

இணைந்த கணிதம் சுயகற்றல் வழிகாட்டி

[க.பொ.த. உயர்தர கணிதப்பிரிவு மாணவர்களுக்கானது]

வெளியீடு:
கல்வி அபிவிருத்திப் பிரிவு
வலிகாமம் வலயக் கல்வி அலுவலகம்,
மருதனார்மடம்

www.ikedu.lk

நூலைப்பற்றி....

தலைப்பு: **இணைந்த கணிதம் சுயகற்றல் வழிகாட்டி**
(க.பொ.த. உயர்தர கணிதப்பிரிவு மாணவர்களுக்கானது)

மேற்பார்வை: **திரு.சு.சுந்தரசிவம்**
வலயக் கல்விப் பணிப்பாளர்
வலிகாமம் வலயக் கல்வி அலுவலகம்,
மருதனார்மடம்.

வழிகாட்டல்: **திரு.ந.காண்டீபன்**
பிரதிக் கல்விப் பணிப்பாளர்
வலிகாமம் வலயக் கல்வி அலுவலகம், மருதனார்மடம்.

தொகுப்புருவாக்கம்: **திரு.கு.விக்கினரூபன்**
உதவிக் கல்விப் பணிப்பாளர் (கணிதம்)
வலிகாமம் வலயக் கல்வி அலுவலகம், மருதனார்மடம்.

செவ்வை: **திரு.S.V.மகேந்திரன்**
முன்னாள் உதவிக் கல்விப் பணிப்பாளர் (கணிதம்)
வலயக் கல்வி அலுவலகம், யாழ்ப்பாணம்.

திரு.மு.இராகுலன்
ஆசிரியர்
யா/ஸ்கந்தவரோதயக் கல்லூரி, சுன்னாகம்.

அனுசரணையாளர்கள்: **கல்விக்கான ஓட்டம் நிகழ்ச்சித்திட்டம் (RFE)**
(யாழ். இந்து 1992 உயர்தரப் பிரிவினர்)
ஊடாக
அமரர் திரு. பொ.அன்னலிங்கம் குடும்பத்தினர்

பதிப்புரிமை: **கல்வி அபிவிருத்திப் பிரிவு**
வலிகாமம் வலயக் கல்வி அலுவலகம், மருதனார்மடம்

பதிப்பு: **ஆகஸ்ட் 2019**

பக்கங்கள்: .....

அச்சுப்பதிப்பு: **எவகிறீன் அச்சகம்**
இல.693, கே.கே.எஸ் வீதி, யாழ்ப்பாணம்.
தொ.பே. 021 221 9893

ISBN No: 978-624-5195-00-8

www.ikeau.lk

வளவாளர் குழாம்

01. **திரு.மு.இராகுலன்** (ஆசிரியர், யா/ஸ்கந்தவரோதயக் கல்லூரி)
02. **திரு.சி.பிரதீபன்** (ஆசிரியர், யா/யூனியன் கல்லூரி)
03. **திரு.சி.அரிகரன்** (ஆசிரியர், யா/ வயாவிளான் மத்திய கல்லூரி)
04. **திரு.இ.கிருஷ்ணதாஸ்** (ஆசிரியர், யா/அருணோதயக் கல்லூரி)
05. **திரு.கு.பஞ்சலிங்கம்** (ஆசிரியர், யா/மானிப்பாய் இந்துக் கல்லூரி)
06. **திரு.த.துசாந்த்** (ஆசிரியர், யா/மானிப்பாய் இந்துக் கல்லூரி)
07. **திரு.இ.திருக்குமாரன்** (ஆசிரியர், யா/மானிப்பாய் மகளிர் கல்லூரி)
08. **திரு.டொமினிக் யூட் நிர்மலன்** (ஆசிரியர், புனித ஹென்றியரசர் கல்லூரி)
09. **திருமதி சு.சிவகுமார்** (ஆசிரியர், யா/இராமநாதன் கல்லூரி)
10. **திருமதி T.சதீஸ்வரன்** (ஆசிரியர், யா/மானிப்பாய் மகளிர் கல்லூரி)
11. **திரு. T.குமாரதாசன்** (ஆசிரியர், யா/பண்டத்தரிப்பு மகளிர் உயர்தரப் பாடசாலை)
12. **திரு. K.மோகனரஞ்சன்** (ஆசிரியர், யா/யூனியன் கல்லூரி)
13. **அமரர் திரு. V.குமுகேசன்** ((முன்னாள் ஆசிரியர், யா/உடுவில் மகளிர் கல்லூரி)
14. **திரு.த.சத்தியசீலன்** (ஆசிரியர், யா/விக்ரோறியாக் கல்லூரி)
15. **திரு.வி.கஜன்** (ஆசிரியர், யா/யாழ்ப்பாணக் கல்லூரி)
16. **திரு.வீ.சிவாகரன்** (ஆசிரியர், யா/வட்டு இந்துக் கல்லூரி)
17. **திருமதி ச.சுஸாகரன்** (ஆசிரியர், யா/சங்கானை சிவப்பிரகாச மகா வித்தியாலயம்)
18. **திரு.செ.மைக்கல் நியூட்டன்** (ஆசிரியர், யா/சங்கானை சிவப்பிரகாச மகா வித்தியாலயம்)
19. **திரு.நா.திருக்குமாரன்** (ஆசிரியர், யா/இளவாலை கன்னியர் மடம் மகா வித்தியாலயம்)

www.lkedu.lk

மாகாணக் கல்விப் பணிப்பாளரின் வாழ்த்துச் செய்தி

வலிகாமம் கல்வி வலயத்தின் கல்வி அபிவிருத்திப் பிரிவினால் வெளியிடப்படும் க.பொ.த (உ/த) கணிதப்பிரிவு மாணவர்களுக்கான இணைந்த கணிதம் சுயகற்றல் வழிகாட்டி எனும் நூலுக்கான வாழ்த்துச்செய்தி வழங்குவதில் பெருமகிழ்ச்சி அடைகிறேன்.

இந் நூலானது க.பொ.த (உ/த) கணிதப்பிரிவு மாணவர்கள் தமிழ் மொழி மூலத்தில் கற்பதற்குரிய சிறந்த துணை நூலாக அமைவதாலும் வினாக்களுக்குரிய விடைகளும் உள்ளடக் கப்பட்டிருப்பதாலும் அவர்கள் சுயமாகக் கற்றுப் பொதுப்பரீட்சையில் சிறந்த பெறுபேற்றைப் பெறுவதற்கு உதவும் என நம்புகின்றேன். இணைந்த கணிதத்தில் மாணவர்களின் பெறுபேற்றினை உயர்த்துவதனை நோக்கமாக கொண்டு இந்நூலானது வலிகாமம் கல்வி வலய மாணவர்களுக்கு இலவசமாக வழங்கப்படவுள்ளது.

