac{c \cdot \cos B}{\tan C}$$

$$HL = HD - LD$$

$$= HD - OX = \frac{c \cdot \cos B}{\tan C} - \frac{a}{2\tan A}$$

$$= \frac{c}{\sin C} \cdot \cos B \cdot \cos C - \frac{a \cdot \cos A}{2\sin A}$$ ---------- (1)

$$OL = BX - BD = \frac{a}{2} - c \cdot \cos B$$

$\angle LOH = \theta$ எனின்,

learnium.org

$$\tan\theta = \frac{HL}{LO} = \frac{\dfrac{c\cdot\cos B\cdot\cos C}{\sin C} - \dfrac{a\cdot\cos A}{2\sin A}}{\dfrac{a}{2} - c\cdot\cos B}$$

$$\left[\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\right] \quad = \frac{\dfrac{a}{2\sin A}\left[2\cos B\cdot\cos C - \cos A\right]}{\dfrac{a}{2\sin A}\left[\sin A - 2\sin C\cdot\cos B\right]}$$

$$= \frac{2\cos B\cdot\cos C + \cos(B+C)}{\sin(B+C) - 2\sin C\cdot\cos B}$$

$$= \frac{3\cos B\cdot\cos C - \sin B\cdot\sin C}{\sin B\cos C - \cos B\sin C}$$

$$= \frac{3 - \tan B\cdot\tan C}{\tan B - \tan C}$$

உதாரணம் 31

(i) முக்கோணி தொடர்பான சைன் விதியைக் குறிப்பிடுக.
வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC இல்,

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ என நிறுவுக.

$\dfrac{\sin(B-C)}{\sin A} = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2}$ எனக்காட்டுக.

(ii) ABC எனும் முக்கோணியின் கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள் இடைவெட்டும் புள்ளி I உம், பக்கங்களின் இருகூறாக்கிகள் இடைவெட்டும் புள்ளி O உம் ஆகும். A ஒரு கூர்ங்கோணம் எனின், BC இற்கு IO இன் சாய்வு

$\tan^{-1}\left|\dfrac{\cos B + \cos C - 1}{\sin B - \sin C}\right|$ எனக்காட்டுக.

(1996)

(i)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} = \frac{c^2}{\sin^2 C} = \frac{b^2 - c^2}{\sin^2 B - \sin^2 C}$$

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2 - c^2}{\sin^2 B - \sin^2 C}$$

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\sin^2 A} = \frac{(1-\cos 2B) - (1-\cos 2C)}{2\sin^2 A}$$

$$= \frac{\cos 2C - \cos 2B}{2\sin^2 A}$$

$$= \frac{2\sin(B+C)\cdot\sin(B-C)}{2\sin^2 A}$$

$$= \frac{\sin(B-C)}{\sin A}$$

I – உள்வட்ட மையம்,
O – சுற்றுவட்ட மையம்

$$BM = MC = \frac{1}{2}a$$

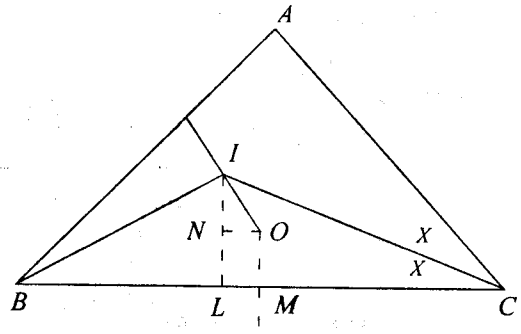
$$IL = r$$

$$BL + LC = BC$$

$$r\cot\frac{B}{2} + r\cot\frac{C}{2} = a$$

$$r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = a$$

$$r = \frac{a}{\cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2}}, \qquad OM = \frac{a}{2}\cot A$$



learnium.org

கோணம் $ION = \theta$ என்க.

$$\tan\theta = \frac{IN}{ON} = \frac{r - \frac{a}{2}\cot A}{\frac{a}{2} - r\cot\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{2r - a\cot A}{a - 2r\cot\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{2 - \frac{a}{r}\cot A}{\frac{a}{r} - 2\cot\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{2 - \left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)\cot A}{\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} - 2\cot\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{2 - \left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)\cot A}{\left(\cot\frac{C}{2} - \cot\frac{B}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} + \sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cdot\frac{\cos(B+C)}{\sin(B+C)}}{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) - \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) + \cos(B+C)\cdot\frac{1}{2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) - 2\cos^2\left(\frac{B+C}{2}\right) + \cos(B+C)}{2\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos B + \cos C - 1}{\sin B - \sin C}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{\cos B + \cos C - 1}{\sin B - \sin C}\right]$$

உதாரணம் 32

வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC இற்கு $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ என நிறுவுக.

(i) $\frac{b^2 - c^2}{a^2}\sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2}\sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2}\sin 2C = 0$ எனக்காட்டுக.

(ii) முக்கோணி ABC இன் நிமிர்மையம் P ஆகும். AP, BP, CP ஆகியன முக்கோணியின் எதிர்ப்பக்கங்களை முறையே K, L, M ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி KLM இலே $\angle MKL = 180° - 2A$ எனவும், $LM = a\cos A$ எனவும் காட்டுக.

(1997)

(i) $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\sin^2 B}{b^2} = \frac{\sin^2 C}{c^2}$$

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{b^2 - c^2}$$

learnium.org

$$\frac{b^2-c^2}{a^2} = \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\sin^2 A}$$

$$= \frac{(1-\cos 2B)-(1-\cos 2C)}{2\sin^2 A}$$

$$= \frac{\cos 2C - \cos 2B}{2\sin^2 A}$$

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\cdot \sin 2A = \frac{2\sin(B+C)\cdot\sin(B-C)}{2\cdot\sin^2 A}\cdot \sin 2A$$

$$= \frac{\sin(B-C)}{\sin A}\cdot 2\sin A\cos A$$

$$= 2\sin(B-C)\cdot\cos A$$

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C$$

$$= 2\left[\sin(B-C)\cos A + \sin(C-A)\cos B + \sin(A-B)\cos C\right]$$

$$= 0$$

(ii) நாற்பக்கல் $ACKM$ ஐக் கருதுக.

