முழுப்பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பயிற்சிப் பரீட்சை – 2020 ஒகஸ்ட்

General Certificate Of Education (Adv Level) Practice Examination – 2020 Auguest

தமிழ்ச்சங்கம் - பேராதனைப்பல்கலைக்கழகம்

இணைந்த கணிதம் - I
Combined mathematics - I

10	T	I

மூன்று மணித்தியாலங்கள்
Three hours

சுட்டெண் Index No								

புள்ளிகள் Marks	பகுதி **A** Part A	பகுதி **B** Part B	மொத்தம் Total

அறிவுறுத்தல்கள் :

- இவ்வினாத்தாள் பகுதி **A** (வினாக்கள் 1-10), பகுதி **B** (வினாக்கள் 11-17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது.

- **பகுதி A :**

- எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிக தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

- **பகுதி B :**

- ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.

- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி **A** ஆனது பகுதி **B** இற்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.

- வினாத்தாளின் பகுதி **B** யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

www.lkedu.lk

பகுதி **A**

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக்கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி எல்லா $n\epsilon\mathbb{Z}^+$ இற்கும் $(k(cos\theta + isin\theta))^n = k^n(\cos(n\theta) + isin(n\theta))$ எனக்காட்டுக. ; இங்கு $i^2 = -1$, k-மாறிலி

2. PERADENIYA எனும் சொல்லில் எல்லா எழுத்துக்களையும் கொண்டு ஆக்கப்படத்தக்க ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கை யாது? இவ்வொழுங்கமைப்புக்களில் எத்தனையில் P,D,N எனும் எழுத்துக்கள் வேறாக்கப்பட்டிருக்கும்?

www.lkedu.lk

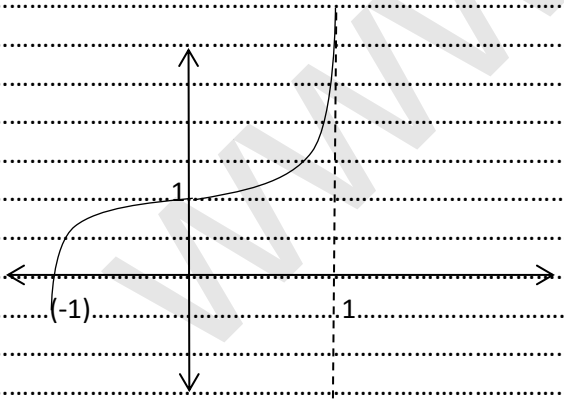
3. $(px - \frac{2}{x^2})^6$ எனும் விரிவில் x ஐச் சாராத உறுப்பு 4860 எனின் p இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

4. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)(x^{505}-1)}{(\sqrt{2}-\sqrt{1+x^2})(x-1)}\right)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

www.lkedu.lk

5. நீள் வளையம் $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ இற்கு புள்ளி $p\equiv(3\cos\theta,2\sin\theta)$; $0<\theta<{}^{\pi}/_{2}$ இல் வரையப்படும் தொடலியின் சமன்பாடு $\frac{x\cos\theta}{7}+\frac{y\sin\theta}{4}=1$ எனக்காட்டுக. மேற்குறித்த நீள்வளையத்திற்கு புள்ளி P இல் வரையப்படும் செவ்வன் புள்ளி $(0,\frac{-40}{6})$ இனூடாகச் செல்லத்தக்கதாக θ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

6. தரப்பட்ட வளையி $y=\sqrt{\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}}$ ஆனது x=1 இனாலும், x அச்சாலும், y அச்சாலும் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் x அச்சைப்பற்றி 4 செங்கோணங்களினூடு சுழற்றப்படும் போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\pi(\frac{\pi}{2}+1)$ எனக்காட்டுக.