இந் நூலினை அச்சிடுவதில் நிதி உதவி ஏற்பாடு செய்து தந்த Race for Education நிகழ்ச்சித்திட்ட யாழ் இந்து 1992 உயர்தரப் பிரிவினருக்கும், நிதி உதவியினை வழங்கிய அமரர் பொ.அன்னலிங்கம் குடும்பத்தினருக்கும் எனது பாராட்டுக்களையும் நன்றிகளையும் தெரிவித்துக்கொள்கின்றேன்.

மாணவர்கள் இதன் மூலம் சிறந்த பெறுபேற்றைப் பெற்றுக்கொள்ள எல்லாம் வல்ல இறைவனை வேண்டி எனது மனமார்ந்த வாழ்த்துக்களைத் தெரிவித்துக்கொள்கின்றேன்.

செ.உதயகுமார்
மாகாணக் கல்விப் பணிப்பாளர்
மாகாணக் கல்வித் திணைக்களம்,
மருதனார்மடம்.

www.ikeou.lk

வலயக் கல்விப் பணிப்பாளரின் வாழ்த்துச் செய்தி

க.பொ.த. உயர்தரப் பெறுபேறு என்பது மாணவர்களின் எதிர்காலத்தோடு நெருங்கிய தொடர்புடையது. உயர்தரத்தில் இரண்டு வருட காலக் கற்றலின் விளைவு, பல்கலைக்கழக கற்கைகளுக்கும், ஏனைய உயர் கற்கைகளுக்கும் தெரிவு செய்யப்படும் வாய்ப்பை ஏற்படுத்து வதுடன், பிரகாசமான எதிர்காலத்தையும், சிறந்த தொழில் வாய்ப்பினையும் பெறுவதற்கும் வழி வகுப்பதாக அமைய வேண்டும். அவ்வகையில் கணித, விஞ்ஞானத் துறைகள் விருத்தி செய்யப் பட்டு, மாணவர் வளமும், பெறுபேறுகளும் அதிகரிக்கப்பட வேண்டும் என்பது அரசாங்கத்தின் எதிர்பார்ப்பாக உள்ளது.

அதனை நிறைவேற்றும் வகையில் மாணவர்களுக்கான கற்றல் வாய்ப்புக்கள் மற்றும் செயன்முறை அனுபவங்கள் ஏற்படுத்தப்படுவது இன்றியமையாததாகும். கணிதத்துறையில் இணைந்த கணிதம் பிரதானமான பாடமாகும். கடந்த வருட க.பொ.த. உயர்தரப் பெறுபேற் றில் இணைந்த கணித பாடத்தில் தேசிய ரீதியில் 66 வீத சித்தி பெறப்பட்டுள்ளது. ஆனால் எமது வலயப் பெறுபேறானது 87 வீதமாகும். இது தேசிய வீதத்தை விட 21 வீதம் அதிகமாகும். இதற் காக உழைத்த ஆசிரியர்கள், வழிகாட்டிய உதவிக் கல்விப் பணிப்பாளர், சேவைக்கால ஆசிரிய ஆலோசகர்களுக்கு எனது பாராட்டுக்களைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.

க.பொ.த உயர்தர இணைந்த கணித பாடத்தில் புதிய பாடத் திட்டத்தினை உள்ளடக்கிய சுயகற்றல் வழிகாட்டி ஒன்று தயாரிக்கப்பட்டு வெளியிடப்படுவது பாராட்டத்தக்கது. ஆசிரியர்களின் எழுத்தாக்கப் பங்களிப்புடன், கணித பாட உதவிக் கல்விப் பணிப்பாளரின் தொகுப் பாக்கத்தில் இந்நூல் வெளிவருகின்றது. அமரர் பொ.அன்னலிங்கம் ஞாபகார்த்தமாக அவரது குடும்பத்தினரின் நிதியுதவியுடன் Race For Education அமைப்பினூடாக இந்நூல் வெளியிடப்பட்டு, 2020 மற்றும் 2021 ஆண்டுகளில் பரீட்சைக்குத் தோற்றும் மாணவர்களுக்கு இலவசமாக வழங்கப்படவிருக்கிறது.

மாணவர்களின் சுயகற்றலுக்கு வாய்ப்பளித்து, பெறுபேற்று அடைவினை உயர்த்துவதற்காக எடுக்கப்பட்டுள்ள இந்நடவடிக்கையினைப் பாராட்டுகிறேன். மாணவர்கள் இதனைச் சரிவரப் பயன்படுத்தி, உயர்பெறுபேறுகளைப் பெற வாழ்த்துகிறேன். பாட ஆசிரியர்கள், மாணவர் களை வழிப்படுத்தி, உயர்சித்தி வீதத்தினைப் பெற அர்ப்பணிப்புடன் செயற்படுவார்கள் என எதிர்பார்க்கிறேன்.

சு. சுந்தரசிவம்
வலயக் கல்விப் பணிப்பாளர்,
வலிகாமம், வலயக் கல்வி அலுவலகம்,
மருதனார்மடம்.

www.ikeau.lk

பிரதிக் கல்விப் பணிப்பாளரின் வாழ்த்துச் செய்தி

வலிகாமம் வலயக் கல்வி அலுவலகத்தின் கல்வி அபிவிருத்திப் பிரிவினால் வெளியிடப்படும் க.பொ.த (உ/தர) மாணவர்களுக்கான "இணைந்த கணிதபாட சுய கற்றல் கையேடு" எனும் பயிற்சி நூலிற்கு வாழ்த்துச் செய்தி வழங்குவதில் பெரு மகிழ்வடைகின்றேன்.

கணித பாடம் கற்றலானது தர்க்கவியல், பகுப்பாய்வு, தொகுப்பாய்வு, ஆக்கபூர்வமான எண்ணம் போன்ற உயர் மட்ட சிந்தனை ஆற்றலை விருத்தியடையச் செய்வதாகும். இவ்வாறான ஆற்றலானது எதிர்காலத்தில் வாழ்க்கையின் நெருக்கீடுகளை மிகச்சிறப்பாக எதிர்கொள்ளும் திறனை மாணவர்களுக்கு வழங்குகின்றது. இடை நிலையில் கணித பாடம் என்றவாறு கற்பிக் கப்பட்டு க.பொ.த உயர் தரத்தில் கணிதத் துறையில் தூய கணிதம், பிரயோக கணிதம் என்ற இரு பாடங்களையும் இணைத்து இணைந்த கணிதம் என்ற பாடமாக் கற்பிக்கப்பட்டு வருகின்றது.