$\angle AMC = 90^\circ = \angle AKC$

எனவே $ACKM$ வட்ட நாற்பக்கல்

ஆகவே $\angle BKM = \angle LAM = A$

இதேபோல் $ALKB$ வட்ட நாற்பக்கல்.

$\angle LKC = \angle BAL = A$

$\therefore \angle MKL = 180^\circ - 2A$

ΔABL இல், $\angle ALB = 90^\circ$

$AL = AB\cos A = c\cdot\cos A$

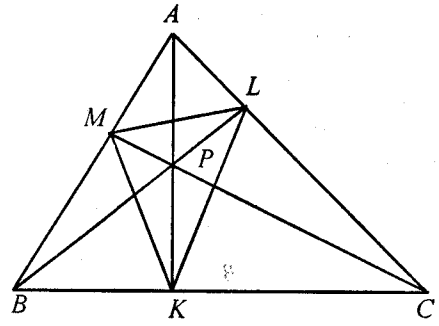
ΔAML இல்,

$$\frac{AL}{\sin\angle AML} = \frac{ML}{\sin A}$$

$$\frac{c\cdot\cos A}{\sin C} = \frac{ML}{\sin A}$$

$$ML = \frac{(c\sin A)\cos A}{\sin C}$$

$$= \frac{c}{\sin A}\cdot\sin A\cdot\cos A$$



$$= \frac{a}{\sin A}\cdot\sin A\cdot\cos A = a\cos A$$

learnium.org

உதாரணம் 33

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{7}{17}\right) = \frac{\pi}{4}$ எனக் காட்டுக.

(b) $\cos x + \cos 3x = \sin 2x + \sin 4x$ ஐத் தீர்க்க.

(c) $\cos 3\theta \equiv \cos\theta(2\cos 2\theta - 1)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\alpha = \frac{2\pi}{41}$ ஆக இருக்கும்போது

$(2\cos 11\alpha - 1)(2\cos 17\alpha - 1)(2\cos 31\alpha - 1)(2\cos 33\alpha - 1) = 1$ எனக்காட்டுக.

(1999)

$A = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$, $B = \tan^{-1}\left(\frac{7}{17}\right)$ என்க.

$\tan A = \frac{5}{12}$, $\tan B = \frac{7}{17}$, $0 < A, B < \frac{\pi}{4}$ ஆகும்.

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\cdot\tan B}$$

$$= \frac{\frac{5}{12} + \frac{7}{17}}{1 - \frac{5}{12} \times \frac{7}{17}}$$

$$= \frac{169}{169} = 1$$

$0 < A + B < \frac{\pi}{2}$ என்பதால்,

$$A + B = \pi/4$$

(b) $\cos x + \cos 3x = \sin 2x + \sin 4x$

$2\cos 2x \cdot \cos x = 2\sin 3x \cdot \cos x$

$\cos x\,(\cos 2x - \sin 3x) = 0$

$\cos x = 0$ அல்லது $\cos 2x - \sin 3x = 0$

$\cos x = \cos\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

$x = 2n\pi \pm \pi/2$ $\qquad$ $2x = 2n\pi \pm \left(\pi/2 - 3x\right)$

n - நிறையெண்

$2x = 2n\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$ $\qquad$ $2x = 2n\pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

$x = \frac{1}{5}\left[2n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad$ $x = -2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$x = 2m\pi + \frac{\pi}{2}$

n - நிறையெண் $\qquad$ $-m$ - நிறையெண்

(c) $\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$

$= \cos 2\theta \cdot \cos\theta - \sin 2\theta \cdot \sin\theta$

$= \cos 2\theta \cdot \cos\theta - 2\cos\theta \cdot \sin^2\theta$

$= \cos\theta\left[\cos 2\theta - 2\sin^2\theta\right]$

$= \cos\theta\left[\cos 2\theta - (1 - \cos 2\theta)\right]$

$= \cos\theta(2\cos 2\theta - 1)$

$2\cos 2\theta - 1 = \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$

$(2\cos 11\alpha - 1)(2\cos 17\alpha - 1)(2\cos 31\alpha - 1)(2\cos 33\alpha - 1)$

$$= \frac{\cos\frac{33\alpha}{2}}{\cos\frac{11\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{51\alpha}{2}}{\cos\frac{17\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{93\alpha}{2}}{\cos\frac{31\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{99\alpha}{2}}{\cos\frac{33\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{51\alpha}{2} \cdot \cos\frac{93\alpha}{2} \cdot \cos\frac{99\alpha}{2}}{\cos\frac{11\alpha}{2} \cdot \cos\frac{17\alpha}{2} \cdot \cos\frac{31\alpha}{2}}$$

$\alpha = \frac{\pi}{41}$ எனின்,

$$= \frac{\cos\frac{51\pi}{41} \cdot \cos\frac{93\pi}{41} \cdot \cos\frac{99\pi}{41}}{\cos\frac{11\pi}{41} \cdot \cos\frac{17\pi}{41} \cdot \cos\frac{31\pi}{41}}$$

$$= \frac{\left(-\cos\frac{10\pi}{41}\right) \cdot \cos\frac{11\pi}{41} \cdot \cos\frac{17\pi}{41}}{\cos\frac{11\pi}{41} \cdot \cos\frac{17\pi}{41} \cdot \left(-\cos\frac{10\pi}{41}\right)} = 1$$

learnium.org

உதாரணம் 34

(i) $x\sec\theta = 1 - y\tan\theta$

$x^2\sec^2\theta = 5 + y^2\tan^2\theta$ எனின்,

x, y இற்கிடையே θ ஐ சாராது தொடர்பு ஒன்றினைப் பெறுக.

(ii) $\cos(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\delta) = \cos(\alpha-\beta)\cdot\sin(\gamma-\delta)$ எனின்,

$\cot\alpha\cdot\cot\beta\cdot\cot\gamma = \cot\delta$ எனக்காட்டுக.

(iii) $\dfrac{ax}{\cos\theta} + \dfrac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$

$\dfrac{ax\sin\theta}{\cos^2\theta} - \dfrac{by\cos\theta}{\sin^2\theta} = 0$ எனின்,

$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = \left(a^2 - b^2\right)^{2/3}$ எனக்காட்டுக.