www.lkedu.lk

7. $2x+3y+1=0$, $3x-2y+5=0$ எனும் இரு நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் யாதாயினும் ஓர் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $(2+3\lambda)x+(3-2\lambda)y+(1+5\lambda)=0$ என வெளிப்படுத்தப்படலாம் எனக்காட்டுக. ; இங்கு λ - பரமானம். அந்நேர்கோடு $x+2y=0$ எனும் நேர்கோட்டை செங்குத்தாக இடைவெட்டுமாயின் λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

8. $2x^2 + 2y^2 - 4\lambda x + 2k^2 = 0$, $x^2 + y^2 - 2\mu y + k^2 = 0$ ஆகிய இரு வட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று தொடுமாயின் $k = \frac{\lambda\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$ எனக் காட்டுக. (இங்கு $\lambda, \mu > 0$)

www.ikedu.lk

9. A≡(2,3) , B≡(2,-1) ஆகவும் இருப்பின் AB இனை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் S இன் சமன்பாட்டைக் காண்க. வட்டம் S இனை நிமிர்கோண முறையாக இடைவெட்டுவதும் (1,-2) இனை மையமாகவும் கொண்ட வட்டம் S' இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. $\tan(\alpha-\beta) = {}^{2}/_{3}$ எனவும் $\sin(\alpha+\beta) = {}^{2}/_{\sqrt{5}}$ எனவும் கொள்வோம்.

இங்கு $0 < \alpha, \beta < {}^{\pi}/_{2}$ ஆகும். $tan2\alpha = (-8)$ எனவும் $tan2\beta = {}^{4}/_{7}$ எனவும் காட்டி **இதிலிருந்து** $tan2(\alpha+\beta)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

www.ikedu.lk

பகுதி **B**

11. a) $a, b, c \epsilon \mathbb{R}$, $c > 0$ எனவும் $f(x) = ax^2 + (a-b)x - \frac{c(c-2(a-b)}{4a} = 0$ எனவும் கொள்வோம். $f(x) = 0$ ஆனது மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும் எனக்காட்டுக. $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் $\propto, \beta$ எனின் $\frac{1}{\propto}, \frac{1}{\beta}$ இனை மூலங்களாக கொண்ட இருபடிச்சமன்பாட்டை உருமாற்றத்தின் மூலம் $c\big(c-2(a-b)\big)x^2 - 4a(a-b)x - 4a^2 = 0$ எனக்காட்டுக.
இவ் உருமாற்ற சமன்பாடும் $2x^2 + 3x + a^2 = 0$ எனும் இருபடிச்சமன்பாடும் ஒரே மூலங்களைக் கொண்டிருப்பின் $b = \frac{a^2-3}{a}$ எனவும் $a = \frac{6c}{c^2-8}$ எனவும் காட்டுக.

b) $f(x)$ என்பது படி 3 இலும் கூடியதும் x இலும் உள்ளதுமான ஒரு பல்லுறுப்பியாகும் $f(x)$ இன் ஓர் காரணி $(x+1)$ உம் $f(x)$ இனை $(x+2), (x+3)$ இனால் வகுக்கும் போது மீதிகள் முறையே -6,14 உம் ஆகும். மீதித்தேற்றத்தை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்துவதன் மூலம் $f(x)$ இனை $(x+1)(x+2)(x+3)$ இனால் வகுக்கும் போது மீதி $A(x+1)(x+2) + B(x+1)$ எனும் வடிவில் எடுத்துரைக்கப்படலாம் எனக்காட்டுக. இங்கு A, B என்பன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகள்.

12. a) $y = |1-x| + x$, $y = 3 - |x-1|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே படத்தில் வரைக. $|x-1| + x - 1 \geq 2 - |1-x|$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானத் தொடையைக் காண்க?
இதிலிருந்து யாதாயினும் $k \epsilon \mathbb{R}$ ஆக $|2x-2| - (k+6) = 0$ இற்கு சரியாக இருதீர்வுகள் மட்டும் இருப்பதற்கு k இன் பெறுமான வீச்சை காண்க?