இப்பாடம் சார்ந்த தேர்ச்சியானது மாணவர்களை பொறியியல் மற்றும் தொழிநுட்ப துறை சார்ந்த உயர் கல்விக்கும் அதன் மூலமாக பெருமளவு பணம் ஈட்டக் கூடிய தொழில் துறைக்கும் இட்டுச்செல்கின்றது. இவ்வாறான ஒரு பின்புலத்தில் கடந்த 2018 ஆம் ஆண்டு க.பொ.த (உ/தர) பரீட்சைப் பெறுபேற்றின் படி வலிகாமம் கல்வி வலய மாணவர்களது இணைந்த கணிதபாட சித்தி வீதமே(87%) வடக்கு மாகாணத்தின் மிகச் சிறந்த பெறுபேறாகும்.

மேற்கூறப்பட்ட சாதனையை தொடர்ந்தும் நிலைநாட்டுவதற்கும், எமது மாணவர்களின் இணைந்த கணித பாடத் தேர்ச்சியை மேலும் வலுப்படுத்தவும், கணிதத் துறைக்குள் அதிகளவான மாணவர்களை ஈர்ப்பதற்குமாக எமது வலய கணித பாட உதவிக் கல்விப் பணிப்பாளர் திரு.கு.விக்கினரூபன் அவர்களின் அயராத முயற்சியின் பயனாக வலயத்தின் இணைந்த கணித பாட ஆசிரியர்களினால் தயாரிக்கப்பட்டுள்ள இக் கையேடு Race for Education நிறுவனத்தின் நிதி ஏற்பாட்டில் வெளியிடப்படவுள்ளது.

இணைந்த கணித பாட கற்றல் கற்பித்தல் செயற்பாட்டிற்கு காத்திரமான உறுத்துணையினை வழங்கவல்ல இக் கையேட்டு நூலின் தயாரிப்பில் மற்றும் வெளியீட்டில் பங்களித்த அனைவரையும் மனப்பூர்வமாக பாராட்டுவதுடன் வாழத்துக்களையும் தெரிவித்துக் கொள்கின்றேன்.

ந.காண்டீபன்

பிரதிக் கல்விப் பணிப்பாளர்

(கல்வி அபிவிருத்தி)
வலிகாமம் வலயக் கல்வி அலுவலகம்

www.ikeon.lk

உதவிக் கல்விப் பணிப்பாளரின் செய்தி

"எண்ணும் எழுத்தும் கண்ணெனத் தகும்" என்பது ஔவையாரின் அழியாத வாக்கு ஆகும். இவ்வாக்கானது கணிதத்தினதும் தாய்மொழியினதும் முக்கியத்துவத்தினைக் கூறிநிற்கின்றது. தீர்க்க முடியாத பல பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வை எட்டக்கூடிய ஒரு மார்க்கமாகவே கணிதம் ஆரம்ப காலத்தில் ஆரம்பமானது என இந்தியக் கணிதவியலாளரான சி.வி. பிமசங்கரன் அவர் கள் "கணிதக்கல்வி" (Mathamatics Education) என்ற நூலில் குறிப்பிட்டுள்ளார். எமது நாளாந்த செயற்பாடுகளை முன்னெடுத்துச் செல்வதற்கும் இயற்கை உலகைப் புரிந்து கொள்வதற்கும், பௌதிக உலகத்தில் அநேகமான பிரச்சினைகளுக்கு தீர்வுகாண்பதற்கும் மற்றும் கணிதத்தினை அடிப்படையாகக் கொண்ட வேறு பாடங்களைக் கற்பதற்கும் நாம் கணித பாடத்தைக் கற்றிருப்பது அவசியமாகின்றது.

இவற்றினைக் கருத்திற் கொண்டே பாடசாலைக் கலைத்திட்டத்தில் கணிதபாடம் தரம் ஒன்று முதல் தரம் 11 வரை கட்டாயமாக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் உயர்தரத்தில் இணைந்த கணிதம், உயர் கணிதம், கணிதம் எனும் பெயர்களில் கற்பிக்கப்படுகின்றது. இவற்றில் இணைந்த கணிதம் அதிகளவு மாணவர்களின் தெரிவுப்பாடமாகவுள்ளது. இப்பாடத்தில் மாணவர்களின் அடைவினை உயர்த்துவதனை நோக்கமாகக் கொண்டு மாணவர்களுக்காகச் சுயகற்றல் வழிகாட்டியாக இந்நூல் எமது வலய ஆசிரியர்களால் தொகுக்கப்பட்டுள்ளது. மாணவர்களுக்காக இப்பணியினைச் செய்து தந்த ஆசிரியர்களுக்கு நன்றியினைத் தெரிவித்துக் கொள்கின்றேன்.

மேலும் இந்நூலை தயாரித்து மாணவர்களுக்கு அச்சிட்டு வழங்கப் பெருமளவு நிதி தேவைப் பட்டது. இதற்கான நிதியினைத் தமிழ் மாணவர்களின் கணிதபாட உயர்ச்சிக்காக அதிகளவு பங்களிப்பினை வழங்கும் Race for Education இடம் நாம் கோரியபோது அவர்கள் உடனடியாக அமரர் பொ.அன்னலிங்கம் குடும்பத்தினரின் போற்றுதலுக்குரிய பங்களிப் பினை பெற்றுத்தந்தனர். இந் நிதியினை ஏற்பாடு செய்து தந்த Race for Education அமைப்பினருக்கும் பெருமளவு நிதியினை அன்பளிப்பாக வழங்கிய அமரர் பொ.அன்னலிங்கம் குடும்பத்தினருக் கும் எனது மனப்பூர்வமான நன்றிகளைத் தெரிவித்துக்கொள்கின்றேன்.

பாடசாலைகளும் மாணவர்களும் இந்த நூலினைப் பொருத்தமான முறையில் பயன்படுத்தி உயர்ச்சி காண்பதே இந்நூலின் உருவாக்கத்திற்குத் தம்மை அர்பணித்த அனைவருக்கும் நாம் செய்யும் பிரதியுபகாரமாகும்.

கு.விக்கினேஸ்வரன்.
உதவிக்கல்விப் பணிப்பாளர் (கணிதம்)
வலிகாமம் கல்வி வலயம்,
மருதனார்மடம்.

www.lkedu.lk

Message from Race for Education (RFE) Program

RFE Program was initiated with an objective to enhance the performance of the Tamil speaking students in the subject of Mathematics in GCE Ordinary Level examinations. RFE Program was inaugurated by a Group of 1992 Advanced Level batch students of Jaffna Hindu College with the support of Old Boys Associations of Jaffna Hindu College and other well-wishers and donors.

Since 2015, RFE Program has supported over 45,000 students from 400 schools in the Central, Eastern and Northern Provinces. RFE Program focuses exclusively on improving the performance in Mathematics at the GCE Ordinary Level examinations and through their effort we have witnessed a great deal of success.