(i) $x\sec\theta = 1 - y\tan\theta$; $x^2\sec^2\theta = 5 + y^2\tan^2\theta$

$x\sec\theta + y\tan\theta = 1$ ---------- (1)

$x^2\sec^2\theta - y^2\tan^2\theta = 5$ ---------- (2)

(2) ÷ (1) $\Rightarrow x\sec\theta - y\tan\theta = 5$ ---------- (3)

(1) + (3), $2x\sec\theta = 6$

$x\sec\theta = 3$ ---------- (4)

(1) - (3), $2y\tan\theta = -4$

$y\tan\theta = -2$ ---------- (5)

(4) இலிருந்து, $\sec\theta = \dfrac{3}{x}$

(5) இலிருந்து, $\tan\theta = \dfrac{-2}{y}$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\left(\dfrac{3}{x}\right)^2 - \left(\dfrac{-2}{y}\right)^2 = 1$; $\dfrac{9}{x^2} - \dfrac{4}{y^2} = 1$

(ii) $\cos(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\delta) = \cos(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\delta)$

$\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \dfrac{\sin(\gamma-\delta)}{\sin(\gamma+\delta)} \Rightarrow$

$\dfrac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)} = \dfrac{\sin(\gamma-\delta) + \sin(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma-\delta) - \sin(\gamma+\delta)}$

$\dfrac{2\cos\alpha\cdot\cos\beta}{-2\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \dfrac{2\sin\gamma\cdot\cos\delta}{-2\cos\gamma\cdot\sin\delta}$

$\cot\alpha\cdot\cot\beta = \tan\gamma\cdot\cot\delta$

$\cot\alpha\cdot\cot\beta\cdot\cot\gamma = \cot\delta$

(iii) $\dfrac{ax}{\cos\theta} + \dfrac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$ ---------- (1)

$\dfrac{ax}{\cos^3\theta} = \dfrac{by}{\sin^3\theta} = k$ என்க. ---------- (2)

(2) இலிருந்து (1) இல் பிரதியிட,

$k\cos^2\theta + k\sin^2\theta = a^2 - b^2$

$k = a^2 - b^2$ ---------- (3)

(2), (3) இலிருந்து,

$\dfrac{ax}{\cos^3\theta} = \dfrac{by}{\sin^3\theta} = a^2 - b^2$

$\dfrac{(ax)^{2/3}}{\left(\cos^3\theta\right)^{2/3}} = \dfrac{(by)^{2/3}}{\left(\sin^3\theta\right)^{2/3}} = \left(a^2 - b^2\right)^{2/3}$

$\Rightarrow \dfrac{(ax)^{2/3} + (by)^{2/3}}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \left(a^2 - b^2\right)^{2/3}$

$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = \left(a^2 - b^2\right)^{2/3}$

learnium.org

உதாரணம் 35

(a) A, B, C என்பன முக்கோணி ஒன்றின் கோணங்களாக இருக்கும்போது

$cos^2 A + cos^2 B + cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$ என நிறுவுக.

(b) $2A + B = \frac{\pi}{4}$ எனில்,

$\tan B = \frac{1 - 2\tan A - \tan^2 A}{1 + 2\tan A - \tan^2 A}$ எனக் காட்டுக.

சமன்பாடு $x^2 + 2x - 1 = 0$ இன் ஒரு மூலம் $\tan\frac{\pi}{8}$ என்பதையும் அதன் பெறுமானம் $\sqrt{2} - 1$ என்பதையும் உய்த்தறிக.

$\tan\theta$ அதன் மற்ற மூலம் எனில் $(0, \pi)$ என்னும் வீச்சில் θ ஐக் காண்க.

(1993)

(a) $cos^2 A + cos^2 B + cos^2 C$

$= \frac{1}{2}\left[2cos^2 A + 2cos^2 B + 2cos^2 C\right]$

$= \frac{1}{2}\left[1 + cos2A + 1 + cos2B + 2cos^2 C\right]$

$= \frac{1}{2}\left[2 + 2cos(A+B)\cdot cos(A-B) + 2cos^2 C\right]$

$= \frac{1}{2}\left[2 - 2cosC\cdot cos(A-B) + 2cos^2 C\right]$

$= 1 - cosC\left[cos(A-B) + cos(A+B)\right]$

$= 1 - cosC \cdot 2cosA \cdot cosB$

$= 1 - 2cosA \cdot cosB \cdot cosC$

(b) $2A + B = \frac{\pi}{4}$

$B = \frac{\pi}{4} - 2A$

$\tan B = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2A\right)$

$\tan B = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan 2A}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan 2A}$

$\tan B = \frac{1 - \tan 2A}{1 + \tan 2A}$

$\tan B = \frac{1 - \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}{1 + \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}}$

$\tan B = \frac{1 - 2\tan A - \tan^2 A}{1 + 2\tan A - \tan^2 A}$

$A = \frac{\pi}{8}$ எனின், $B = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow \tan B = 0$

$\therefore \tan A \left(= \tan \pi/8\right) = x$ என்க.

$1 - 2x - x^2 = 0$

$x^2 + 2x - 1 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$

$x = -1 \pm \sqrt{2}$

learnium.org

$0 < tan\,\pi/8 < 1$ என்பதால்

$$tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$ ஆகும்.

மூலங்களின் பெருக்குத்தொகை -1 ஆகும்.

$$tan\theta \cdot tan\frac{\pi}{8} = -1$$

$$\Rightarrow tan\theta = -cot\frac{\pi}{8} = tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = tan\frac{5\pi}{8}$$

$$\therefore \theta = 5\pi/8$$

உதாரணம் 36

(a) $n \in Z$, $\theta \neq n\pi$ அல்லது $2n\pi - \frac{\pi}{2}$ இற்கு,

$\frac{1 + cos\theta + sin\theta}{1 - cos\theta + sin\theta} = \frac{1 + cos\theta}{sin\theta}$ எனக் காட்டுக.

(b) எல்லா மெய் x இற்கும் $8\left(cos^6 x + sin^6 x\right) = 5 + 3\,cos\,4x$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ இற்கு

$y = cos^6 x + sin^6 x$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ இனுள்ளே சமன்பாடு $cos^6 x + sin^6 x = k$ யிற்கு

(i) தீர்வுகள் இல்லாதிருப்பதற்கு
(ii) இருதீர்வுகள் மாத்திரம் இருப்பதற்கு
(iii) மூன்று தீர்வுகள் மாத்திரம் இருப்பதற்கு
(iv) நான்கு தீர்வுகள் மாத்திரம் இருப்பதற்கு

k இன் பெறுமானத்தை அல்லது பெறுமானங்களின் வீச்சை உய்த்தறிக.