b) $r \epsilon \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \frac{4^r}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ எனவும் $f(r) = \frac{\lambda 4^r}{(2r-1)(2r+1)}$ எனவும் தரப்படின் $U_r = f(r) - f(r+1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக λ இனைக்காண்க.
$n \epsilon \mathbb{Z}^+$ இற்கு $S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$ எனக் கொள்வோம்.
$n \epsilon \mathbb{Z}^+$ இற்கு $S_n = \frac{16}{3} - \frac{4^{r+2}}{(2r+1)(2r+3)}$ எனக்காட்டுக. மேலும் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகிறது எனக்காட்டி அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. $\sum_{r=n+1}^{2n} U_r$ இனை உய்த்தறிக.

www.ikeou.lk

13. a)

$A = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -3 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ எனத்தரப்படின்

$AB = X$ ஆகுமாறு a, b இனைக்காண்க. $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ எனத்தரப்படின் தாயம் $C = XY$ ஆகுமாறு தாயம் C இனைக்காண்க. அத்துடன் $c^{-1}(c^2 - 8\mathrm{I}) = 11\mathrm{I}$ எனக்காட்டுக. ; இங்கு I ஆனது வரிசை 2 இன் சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமும் c^{-1} ஆனது C இன் நிகர்மாற்றுத்தாயமும் ஆகும்.

b)

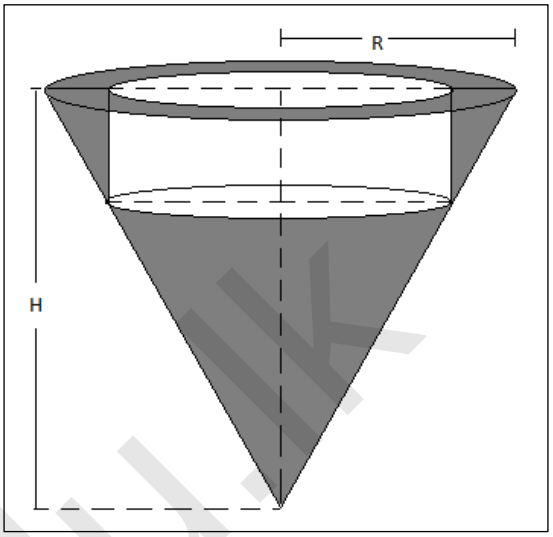
$\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \mathrm{Z}_3 \epsilon \mathbb{C}$ எனக்கொள்வோம் $\mathrm{Z}_1 = -1 + \sqrt{3}i, Z_2 = \sqrt{3} + i$ எனும் இரு சிக்கல் எண்கள் ஓர் ஆகன் வரிப்படத்தில் A,B எனும் புள்ளிகளினால் வகை குறிக்கப் படுகின்றன $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2$ என்பவற்றினை $r(cos\theta + isin\theta)$ எனும் வடிவில் காட்டி $|\mathrm{Z}_1|, |\mathrm{Z}_2|$, $arg(\mathrm{Z}_1), arg\,(\mathrm{Z}_2)$ என்பவற்றைக் காண்க. ஆகன் வரிப்படத்தில் OACB ஓர் சாய்சதுரமாகுமாறு C யினால் வகைக்குறிக்கப்படும் சிக்கல் $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right)$ எனக்காட்டுக. $Z \epsilon \mathbb{C}$ இற்கு $Z^3 = 1$ இனைத்தீர்ப்பதன் மூலம் மூலங்களில் ஒன்று ω எனின் அடுத்தது ω^2 எனக்காட்டுக.

14. a)

$x \neq \sqrt{2}$ இற்கு $f(x) = \frac{(x-2\sqrt{2})}{(x-\sqrt{2})^2}$ எனக் கொள்வோம். $f(x)$ இன் முதல் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $x \neq \sqrt{2}$ இற்கு $f'(x) = \frac{-(x-3\sqrt{2})}{(x-\sqrt{2})^3}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனவும் $f(x)$ இன் இரண்டாம் பெறுதி $f''(x)$ ஆனது $x \neq \sqrt{2}$ இற்கு $f''(x) = \frac{2(x-4\sqrt{2})}{(x-\sqrt{2})^4}$ எனவும் காட்டுக.அணுகுகோடு,திரும்பற்புள்ளிகள்,விபத்திப்புள்ளி ஆகியவற்றை தெளிவாக ஆராய்ந்து காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபை பரும்படியாக வரைக. **இதிலிருந்து** $\frac{x^2-\sqrt{2}x+6}{\sqrt{2}(x^2-2\sqrt{2}x+2)} = 0$ இற்கு எத்தனை தீர்வுகள் உண்டு எனக்காட்டுக.