We greatly appreciate the technical and financial support offered by the family of Late Mr. Ponnampalam Annalingam for the success of RFE from its inception in 2015. RFE Program congratulates the efforts of the family of Late Mr. P Annalingam, for publishing this guidebook in Combine Mathematics, in memory of their Late father Mr. P Annalingam, with a view of improving the performance of the students who sit Combined Mathematics in GCE Advanced Level. RFE believes that this noble initiative would encourage others to undertake similar projects in remembering their loved ones.

By the Old boys of AL 1992 of Jaffna Hindu College

www.kedu.lk

Dedication to late

Mr. Ponnampalam Annalingam



This book is sponsored by the family of
Mrs. Sivapakiam Annalingam (UK) and her children:-

- Mrs. K Shanthakumar
- Mrs. K Ravindran
- Mrs. S Mahendraraj
- Mr. A Kumararajan
- Mr. A Ravishankar

In memory of their late husband and father

Mr. P Annalingam.

The family hope this book will make a difference to the pupils of Srilanka. With the extensive explanations included in this book, the family expect the pupils will achieve their full potential and will prosper in their life in the future.

www.kalvu.lk

கணிதத் தொகுத்தறிவு முறை

n ஒரு நேர்முழு எண்ணாக இருந்து தரப்பட்ட முடிவை உண்மை என நிறுவுவதற்கு பின்வரும் படிமுறைகளைச் செய்ய வேண்டும்.

படி I :- $n=1$ ஆகும் போது உண்மையெனக் காட்ட வேண்டும்.

படி II :- $n = p$ ஆகும் போது உண்மை என எடுத்து $n = (p + 1)$க்கு உண்மை எனக் காட்ட வேண்டும்.

படி III :- கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் இம்முடிவு எல்லா நேர்முழு எண் பெறுமானங்களுக்கும் உண்மையாகும்.

தொடர்கள்

கூட்டல் தொடர்

$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots\ldots+a+((n-1)d$

nம் உறுப்பு $T_n = a+(n-1)d$

n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

பெருக்கற் தொடர்

$a,\ ar,\ ar^2,\ \ldots\ldots\ ar^{n-1}$

$T_n = ar^{n-1}$

$S_n = a+ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^{n-1}$

$$rS_n = ar+ar^2+ar^{n-1}+ar^n$$

$$(1-r)\,S_n = a-ar^n$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \qquad r \neq 1$$

$$S_n = an \qquad r = 1$$

கூட்டல் பெருக்கற் தொடர்

$a,\ 2ar,\ 3ar^2,\ \ldots\ldots nar^{n-1}$

$T_n = nar^{n-1}$

$S_n = a+2ar+3ar^2+\ldots\ldots+nar^{n-1}$

$$rS_n = ar+2ar^2+\ldots\ldots+(n-1)ar^{n-1}+nar^n$$

$$(1-r)\,S_n = a+ar+ar^2+ar^{n-1}+nar^n$$

$$(1-r)\,S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} - nar^n$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)^2} - \frac{nar^n}{(1-r)}$$

www.lkedu.lk

தொடர் ஒருங்குவதற்கான நிபந்தனை

$S_n = \sum_{r=1}^{n} Ur$

$\lim_{n \to \infty} S_n$

ஓர் முடிவுள்ள பெறுமானத்தை கொண்டிருப்பின் தொடர் ஒருங்கு தொடர் எனப்படும்.
அம் முடிவுள்ள பெறுமானம் அத்தொடரின் முடிவுற்ற உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை ஆகும்.

$\sum_{r=1}^{n} Ur$

$\lim_{n \to \infty} S_n$

பெருக்கற் தொடர்

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

$$\sum_{r=1}^{a} ur = \frac{a}{(1 - r)}, \ |r| < 1$$

கூட்டல் பெருக்கற் தொடர்

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)^2} - \frac{nar^n)}{(1 - r)}$$

$$\sum_{r=1}^{a} ur = \frac{a}{(1 - r)^2}, \ |r| < 1$$

பொதுத் தொடர்கள்

ஒரு தொடரின் rம் உறுப்பு U_r , V_r , W_r என்றவாறு குறிக்கப்படலாம்.

$U_r = f(r) - f(r+1)$ எனின்

$U_1 = f(1) - f(2)$
$U_2 = f(2) - f(3)$
.....
.....
$U_{n-1} = f(n-1) - f(n)$
$U_n = f(n) - f(n+1)$

$$\sum_{r=}^{n} U_r = f(1) - f(n+1)$$

$U_r = f(r+1) - f(r)$எனின்

$U_1 = f(2) - f(1)$
$U_2 = f(3) - f(2)$
.....
.....
$U_{n-1} = f(n) - f(n-1)$
$U_n = f(n+1) - f(n)$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(n+1) - f(1)$$

www.lkedu.lk

$U_r = f(r) - f(r+2)$ எனின்

$U_1 = f(1) - f(3)$
$U_2 = f(2) - f(4)$
$U_3 = f(3) - f(5)$
.....
.....
$U_{n-2} = f(n-2) - f(n)$
$U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1)$
$U_n = f(n) - f(n+2)$

$\sum_{r=}^{n} U_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$

நுட்பங்கள்

01. $U_r = r(r+1)$

$= \frac{r(r+1)}{3}\{(r+2) - (r-1)\}$

$= \frac{r(r+1)(r+2)}{3} - \frac{(r-1)r(r+1)}{3}$

$= f(r+1) - f(r)$

இங்கு $f(r) = \frac{(r-1)r(r+1)}{3}$

02. $U_r = (2r-1)(2r+1)$

$= \frac{(2r-1)(2r+1)}{6}\{(2r+3) - (2r-3)\}$

$= \frac{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}{6} - \frac{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}{6}$

03. $U_r = \frac{1}{r(r+1)}$

$= \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}$

$= f(r) - f(r+1)$

இங்கு $f(r) = \frac{1}{r}$

04. $U_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$

$= \frac{1}{2(r+1)}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r+2}\right]$

$= \frac{1}{2r(r+1)} - \frac{1}{2(r+1)(r+2)}$

www.lkedu.lk

05. $U_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$

$= \frac{1}{3(r+1)(r+2)}\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{r+3}\right\}$

$= \frac{1}{3r(r+1)(r+2)} - \frac{1}{3(r+1)(r+2)(r+3)}$

06. $U_r = \frac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$

$= \frac{1}{4(2r+1)}\left\{\frac{1}{2r-1} - \frac{1}{2r+3}\right\}$

$= \frac{1}{4(2r-1)(2r+1)} - \frac{1}{4(2r+1)(2r+3)}$

01. $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$n = 1$ போது LHS $= 1$

$RHS = \frac{1 \times 2}{2} = 1$

LHS = RHS

$n = 1$ இற்கு முடிவு உண்மை

$n = p$ இற்கு முடிவு உண்மை என்க.