(2000)

(a) $\frac{1 + cos\theta + sin\theta}{1 - cos\theta + sin\theta} = \frac{1 + sin\theta + cos\theta}{1 + sin\theta - cos\theta}$

$$\frac{\left[(1 + sin\,\theta) + cos\,\theta\right]^2}{(1 + sin\theta)^2 - cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1 + sin\theta)^2 + 2cos\theta\,(1 + sin\theta) + cos^2\theta}{2sin\theta\,(1 + sin\theta)}$$

$$= 2\,(1 + sin\theta) + 2cos\theta\,(1 + sin\theta)$$

$$= \frac{2\,(1 + sin\theta)\,(1 + cos\theta)}{2\,sin\,\theta\,(1 + sin\theta)}$$

$$= \frac{1 + cos\theta}{sin\theta}$$

(b) $8\left(cos^6 x + sin^6 x\right)$

$= 8\left[\left(cos^2 x + sin^2 x\right)\left(cos^4 x - cos^2 x\,sin^2 x + sin^4 x\right)\right]$

$= 8\left[cos^4 x - cos^2 x\,sin^2 x + sin^4 x\right]$

$= 8\left[\left(cos^2 x + sin^2 x\right)^2 - 3cos^2 x + sin^2 x\right]$

$= 8 - 24\,cos^2 x \cdot sin^2 x$

$= 8 - 6sin^2 2x$

$= 8 - 3\left(1 - cos4\,x\right) = 5 + 3cos\,4\,x$

learnium.org

$y = \cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \qquad \left[-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right]$

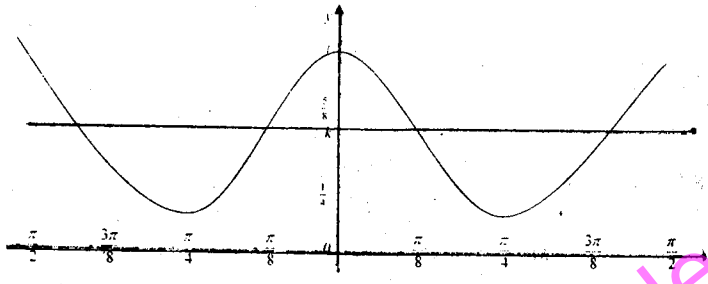
y ன் உயர்வுப் பெறுமானம் $= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$

$\cos 4x = 1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$

y ன் இழிவுப் பெறுமானம் $= \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$

$\cos 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

$y = \frac{5}{8}$ எனின், $\cos 4x = 0 \Rightarrow \frac{-\pi}{8}, \frac{-3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$



(i) $k < \frac{1}{4}$ அல்லது $k > 1$ எனின், தீர்வு இல்லை.

(ii) $k = \frac{1}{4}$ எனின், இரு தீர்வுகள் உண்டு.

(iii) $k = 1$ எனின், மூன்று தீர்வுகள் உண்டு.

(iv) $\frac{1}{4} < k < 1$ எனின், நான்கு தீர்வுகள் உண்டு.

[$y = k$ என்னும் கோடு x அச்சிற்கு சமாந்தரமாகும்.

$y = k$ என்னும் கோடு $y = \cos^6 x + \cos^6 x$ எனும் வளையியை வெட்டும் புள்ளிகளைக் கருதுக.]

உதாரணம் 37

(a) $0 \le x \le 2\pi$ யிற்கு $4\sin^2 x + 12\sin x \cos x - \cos^2 x + 5 = 0$ ஐத் தீர்க்க.

(b) முக்கோணிக்கு சைன் நெறியையும், கோசைன் நெறியையும் எடுத்துரைக்க.

$\frac{b+c}{2k-1} = \frac{c+a}{2k} = \frac{a+b}{2k+1}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு

k ஆனது 2 இலும் பெரியதும் ஆனால் 4 இற்குச் சமமாக இல்லாததுமான தரப்பட்ட ஒரு நிறைவெண் ஆகும். a,b,c என்பன வழக்கமான குறிப்பீட்டில் ஒரு முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் ஆகும்.

$\frac{\sin A}{k+1} = \frac{\sin B}{k} = \frac{\sin C}{k-1}$ எனக் காட்டுக.

அதோடு $\cos A$ ஐ k யின் சார்பில் பெற்று

$\frac{\cos A}{(k-4)(k+1)} = \frac{\cos B}{k^2+2} = \frac{\cos C}{(k+4)(k-1)}$ எனக் காட்டுக.

இங்கு A,B,C வழக்கமான கருத்துக்களை உடையன.

(2000)

$4\sin^2 x + 12\sin x \cos x - \cos^2 x + 5 = 0$

$2(1 - \cos 2x) + 6\sin 2x - \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) + 5 = 0$

$12\sin 2x - 5\cos 2x + 13 = 0$

$5\cos 2x - 12\sin 2x = 13$

$\frac{5}{13}\cos 2x - \frac{12}{13}\sin 2x = \frac{13}{13}$

learnium.org

$\cos\alpha \cdot \cos 2x - \sin\alpha \cdot \sin 2x = 1 \quad \left[\cos\alpha = \frac{5}{13},\ \sin\alpha = \frac{12}{13}\right]$

$\cos(2x + \alpha) = 1$

$2x + \alpha = 2n\pi$ n - நிறையெண்

$x = n\pi - \frac{\alpha}{2}$ n - நிறையெண்

$\pi - \frac{\alpha}{2},\ 2\pi - \frac{\alpha}{2}$ என்பன 0 இற்கும் 2π இற்குமிடையில் இரு தீர்வுகளாகும்.