b)

அருகே உள்ள உருவில் ஆரை R உம் உயரம் H உம் கொண்ட திண்ம கூம்பிலிருந்து அதே அச்சைக்கொண்ட ஓர் மாறும் கனவளவைக் கொண்ட உருளை ஒன்று வெட்டி அகற்றப்படுகின்றது எனின் உருளையின் கனவளவு உயர்வாகுமாறு உருளையின் ஆரைக்கும் கூம்பின் ஆரைக்கும் இடையிலான விகிதம் 2:3 எனக்காட்டி



உருளையின் உயர்கனவளவு $\frac{4\pi HR^2}{27}$ எனக்காட்டுக.

15. a) $0 \leq \theta \leq \pi$ இற்கு பிரதியீடு $x = cos\theta$ ஐ பயன்படுத்தி $\int_0^1 \frac{sin^{-1}(\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}{cos^{-1}x}\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

b) பகுதிப்பின்னங்களைப் பயன்படுத்தி $\int \frac{x}{x^3-1}\,dx$ ஐக் காண்க.

பகுதிகளாக தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int_0^1 e^x ln\sqrt{e^x+1}\,dx$ ஐக் காண்க.

c) a மாறிலியாக இருக்கும் சூத்திரம் $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ எனக்காட்டுக

இதிலிருந்து $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{sinx}sin^2x}{(e^{sinx}+e^{cosx})(sin2x+1)}\,dx$ காண்க.

16. $l_1 = 2x + y - 5$, $l_2 = x + 2y + 3$ எனும் நேர்கோடுகளின் கூர்ங்கோண இருகூறாக்கி,விரிகோண இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1$, $S_2 = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2$ எனும் இரு வட்டங்கள் நிமிர்கோணமுறையாக இடைவெட்டின் $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ எனக்காட்டுக.

நேர்கோடு $l_2 = 0$ இல் மையத்தைக் கொண்டதும் விரிகோண இருகூறாக்கியில் புள்ளி (0,-8) ஐத் தொட்டுச்செல்வதுமான வட்டம் S இன் சமன்பாட்டைக் காண்க. வட்டம் S இனை $5x^2 + 5y^2 + 10(c+2)x + 2(33-5c)y + 5c = 0$ எனும் வட்டம் நிமிர்கோண முறையாக இடைவெட்டும் எனில் c இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

www.ikedu.lk

17. *a*) யாதாயினும் ஓர் முக்கோணம் ABC இற்கு வழமையான குறியீடுகளுடன் கோசைன் நெறியை கூறி நிறுவுக. **இதிலிருந்து** சைன் நெறியை உய்த்தறிக.

b) யாதாயினும் ஓர் முக்கோணம் ABC இற்கு வழமையான குறியீடுகளுடன் AB=BC உம் இடையம் AD ஆகுமாறு பக்கம் BC இல் D எனும் புள்ளி உள்ளதும் எனின் $D\hat{A}C = cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{2}b}{\sqrt{2c^2-a^2}}\right)$ எனக்காட்டுக.

c) $x > 0$ இற்கு $cos^{-1}\left(\frac{1}{1+x}\right) - sin^{-1}\left(\frac{1+x}{2x^2}\right) = {}^{\pi}/_{2}$ இனைத் தீர்க்க.

இதிலிருந்து $tan\left({}^{\pi}/_{2} + sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}\right)\right)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

www.lkedu.lk

Thank you

Prepared By : S.Anustan(B.Sc(Reading))

(University Of Peradeniya)