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

$n = p + 1$ போது

LHS $= 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p + (p+1)$

$= \frac{p(p+1)}{2} + (p+1)$

$= (p+1)\left(\frac{p}{2} + 1\right)$

$= \frac{(p+1)(p+2)}{2} = \frac{(p+1)[(p+1)+1]}{2}$

$n = p$ ஆக முடிவு உண்மை எனில் $=$ RHS

$\therefore n = p + 1$ இற்கு முடிவு உண்மையாகும்.

$\therefore n$ இனது எல்லா நேர்முழு எண் பெறுமானத்திற்கும் கணித தொகுத்தறிவு முறையால் இம் முடிவு உண்மை ஆகும்.

www.lkedu.lk

02. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$n = 1$ போது LHS $= 1^2 = 1$

$$\text{RHS} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$$

LHS = RHS

$\therefore n = 1$ இற்கு முடிவு உண்மையாகும்.

$n = p$ இற்கு முடிவு உண்மை என்க.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

$n = p + 1$ ஆக

$$\text{LHS} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p^2 + (p+1)^2$$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2$$

$$= (p+1)\left\{\frac{p}{6}(2p+1) + (p+1)\right\}$$

$$= \frac{(p+1)(2p^2 + 7p + 6)}{6}$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

$$= \text{RHS}$$

$\therefore$ LHS = RHS

$n = p$ ஆக முடிவு உண்மை எனில்

$\therefore n = p + 1$ இற்கு முடிவு உண்மையாகும்.

$\therefore$ எல்லா நேர்முழு எண் n இற்கு கணித தொகுத்தறிவு முறையால் இம் முடிவு உண்மை ஆகும்.

www.lkedu.lk

03. $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$n = 1$ போது

$$LHS = 1^3 = 1$$

$$RHS = \frac{1^2 \times 2^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1$$

$$\therefore \ LHS = RHS$$

$\therefore n = p$ இற்கு முடிவு உண்மை என்க.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$

$n = p + 1$ ஆக

$$LHS = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p^3 + (p+1)^3$$

$$= \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3$$

$$= \frac{(p+1)^2 \ (p^2 + 4(p+1))}{4}$$

$$= \frac{(p+1)^2 \ (p^2 + 4p + 4)}{4}$$

$$= \frac{(p+1)^2 (p+2)^2}{4}$$

$$= RHS$$

$n = p$ ஆக முடிவு உண்மை எனில்

$\therefore n = p + 1$ இற்கு முடிவு உண்மையாகும்.

$\therefore$ எல்லா நேர்முழு எண் பெறுமானத்திற்கும் கணித தொகுத்தறிவு முறையால் இம் முடிவு உண்மை ஆகும்.

www.lkedu.lk

04. $\sum_{r=1}^{n} r \cdot r! = (n+1)! - 1$

$1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots\ldots\ldots\ldots + n.n! = (n+1)! - 1$

$n = 1$ போது

$LHS = 1.1! = 1 \times 1 = 1$

$RHS = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$

$LHS = RHS$

$\therefore n = 1$ இற்கு முடிவு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிவு உண்மை என்க.

$1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots\ldots\ldots\ldots + p.p! = (p+1)! - 1$

$n = p+1$ ஆக

$LHS = 1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots\ldots\ldots\ldots + p.p! + (p+1)(P+1)!$

$= (p+1)! - 1 + (p+1) \cdot (p+1)!$

$= (p+1)! (1 + p + 1) - 1$

$= (p+1)! (p+2) - 1$

$= (p+2)! - 1$

$LHS = RHS$

$n = p$ ஆக முடிவு உண்மை எனில்

$\therefore n = p+1$ இற்கு முடிவு உண்மையாகும்.

$\therefore n$ இனது எல்லா நேர்முழு எண் பெறுமானத்திற்கும் இம் முடிவு உண்மை ஆகும்.

05. n னது எல்லா நேர்முழு எண் பெறுமானத்திற்கும் $8^n - 3^n$ என்பது 5 ஆல் மிச்சமின்றி வகுபடும் எனக் காட்டுக.

$f(n) = 8^n - 3^n$

$n = 1$ போது $f(1) = 8 - 3 = 5$

இது 5 ஆல் மிச்சமின்றி வகுபடும்.

$\therefore n = 1$ இற்கு முடிவு உண்மை.

$n = p$ ற்கு முடிவு உண்மை என்க.

$f(p) = 8^p - 3^p = 5k$ இரு $k \in Z$

$8^p = 5k + 3^p$

$n = p+1$ போது

$f(p+1) = 8^{p+1} - 3^{p+1}$

$= 8.8^p - 3^{p+1}$

$= 8(5k + 3^p) - 3^{p+1}$

$= 8 \times 5k + 8.3^p - 3^{p+1}$

$= 40k + 3^p (8 - 3)$

$= 40k + 5.3^p$

$= 5(8k + 3^p)$

$f(P+1) = 5m$ இது $8k + 3^p = m$

$m \in Z$

இது 5 ஆல் மிச்சமின்றி வகுபடும்.

$n = p$ ஆக முடிவு உண்மை எனில்

$\therefore n = p+1$ இற்கு முடிவு உண்மையாகும்.

$\therefore$ எல்லா நேர்முழு எண் பெறுமானத்திற்கும் கணித தொகுத்தறிவு முறையால் இம் முடிவு உண்மை ஆகும்.

www.lkedu.lk

06. எல்லா நேர்முழு எண் பெறுமானத்திற்கும் $2^{2n+1} - 6n - 2$ ஆனது 18 ஆல் மிச்சமின்றி வகுபடும் எனக் காட்டுக.

$f(n) = 2^{2n+1} - 6n - 2$ என்க.

$n = 1$ போது $f(1) = 2^3 - 6 - 2 = 8 - 6 - 2 = 0$

$n = 2$ போது $f(2) = 2^5 - 12 - 2 = 32 - 12 - 2 = 18$

இது 18 ஆல் மிச்சமின்றி வகுபடும்.

$\therefore n = 2$ இற்கு முடிவு உண்மை.

$n = p$ ற்கு முடிவு உண்மை என்க.

$$f(p) = 2^{2p+1} - 6p - 2 = 18k \text{ இது } k \in Z$$

$$2^{2p+1} = 18k + 6p + 2$$

$n = p + 1$ இற்கு

$$f(p+1) = 2^{2(p+1)+1} - 6(p+1) - 2$$

$$= 2^{2p+3} - 6p - 6 - 2$$

$$= 2^{2p+3} - 6p - 8$$

$$= 2^2 \cdot 2^{2p+1} - 6p - 8$$

$$= 4(18k + 6p + 2) - 6p - 8$$

$$= 72k + 24p + 8 - 6p - 8$$

$$= 72k + 18p$$

$$= 18(4k + p)$$

$= 18m$ இங்கு $4k + p = m$

$m \in Z$

இது 18 ஆல் மிச்சமின்றி வகுபடும்.

$n = p$ ஆக முடிவு உண்மை எனில்

$\therefore n = p + 1$ இற்கு முடிவு உண்மையாகும்.