(b) சைன் விதி : $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

கோசைன் விதி : $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\frac{b+c}{2k-1} = \frac{c+a}{2k} = \frac{a+b}{2k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{2k-1} = \frac{c+a}{2k} = \frac{a+b}{2k+1} = \frac{2(a+b+c)}{6k} = \frac{a+b+c}{3k}$$

(1) $\frac{b+c}{2k-1} = \frac{a+b+c}{3k} \Rightarrow \frac{b-c}{2k-1} = \frac{(a+b+c)-(b+c)}{3k-(2k-1)} = \frac{a}{k+1}$

(2) $\frac{c+a}{2k} = \frac{a+b+c}{3k} \Rightarrow \frac{c+a}{2k} = \frac{b}{k}$

(3) $\frac{a+b}{2k+1} = \frac{a+b+c}{3k} \Rightarrow \frac{a+b}{2k+1} = \frac{c}{k-1}$

(1), (2), (3) இலிருந்து,

$$\frac{a}{k+1} = \frac{b}{k} = \frac{c}{k-1} \quad \text{----------(4)}$$

ஆனால் $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \lambda$ என்க ----------(5)

(4), (5) இலிருந்து $\frac{\sin A}{k+1} = \frac{\sin B}{k} = \frac{\sin C}{k-1}$ ஆகும்.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{k^2 + (k-1)^2 - (k+1)^2}{2k(k-1)} = \frac{k-4}{2(k-1)} \quad \text{----------(6)}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(k+1)^2 + (k-1)^2 - k^2}{2(k+1)(k-1)} = \frac{k^2+2}{2(k+1)(k-1)} \quad \text{-------(7)}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(k+1)^2 + k^2 - (k-1)^2}{2k(k+1)} = \frac{k+4}{2(k+1)} \quad \text{----------(8)}$$

(6), (7), (8) இலிருந்து,

$$\frac{\cos A}{(k-4)(k+1)} = \frac{\cos B}{k^2+2} = \frac{\cos C}{(k+4)(k-1)} = \left(\frac{1}{2(k^2-1)}\right)$$ ஆகும்.

learnium.org

பலவினப் பயிற்சி

1. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ எனின்,

$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ எனக்காட்டுக.

2. $x\cos\theta - y\sin\theta = a$, $x\sin\theta + y\cos\theta = b$ எனின்,

θ ஐச் சாராது x, y, a, b இற்கிடையே தொடர்பு ஒன்றைக் காண்க.

3. $\dfrac{1}{\tan 3A - \tan A} - \dfrac{1}{\cot 3A - \cot A} = \cot 2A$ என நிறுவுக.

4. $2\tan B + \cot B = \tan A$ எனின்,

$\cot B = 2\tan(A - B)$ என நிறுவுக.

5. $a\sin\theta = b\cos\theta = c\cdot\tan 2\theta$ எனின்,

$(a^2 - b^2)^2 = 4c^2(a^2 + b^2)$ எனக் காட்டுக.

6. **(a)** $\sin\alpha(1+\tan\alpha) + \cos\alpha(1+\cot\alpha) = \sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha$ என நிறுவுக.

(b) $A + B + C = \dfrac{\pi}{2}$ எனின்,

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 1 = 2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$ என நிறுவுக.

7. **(a)** $(1 + \operatorname{cosec} A + \cot A)(1 - \sec A + \tan A) = 2$ என நிறுவுக.

(b) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ = \dfrac{3}{2}$ என நிறுவுக.

8. $\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta = \sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து

$\sin^2 105^\circ - \sin^2 15^\circ$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

9. $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து $\cos 3\theta$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

$\cos^3\theta\cdot\cos 3\theta + \sin^3\theta\cdot\sin 3\theta = \cos^3 2\theta$ என நிறுவுக.

10. **(a)** $\tan 2\theta + 2\cot\theta = \tan 2\theta\cdot\cot^2\theta$ என நிறுவுக.

(b) $3\tan\theta - \sec\theta = 1$ எனின், $3\tan\theta + \sec\theta$ இன் சாத்தியமான பெறுமானங்களைக் காண்க.

11. **(a)** $\sec x = \sqrt{2}\sec y$

$\cot y = \sqrt{3}\cot x$ ஆகிய ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.
(பொதுத் தீர்வைக் காண்க)

(b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)$ இன் பொதுத் தீர்வினை எழுதுக.

12. $\tan 3\theta$, $\tan 4\theta$ என்பவற்றை $\tan\theta$ இல் தருக.

$\tan 3\theta + \tan 4\theta = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் கருதுவதன் மூலம்

$\tan^2\dfrac{\pi}{7}$, $\tan^2\dfrac{2\pi}{7}$, $\tan^2\dfrac{3\pi}{7}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைப் பெறுக.

இதிலிருந்து, $\tan\dfrac{\pi}{7}\cdot\tan\dfrac{2\pi}{7}\cdot\tan\dfrac{3\pi}{7}$

$\tan^4\dfrac{\pi}{7} + \tan^4\dfrac{2\pi}{7} + \tan^4\dfrac{3\pi}{7}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களை உய்த்தறிக.

13. **(a)** யாதேனும் ஒரு முக்கோணி ABC இல்,

(i) $a\cos\left(\dfrac{B-C}{2}\right) = (b+c)\cos\left(\dfrac{B+C}{2}\right)$

(ii) $(b+c)\tan\left(\dfrac{B-C}{2}\right) = (b-c)\tan\left(\dfrac{B+C}{2}\right)$

(iii) $\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right) = \dfrac{a-b}{a+b}\cot\dfrac{C}{2}$ என நிறுவுக.

learnium.org

(b) முக்கோணி ABC இல் $\angle C > \angle B$ ஆகும். D என்பது BC யின் நடுப்புள்ளியாகும். E என்பது A யிலிருந்து BC க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடியாகும்.

$DE = \frac{1}{2}\, a \cdot \sin(C-B)\, \operatorname{cosec} A$ என நிறுவுக.

14. வழமையான குறிப்பீடுகளைக் கொண்டு, முக்கோணி ABC யில் $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ என நிறுவுக.

P ஐயும் Q வையும் மையங்களாகவும் p, q $(p \neq q)$ என்பவற்றை முறையே ஆரைகளாகவும் கொண்ட இரு ஒரு தள வட்டங்கள் X இலும் Y இலும் இடைவெட்டுகின்றன. கோணம் $PXQ = \alpha$ ஆகவும், வட்டத்தின் இரு பொதுத் தொடலிகளும் ஒன்றுடனொன்று அமைக்கும் கோணம் θ ஆகவும் இருப்பின் $(p-q)^2 \cot^2 \frac{\theta}{2} = 4pq \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ என நிறுவுக.