$\therefore$ எல்லா நேர்முழு எண் பெறுமானத்திற்கும் கணித தொகுத்தறிவு முறையால் இம் முடிவு உண்மை ஆகும்.

www.lkedu.lk

07. $9+99+999+9999+\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை. $\frac{1}{9}(10^{n+1}-10-9n)$ எனக் காட்டுக.

$9+99+999+9999+\ldots\ldots$

$=9\ [\ 1+11+111+1111+\ldots\ldots]$

$$=9\left[\frac{10-1}{9}+\frac{100-1}{9}+\frac{1000-1}{9}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\not{9}\left[\frac{10^1-1}{\not{9}}+\frac{10^2-1}{\not{9}}+\frac{10^3-1}{\not{9}}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\underbrace{10^1+10^2+10^3+\ldots\ldots}_{\text{பெ.வி}}-n$$

$$=10\left(\frac{1-10^n}{1-10}\right)-n$$

$$=10\left(\frac{1-10^n}{-9}\right)-n$$

$$=\frac{10^{n+1}-10}{9}-n$$

$$=\frac{1}{9}\left[\ 10^{n+1}-10-9n\ \right]$$

08. நேரான உறுப்புகளைக் கொண்ட பெருக்கல் தொடர் ஒன்றின் p, q, r ஆவது உறுப்புக்கள் முறையே P, Q, R ஆகும்.

$(q-r)\ log\,P+(r-p)\ log\,Q+(p-q)\ log\,R=0$ எனக் காட்டுக.

பொது விகிதம் d என்க. 1ம் உறுப்பு a என்க.

$T_p=P$

$P=ad^{p-1}\ \rightarrow\ (1)$

$T_q=Q$

$Q=ad^{q-1}\ \rightarrow\ (2)$

$T_r=R$

$R=ad^{r-1}\ \rightarrow\ (3)$

$$(1)/(2)\Rightarrow\frac{P}{Q}=\frac{ad^{p-1}}{ad^{q-1}}$$

$$\frac{P}{Q}=d^{p-q}$$

$$log\frac{P}{Q}=log\ d^{p-q}$$

$$log\,P-log\,Q=(p-q)\ log\,d\longrightarrow(1)$$

இவ்வாறே $log\,Q-log\,R=(q-r)\ log\,d\longrightarrow(2)$ எனக் காட்டலாம்.

$$(1)/(2)\Rightarrow\frac{log\,P-log\,Q}{log\,Q-log\,R}=\frac{p-q}{q-r}$$

$$(q-r)\ (log\,P-log\,Q)=((p-q)\ (log\,Q-log\,R)$$

$$(q-r)\ log\ P-(q-r)\ log\ Q$$

$$=(p-q)\ log\ Q-(p-q)\ log\,R$$

$$(q-r)\ log\,P+(r-p)\ log\,Q+(p-q)\ log\,R=0$$

www.lkedu.lk

தொடர்கள்

★ 1ம் உறுப்பு a ஆகவும், பொதுவித்தியாசம் d ஆகவும் உள்ள ஒரு கூட்டல்விருத்தியின் nம் உறுப்பு $T_n = a + (n-1)\,d$ எனவும், n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$ எனவும் தரப்படும்.

★ 1ம் உறுப்பு a ஆகவும் பொதுவிகிதம் r ஆகவும் உள்ள பெருக்கல்விருத்தியின் nம் உறுப்பு $T_n = ar^{n-1}$ எனவும், n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ எனவும் தரப்படும்.

09. ஒரு தொடரின் பொது உறுப்பு

$U_r = \frac{r}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ ஆகும்.

$U_r = \frac{A}{(r+1)} + \frac{B}{(r+2)} + \frac{C}{(r+3)}$ ஆகுமாறு

A, B, C என்னும் மாறிலிகளைக் காண்க.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}$ எனக் காட்டுக. இத்தொடர் ஒருங்கும் எனக் காட்டி முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$$U_r = \frac{r}{(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$\frac{r}{(r+1)(r+2)(r+3)} = \frac{A}{(r+1)} + \frac{B}{(r+2)} + \frac{C}{(r+3)}$$

$$r = A(r+2)(r+3) + B(r+1)(r+3) + C(r+1)(r+2)$$

$r = -1$ இல் $-1 = 2A$

$$A = \frac{-1}{2}$$

$r = -2$ இல் $-2 = -B$

$$B = 2$$

$r = -3$ இல் $-3 = 2C$

$$C = \frac{-3}{2}$$

$$A = \frac{-1}{2}, \quad B = 2, \quad C = \frac{-3}{2}$$

$$U_r = \frac{-1}{2(r+1)} + \frac{2}{r+2} - \frac{3}{2(r+3)}$$

www.lkedu.lk

$r=1$ இல் $\quad U_1 = \frac{-1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{8}$

$r=2$ இல் $\quad U_2 = \frac{-1}{6} + \frac{2}{4} - \frac{3}{10}$

$r=3$ இல் $\quad U_3 = \frac{-1}{8} + \frac{2}{5} - \frac{3}{12}$

$\vdots$

$r=n-2$ இல் $\quad U_{n-2} = \frac{-1}{2(n-1)} + \frac{2}{n} - \frac{3}{2(n+1)}$

$r=n-1$ இல் $\quad U_{n-1} = \frac{-1}{2n} + \frac{2}{n+1} - \frac{3}{2(n+2)}$

$r=n$ இல் $\quad U_n = \frac{-1}{2(n-1)} + \frac{2}{n+2} - \frac{3}{2(n+3)}$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{-1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{3}{2(n+2)} + \frac{2}{n+2} - \frac{3}{2(n+3)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)} \right)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \frac{1}{4} + 0 - 0 = \frac{1}{4} < \infty$$

∴ ஒருங்கு தொடர் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{1}{4}$ ஆகும்.

www.lkedu.lk

10. ஒரு தொடரின் பொது உறுப்பு $U_r = \frac{2r+6}{r(r+1)(r+2)}$ ஆகும்.

$U_r = \frac{A}{r} + \frac{B}{r+1} + \frac{C}{r+2}$ ஆகுமாறு A, B, C என்னும் மாறிலிகளைக் காண்க.

$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{2} - \frac{3}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ எனக் காட்டுக.

இத் தொடர் ஒருங்கும் எனக்காட்டி முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

www.lkedu.lk

11. ஒரு தொடரின் பொது உறுப்பு $U_r = \frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$ ஆகும்.

$f(r) = \frac{\lambda(4r+1)}{r(r+1)}$ எனின், $U_r = f(r) - f(r+1)$ ஆகுமாறு λ வைக் காண்க.

$\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க. இத்தொடர் ஒருங்கும் எனக் காட்டி முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$U_r = \frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$$

$$f(r) = \frac{\lambda(4r+1)}{r(r+1)}$$

$$f(r+1) = \frac{\lambda(4(r+1)+1)}{(r+1)(r+2)} = \frac{\lambda(4r+5)}{(r+1)(r+2)}$$

$$U_r = f(r) - f(r+1)$$

$$\frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{\lambda(4r+1)}{r(r+1)} - \frac{\lambda(4r+5)}{(r+1)(r+2)}$$

$$2r+1 = \lambda(4r+1)(r+2) - \lambda(4r+5)(r)$$

மாறிலி $1 = 2\lambda$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$f(r) = \frac{4r+1}{2(r)(r+1)}$$

$$U_r = f(r) - f(r+1)$$

$r=1$ இல் $U_1 = f1 - f2$

$r=2$ இல் $U_2 = f2 - f3$

$r=3$ இல் $U_3 = f3 - f4$

⋮

$r=n-2$ இல் $U_{n-2} = fn-2 - fn-1$

$r=n-1$ இல் $U_{n-1} = fn-1 - fn$

$r=n$ இல் $U_n = fn - fn+1$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1)$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{4n+5}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{4} - \frac{4n+5}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{4} - \frac{4n+5}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{5}{4}$$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{4}$ முடிவுள்ளது ஒருங்கு தொடர் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{5}{4}$ ஆகும்.

www.lkedu.lk

12. ஒரு தொடரின் பொது உறுப்பு $U_r = r(3r+5)$ ஆகும்.

$f(r) = \mu(r-1)r\ (r+2)$ எனின், $U_r = f(r) - f(r+1)$ ஆகுமாறு μ ஐக் காண்க.

$\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க. இத்தொடர் ஒருங்குவதில்லை எனக் காட்டுக.

$U_r = r(3r+5)$

$f(r) = \mu(r-1)r\ (r+2)$

$f(r+1) = \mu r(r+1)(r+3)$

$U_r = f(r) - f(r+1)$

$r(3r+5) = \mu(r-1)r(r+2) - \mu r(r+1)(r+3)$

$3r+5 = \mu(r-1)(r+2) - \mu(r+1)(r+3)$

மாறிலி $5 = -2\mu - 3\mu$

$5\mu = -5$

$\mu = -1$

$\therefore f(r) = -(r+1)r\ (r+2)$

$U_r = f(r) - f(r+1)$

$r=1$ இல் $U_1 = f1 - f2$

$r=2$ இல் $U_2 = f2 - f3$

$r=3$ இல் $U_3 = f3 - f4$

$\vdots$

$r=n-2$ இல் $U_{n-2} = fn-2 - fn-1$

$r=n-1$ இல் $U_{n-1} = fn-1 - fn$

$r=n$ இல் $U_n = fn - fn+1$

$\sum_{r=1}^{n} U_r = f1 - f\,n+1$

$\sum_{r=1}^{n} U_r = 0 + n(n+1)(n+3)$

$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n \to \infty} n(n+1)(n+3) = \infty$

$\therefore$ தொடர் ஒருங்காது

www.lkedu.lk

13. $f(r) = \frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r}{6}$ எனின், $f(r) - f(r+1) = r^2$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} r^2$ ஐக் காண்க. எல்லா நேர்நிறை எண் n இற்கும் $\sum_{r=1}^{n} r(7r-1) = \sum_{r=n+1}^{2n} r(r+1)$ என நிறுவுக.

$$f(r) = \frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r}{6}$$

$$\therefore f(r-1) = \frac{(r-1)^3}{3} + \frac{(r-1)^2}{2} + \frac{(r-1)}{6}$$

$$f(r) - f(r-1) = \frac{r^3}{3} - \frac{(r-1)^3}{3} + \frac{r^2}{2} - \frac{(r-1)^2}{2} + \frac{r}{6} - \frac{(r-1)}{6}$$

$$= \frac{r^3 - (r-1)^3}{3} + \frac{r^2(r-1)^2}{2} + \frac{r-(r-1)}{6}$$

$$= \frac{6r^2}{6}$$

$$f(r) - f(r-1) = r^2$$

r = 1 இல் $f1 - f0 = 1^2$

r = 2 இல் $f2 - f1 = 2^2$

r = 3 இல் $f3 - f2 = 3^2$

$\vdots$

r = n − 2 இல் $fn-2 - fn-3 = (n-2)^2$

r = n − 1 இல் $fn-1 - fn-2 = (n-1)^2$

r = n இல் $fn - fn+1 = n^2$

$$fn - f0 = \sum_{r=1}^{n} r^2$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - 0$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{LHs} = \sum_{r=1}^{n} r(7r-1)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (7r^2 - r)$$

$$= 7\sum_{r=1}^{n} r^2 - \sum_{r=1}^{n} r$$

www.ikedu.lk

$$= \frac{7n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}[14n + 7 - 3]$$

$$= \frac{n(n+1)(7n+2)}{3} \longrightarrow (*)$$

$$\text{RHS} = \sum_{r=n+1}^{2n} r(r+1) = \sum_{r=1}^{2n} r(r+1) - \sum_{r=1}^{n} r(r+1)$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} r^2 + \sum_{r=1}^{2n} r - \sum_{r=1}^{n} r^2 - \sum_{r=1}^{n} r$$

$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} + \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(7n+2)}{3} \longrightarrow (**)$$

(*) & (**) LHs = RHs

14. $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{3.5.7} + \ldots\ldots$ எனும் தொடரின் rம் உறுப்பு U_r ஐ எழுதுக.

$f(r) = \frac{-1}{4(r+2)(r+4)}$ எனின், $f(r) - f(r-2) = U_r$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து

$\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க. $\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \frac{11}{96}$ என உய்த்தறிக.

$$\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{3.5.7} + \ldots\ldots$$

$$U_r = \frac{1}{r(r+2)(r+4)}$$

$$f(r) = \frac{-1}{4(r+2)(r+4)}$$

$$\therefore f(r-2) = \frac{-1}{4r(r+2)}$$

$$f(r) - f(r-2) = \frac{-1}{4(r+2)(r+4)} + \frac{1}{4r(r+2)}$$

$$= \frac{-r + r + 4}{4r(r+2)(r+4)}$$

$$= \frac{1}{r(r+2)(r+4)} = U_r$$

$$\therefore U_r = f(r) - f(r-2)$$

www.lkedu.lk

r = 1 இல் $U_1 = f1 - f(-1)$

r = 2 இல் $U_2 = f2 - f_0$

r = 3 இல் $U_3 = f3 - f1$

r = 4 இல் $U_4 = f4 - f2$

$\vdots$

r = n – 3 இல் $U_{n-3} = fn-3 - fn-5$

r = n – 2 இல் $U_{n-2} = fn-2 - fn-4$

r = n – 1 இல் $U_{n-1} = fn-1 - fn-3$

r = n இல் $U_n = fn - fn-2$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = fn + fn-1 - f_0 - f(-1)$$

$$= \frac{-1}{4(n+2)(n+4)} - \frac{-1}{4(n+1)(n+3)} - \left(\frac{-1}{32}\right) - \left(\frac{-1}{12}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{32} + \frac{1}{12} = \frac{11}{96} < \infty \text{ ஒருங்கும்.}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \frac{11}{96}$$