இரு வட்டங்களும் நிமிர்கோணமாக இடைவெட்டினால் $\cos\theta$ இன் பெறுமானம் $\frac{6pq - (p^2+q^2)}{(p+q)^2}$ எனக் காட்டுக.

15. **(i)** $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ என நிறுவுக. $\theta = 18^\circ$ எனின், $\cos 3\theta = \sin 2\theta$ என்றும் $\sin 18^\circ$ என்பது $4x^2 + 2x - 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் என்றும் நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

(ii) $t = \tan\frac{\theta}{2}$ எனின், $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ என நிறுவுக.

$c \leq \sqrt{a^2+b^2}$ எனின், $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ என்னும் சமன்பாட்டை மேலேயுள்ள பிரதியீட்டைக் கொண்டு எவ்வாறு தீர்க்கலாம் எனக்காட்டுக.

$\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ என்பன இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனின், $\tan\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\frac{\beta}{2} = \frac{c-a}{c+a}$ எனக் காட்டி,

$\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{c}{a}$ என்பதை உய்த்தறிக.

(1984)

16. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $39\cos x + 52\sin x = 60$

(ii) $\sin 3x - 2\sin x = 4\cos^2 x - 3$

(iii) $\cos x - \cos 2x = \frac{1}{2}$

(1990 விசேட)

17. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $5\cos\theta + 12\sin\theta = \frac{13}{2}$

(ii) $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{y-1}{y-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y+1}{y+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ **(1991)**

யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC யில் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக

18. $\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2} = \frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2} = \frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$

19. $a \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\left(\frac{B-C}{2}\right) + b \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\left(\frac{C-A}{2}\right) + c \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = 0$

learnium.org

20. $a^2\left(\cos^2 B - \cos^2 C\right) + b^2\left(\cos^2 C - \cos^2 A\right) + c^2\left(\cos^2 A - \cos^2 B\right) = 0$

21. $\frac{b^2 - c^2}{a^2} \cdot \sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2} \cdot \sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2} \cdot \sin 2C = 0$

22. $\frac{(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}}{\cot A + \cot B + \cot C}$

23. ABC யாதுமொரு முக்கோணி. θ யாதுமொரு கோணம் எனின்,
$b\cos\theta = c\cdot\cos(A-\theta) + a\cos(C+\theta)$ என நிறுவுக.

24. யாதுமொரு முக்கோணி ABC யில், $\tan\frac{A}{2} = \frac{5}{6}$, $\tan\frac{B}{2} = \frac{20}{37}$.எனின்,
$\tan\frac{C}{2}$ ஐக் கண்டு, $a+c = 2b$ என நிறுவுக.

25. $\left(b^2 - c^2\right)\cot A + \left(c^2 - a^2\right)\cot B + \left(a^2 - b^2\right)\cot C = 0$
என நிறுவுக.

26. A, B என்னும் இரு கோணங்கள் $A+B = \alpha$, $A-B = 0$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. $\frac{\tan A}{\tan B} = \lambda$ எனின்,
$\sin\theta = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\sin\alpha$ எனக் காட்டுக.

27. யாதுமொரு முக்கோணி ABC யில்
$\frac{a-b}{c} = \frac{\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}$; $\frac{a+b}{c} = \frac{1 + \tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}}$ என நிறுவுக.

28. $\sin\theta = k\sin(A-\theta)$ எனின்,
$\tan\left(\theta - \frac{A}{2}\right) = \frac{k-1}{k+1}\tan\frac{A}{2}$ எனக் காட்டுக.

29. $\tan\theta + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$ என்பதை $\tan 3\theta$ இன் வகையிற் கூறுக.
இதிலிருந்து $\tan\theta + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 3$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

30. முக்கோணம் ABC இல் $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ என்பவை கூட்டல் விருத்தியில் உள்ளன எனின், $\cos A, \cos B, \cos C$ என்பனவும் கூட்டல் விருத்தியில் உள்ளன என நிறுவுக.

31. யாதுமொரு முக்கோணி ABC இல்,
$\left(b^2 - c^2\right)\cot A + \left(c^2 - a^2\right)\cot B + \left(a^2 - b^2\right)\cot C = 0$ என நிறுவுக.

32. **(a)** A, B, C என்பன முக்கோணி ஒன்றின் கோணங்களாக இருக்கும்போது
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$ என நிறுவுக.

(b) $2A + B = \frac{\pi}{4}$ எனின்,
$\tan B = \frac{1 - 2\tan A - \tan^2 A}{1 + 2\tan A - \tan^2 A}$ எனக் காட்டுக.
சமன்பாடு $x^2 + 2x - 1 = 0$ இன் ஒரு மூலம் $\tan\frac{\pi}{8}$ என்பதையும் அதன் பெறுமானம் $\sqrt{2} - 1$ என்பதையும் உய்த்தறிக.
$\tan\theta$ என்பது அதன் மற்ற மூலம் எனின், $(0, \pi)$ என்னும் வீச்சில் θ வைக் காண்க.

(1993)

learnium.org

33. a,b,h என்பன மெய்யெண்களாக இருக்க,

$f(x) = a\cos^2 x + 2h\sin x\cos x + b\sin^2 x$ என்பதை $\cos 2x, \sin 2x$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

$f(x)$ இற்கு $A + B\sin(2x+\alpha)$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள கோவை ஒன்றை உய்த்தறிக. இங்கு $A, B, \alpha\ (0 \le \alpha < 2\pi)$ என்பன துணியப்படவேண்டிய மாறிலிகள். இதிலிருந்து $f(x)$ இன் உயர்வுப் பெறுமானத்தையும், இழிவுப் பெறுமானத்தையும் $2\pi - \alpha \le x \le 2\pi + \alpha$ இல் மேலே பெற்ற பெறுமானங்களுக்கு நேரொத்த x இன் பெறுமானங்களையும் பெறுக.

$a = 3,\ b = 1,\ h = \sqrt{3}$ ஆக இருக்கும்போது

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ இல் $f(x)$ இன் வரைபை வரைக.

(1997)

34. (a) வழக்கமான குறிப்பீட்டில் ஒரு முக்கோணிக்கு "சைன்" நெறியைக் கூறி நிறுவுக. அதே குறிப்பீட்டில்

(i) $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\sin\dfrac{C}{2}}$

(ii) $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\cos\dfrac{C}{2}}$ என நிறுவுக.

ஒரு முக்கோணிக்கு "கோசைன் நெறியை" உய்த்தறிக.

(b) $A+B+C = \pi$ எனின்,

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 8\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$$ என நிறுவுக.

(1998)

35. (a) x இற்குத் தீர்க்க.

(i) $\cos x + \sqrt{2}\cos 3x + \cos 7x = 0$

(ii) $\tan^{-1}(2x) - \tan^{-1}(x) = \cot^{-1}(4 - 4x^2)$

(b) x_1, x_2 என்பன α ஒரு மாறிலியாக உள்ள சமன்பாடு $2\sin x \cdot \sin(x+\alpha) = 1$ இன் இரு வேறு வேறான மூலங்கள் எனின், ஒன்றில் $x_1 + x_2 = \alpha$ அல்லது $x_2 - x_1$ ஆனது π யின் ஒரு மடங்காகும் எனக் காட்டுக.

(1998)

36. முக்கோணி ABC இன் உள்வட்ட மையம் I ஆகவும், முக்கோணிகள் IBC, ICA, IAB என்பவற்றின் சுற்றுவட்டமையங்கள் X, Y, Z ஆகவுமிருப்பின்

(i) A, B, C, X, Y, Z என்பன ஒரு வட்டப் புள்ளிகள் எனவும்,

(ii) கோணம் $YXZ = \dfrac{\pi - A}{2}$ எனவும்,

(iii) $\dfrac{\text{முக்கோணி } XYZ \text{ இன் பரப்பு}}{\text{முக்கோணி } ABC \text{ இன் பரப்பு}} = \dfrac{1}{8\cos\dfrac{A}{2}, \operatorname{cosec}\dfrac{B}{2}, \operatorname{cosec}\dfrac{C}{2}}$

எனவும் நிறுவுக.

learnium.org

விடைகள்

பயிற்சி 1

1. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) -1 (e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (f) 1

2. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (c) 1

பயிற்சி 4 (a)

1. $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$ 2. $n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{3}$ 3. $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$

4. $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 5. $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 6. $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

7. $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$ 8. $\theta = 2n\pi \pm$, $\theta = \frac{2n\pi}{9}$

9. $\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{9}$ 10. $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{10}$, $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

11. $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ 12. $n\pi + \frac{\pi}{4}$

27. $x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$; 28. $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $2n\pi$

29. $x = 2n\pi + \frac{2\pi}{3}$ 30. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$; $n\pi - (-1)^n - \sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

31. $(2n+1)\frac{\pi}{2}$; $(4n+1)\frac{\pi}{10}$ 32. (i) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

(ii) $\{45°, 60°, 135°, 225°, 300°, 315°\}$ (iii) $\{-45°, 135°\}$

33. $(4n+1)\frac{\pi}{6}$ 34. $(2n+1)\frac{\pi}{3}$ 35. $n\pi - \frac{\pi}{4}$; $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{2}$

4 (b)

1. $A = (4n+1)\frac{\pi}{2} \pm (B+C)$ 2. $A = (4n-1)\frac{\pi}{2} \pm (B+C)$

3. $\theta = \frac{2n\pi}{3} \pm \alpha$; $\cos\alpha, \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right), \cos\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)$

4. $\theta = \frac{n\pi}{3} + (-1)^n\alpha$; $\sin\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right), \sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)$

5. $n\pi - \frac{\pi}{4}$, $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{12}$ 6. $(4n+1)\frac{\pi}{16}$

11. (a) $\frac{2k}{\pi}$; $k = 2$; $\frac{\pi}{4}(2n+1), n\pi, (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$k = \frac{1}{2}$; $(2n+1)\pi, 4n\pi, (4n+2)\pi$

(b) $\{7\cdot5°, 45°, 97\cdot5°\}$, $\{17\cdot5°, 107\cdot5°, 145°\}$

12. $\frac{-63}{65}$, $\frac{56}{33}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$

13. (i) $0°, 90°, 180°$ (ii) $45°, 161°, 34', 225°, 341°, 34'$

(iii) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $2n\pi + \frac{\pi}{6}$, $2n\pi + \frac{5\pi}{6}$

learnium.org

14. (i) $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$

(ii) $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{8}$

15. $\tan\theta = \left(\frac{1+k}{1-k}\right)\tan\alpha$; $120°$, $300°$

17. (ii) $-\left(2+\sqrt{3}\right)$, $2-\sqrt{3}$

18. $n\pi$, $\frac{2}{3}n\pi$; $70°$, $190°$, $330°$, $310°$

19. $n\pi + \frac{\pi}{2}$, $\frac{4}{3}n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{5}n\pi$

20. $0°$, $30°$, $60°$, $120°$, $150°$, $180°$

21. (i) $x = y = 60°$

(ii) $n\pi$, $(4n-1)\frac{\pi}{4}$, $(8n+1)\frac{\pi}{8}$, $(8n-1)\frac{\pi}{24}$

22. $-120°, -90°, -60°, 0, 60°, 90°, 120°$

23. $n\pi$, $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$\left(6n \pm 1\right) + \frac{3}{\pi}\tan^{-1}\frac{5}{12}$

$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 0.67^c, 2.47^c$

24. (i) $n\pi, 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (ii) $199\cdot5°$, $340\cdot5°$

(iii) $90°, 210°, 330°$ (iv) $60°, 90°, 180°, 270°, 300°$

25. $4x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}\,xy = 4$; $\frac{1}{2n+1}$, $\frac{2n^2-1}{2n^2+4n+1}$

26. $18°$, $30°$, $90°$, $150°$, $162°$

28. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ **29.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **30.** $2n\pi$ அல்லது $\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\pi$

31. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ அல்லது $n\pi + (d-1)^n\frac{\pi}{10}$ அல்லது $n\pi - (-1)^n\frac{3\pi}{10}$

32. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{8}$ அல்லது $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$

33. $k\pi$ அல்லது $\frac{1}{n-1}\left[k\pi - (-1)^k\frac{\pi}{6}\right]$

34. $k\pi$ அல்லது $\frac{k\pi}{n-1}$ அல்லது $\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$

35. $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ அல்லது $2n\pi - \frac{\pi}{3}$ **36.** $n\pi + \frac{\pi}{4}$ **37.** $n\pi + \frac{\pi}{4}$

38. $\theta = \frac{n\pi}{3}$ அல்லது $\theta = n\pi \pm \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **39.** $\left(n+\frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{3}$

40. $A = \left(m+\frac{n}{2}\right)\pi \pm \frac{\pi}{6} + (-1)^n\frac{\pi}{12}$; $B = \left(m-\frac{n}{2}\right)\pi \pm \frac{\pi}{6} - (-1)^n\frac{\pi}{12}$

41. $A = \frac{1}{5}\left[(6m-4n)\pi \pm \frac{\pi}{2} \pm \frac{2\pi}{3}\right]$; $B = \left[(6n-4m)\pi \pm \pi \pm \frac{\pi}{3}\right]$

42. $\tan\theta = \frac{2n+1 \pm \sqrt{4n^2+4n-15}}{4}$ இங்கு $n \le -3$ அல்லது $n \ge 2$

learnium.org

பிழை திருத்தம்

பக்கம்	வரி	வினா இல	பிழை	திருத்தம்
11.	3	-	$\theta^o + 360^o - \theta$	$\theta^o, 360^o - \theta^o$
23.	12	8	$\cos^4 A \cdot \sin^4 A$	$\cos^4 A - \sin^4 A$
	13	9	$(\cos A - \sin A)$	$(\cos A + \sin A)$
25.	-	43	$b\cos\theta - a\sin\theta = C.$	$b\cos\theta - a\sin\theta = c.$
30.	9	உ+ம் 1	$\cos(60'' + 45^o)$	$\sin(60^o + 45^o)$
33.	3	-	$\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B - \tan C.$	$\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \ \tan B \ \tan C.$
	கடைசி வரி	-	$= \tan 3A \ \ \tan A \ \ \tan A$	$= \tan 3A \ \ \tan 2A \ \ \tan A$
40.	12	-	$\sin 75^o = \frac{\sqrt{3+1}}{2\sqrt{2}}$	$\sin 75^o = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
42.	11		$= \frac{1}{8}\left[\cos 80^o + 2\cos 100^o + \cos 60^o\right]$	$= \frac{1}{8}\left[\cos 80^o + \cos 100^o + \cos 60^o\right]$
43.	-	8	$= \theta$	$= 0.$
		14	$\tan A - \tan B = a$	$\tan A - \tan B = b.$
46.	7	-	$\boxed{2\,(b)}$	$\boxed{2\,(c)}$
49.	10	-	$\cos 3A = 4\cos^3 - 3\cos A$	$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$
56.	-	6	$\frac{1}{1-\tan x} + \frac{1}{1+\tan x}$	$\frac{1}{1-\tan x} + \frac{1}{1-\tan x}$

learnium.org

பக்கம்	வரி	வினா இல	பிழை	திருத்தம்
58.	-	26	$\tan A+\cot A=2\operatorname{cosec} A$	$\tan A+\cot A=2\operatorname{cosec} 2A$
		44	$=\sin^2(n+1)A-\sin^2(n-1)A$	$\sin^2(n+1)A-\sin^2 nA$
59.	-	46	$\cos=\frac{11}{61}$	$\cos\alpha=\frac{11}{61}$
		46	கோணங்கள் ஆகியன எனக்கொண்டு என்பவற்றின்	கோணங்கள் α,β ஆகியன கூர்ங்கோணங்கள் எனக் கொண்டு
		53	$COS^2\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$	$\cos^2\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$
70.	17	-	n ஒற்றை எனின்	n. இரட்டை எனின்
88.	-	21	$\cos 3x-4\cos 2x$ $+2\cos 2x-2=0$	$\cos 3x-4\cos 2x+$ $2\cos x-2=0$
98.	1	-	$\tan^{-1}\left(\operatorname{cosec}.\tan^{-1}x\right.$ $-\tan\cot^{-1}x$	$\operatorname{cosec}\left(\tan^{-1}x\right)$ $-\cot\left(\tan^{-1}x\right)$
108.	-	உ+ம்		
		4 (i)	$=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cdot\frac{C}{2}$	$=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$
187.	6	உ+ம்28	$=n\cot C-m\cot C$	$=n\cot B-m\cot C.$
212.	11		(1) $\Rightarrow\frac{b-c}{2k-1}$	$\Rightarrow\frac{b+c}{2k-1}$

learnium.org

சாயி கல்வி வெளியீடுகள்

க.பொ.த உயர்தரம்

புதிய பாடத்திட்டத்திற்குரியவை

(ஆண்டு 2000 உம் அதற்குப் பின்னரும்)

1. உயிரியல் பகுதி -1
2. உயிரியல் பகுதி - 1(B) உயிரினப் பன்மை (அச்சில்)
3. உயிரியல் பகுதி - 2(A) தொழிற்படும் விலங்கு
4. உயிரியல் பகுதி - 2(B) தொழிற்படும் விலங்கு
5. உயிரியல் பகுதி - 3(A) தொழிற்படும் தாவரம் பகுதி I
6. உயிரியல் பகுதி - 3(B) தொழிற்படும் தாவரம் பகுதி II
7. உயிரியல் பகுதி - 4(A) உயிரின் தொடர்ச்சி
8. உயிரியல் பகுதி - 4(B) மனிதனும் சூழலும் + பிரயோக உயிரியல்
9. சேதன இரசாயனம் - பரீட்சை வழிகாட்டி
10. பிரயோக கணிதம் - நிலையியல் பயிற்சிகள்
11. பிரயோக கணிதம் - இயக்கவியல் பகுதி I
12. பிரயோக கணிதம் - இயக்கவியல் பயிற்சிகள் பகுதி II
13. பிரயோக கணிதம் - நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும்
14. இணைந்த கணிதம் - நுண்கணிதம்
15. இணைந்த கணிதம் - அட்சர கணிதம்
16. இணைந்த கணிதம் - திரிகோணகணிதம்
17. இணைந்த கணிதம் - ஆள்கூற்று கேத்திரகணிதம் (அச்சில்)

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
36/4B, PAMANKADA ROAD, COLOMBO - 06. SRILANKA.

learnium.org