15. $U_r = \frac{r+4}{r(r+1)(r+2)}$ எனின், $U_r = 2V_r - V_{r+1}$ ஆகுமாறு k ஐக் காண்க. இங்கு $V_r = \frac{k}{r(r+1)}$ இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} \frac{U_r}{2^{r+1}}$ ஐக் காண்க.

$$U_r = \frac{r+4}{r(r+1)(r+2)}$$

$$V_r = \frac{k}{r(r+1)}$$

$$\therefore V_{r+1} = \frac{k}{(r+1)(r+2)}$$

$$U_r = 2V_r - V_{r+1}$$

$$\frac{r+4}{r(r+1)(r+2)} = \frac{2k}{r(r+1)} - \frac{k}{(r+1)(r+2)}$$

$$= \frac{2k(r+2) - kr}{r(r+1)(r+2)}$$

$$r + 4 = kr + 4k$$

$$k = 1$$

$$\therefore V_r = \frac{1}{r(r+1)}$$

www.ikedu.lk

$$\frac{U_r}{2^{r+1}} = \frac{1}{2^{r+1}}\left(2V_r - V_{r+1}\right)$$

$$\frac{U_r}{2^{r+1}} = \frac{1}{2^r}V_r - \frac{1}{2^{r+1}}V_{r+1}$$

$r = 1$ இல் $\quad \frac{U_1}{2^2} = \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2^2}V_2$

$r = 2$ இல் $\quad \frac{U_2}{2^3} = \frac{1}{2^2}V_2 - \frac{1}{2^3}V_3$

$r = 3$ இல் $\quad \frac{U_3}{2^4} = \frac{1}{2^3}V_3 - \frac{1}{2^4}V_4$

$\vdots$

$r = n-1$ இல் $\quad \frac{U_{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}V_{n-1} - \frac{1}{2^n}V_n$

$r = n$ $\quad \frac{U_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}V_n - \frac{1}{2^{n+1}}V_{n+1}$

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{U_r}{2^{r+1}} = \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2^{n+1}}V_{n+1}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

www.ikedu.lk

சமனிலி

அட்சரகணித சமனிலிகள்

01. a,b,cÎ 1Â ஆக இருக்க.

a^2+b^2 ³ $2ab$ எனக் காட்டி

$a^2+b^2+c^2$ ³ $ab+bc+ca$ எனக் காட்டுக.

விடை

a,bÎ -1Â ஆக $(a-b)^2$ ³ 0 ஆகும்.

$a^2-2ab+b^2$ ³ 0

a^2+b^2 ³ $2ab$

a^2+b^2 ³ $2ab$

b^2+c^2 ³ $2bc$

c^2+a^2 ³ $2ac$

$2a^2+2b^2+2c^2$ ³ $2ab+2bc+2ca.$

$a^2+b^2+c^2$ ³ $ab+bc+ca$ ஆகும்.

02. $a,b,c>0$ ஆக இருக்க $a+b$ ³ $2\sqrt{ab}$ எனவும்

$(a+b)(b+c)(c+a)$ ³ $8abc$ எனவும் காட்டுக.

விடை a,b,cÎ 1Â^+_o

\ $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$ ³ 0

$\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2$ ³ 0

$a-2\sqrt{ab}+b$ ³ 0

$a+b$ ³ $2\sqrt{ab}$ ஆகும்.

$(a+b)$ ³ $2\sqrt{ab}$

$(b+c)$ ³ $2\sqrt{bc}$

$(c+a)$ ³ $2\sqrt{ca}$

$(a+b)(b+c)(c+a)$ ³ $8\sqrt{ab\cdot bc\cdot ca}$

$= 8\sqrt{a^2b^2c^2}$

$= 8abc$

$(a+b)(b+c)(c+a)$ ³ $8abc$ //

www.lkedu.lk

03. x, y, z என்பன நேர் மெய்யெண்களாக இருக்க

i) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$ எனக் காட்டிட இதனை பயன்படுத்தி

ii) $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$ எனக் காட்டுக.

விடை $x, y \in R^+$

$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 \geq 0$ ஆகும்.

$\frac{x}{y}-2\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{y}{x}}+\frac{y}{x} \geq 0$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{x+y+z}{x}+\frac{x+y+z}{y}+\frac{x+y+z}{z}$

$=1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+1+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1$

$=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)$

$\geq 3+2+2+2$

≥ 9

04. $x^5+y^5 \geq x^4y+xy^4$ எனக்காட்டுக. இங்கு $x, y > 0$ ஆகும்.

$x^5+y^5-\left(x^4y+xy^4\right) = x^4(x-y)+y^4(y-x)$

$=(x-y)\left[x^4-y^4\right]$

$=(x-y)\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)$

$=(x-y)(x-y)(x+y)\left(x^2+y^2\right)$

$=(x-y)^2(x+y)\left(x^2+y^2\right)$

$\geq (x-y)^2 \geq 0 \quad x+y>0, x^2+y^2>0$

$\therefore x^5+y^5-\left(x^4y+xy^4\right) \geq 0$

$x^5+y^5 \geq x^4y+xy^4$ ஆகும்.

▫

05. $x^7+1 \geq x^6+x$ எனக் காட்டுக. இங்கு $x > 0$ ஆகும்.

விடை

$x^7+1-\left(x^6+x\right)=x^7-x^6+1-x$

$=x^6[x-1]-1[x-1]$

$=[x-1]\left[x^6-1\right]$

$=(x-1)\left[x^3-1\right]\left[x^3+1\right]$

$=(x-1)(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^3+1\right)$

$=(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)\left(x^3+1\right)$

≥ 0

$x^7+1-\left(x^6+x\right) \geq 0$

$x^7+1 \geq x^6+x$ //

www.tkedu.lk

பின்வரும் சமனிலிகளைத் தீர்க்க.

01. $(x-1)(x+2) \geq 0$

	$x < -2$	$-2 \leq x < 1$	$x \geq 1$
$(x-1)(x+2)$	$(-)\times(-)$	$(-)(+)$	$(+)(+)$
இன் குறி	$(+)$	$(-)$	$(+)$

$\therefore x \leq -2$ or $x \geq 1$ ஆகும்.

02. $(x+1)(x-2)(x-3) < 0$

$x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$	
$(-)(-)(-)$	$(+)(-)(-)$	$(+)(+)(-)$	$+\times+\times+$	$(x+1)(x-2)(x-3)$
$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	இன் குறி

$x < -1$ அல்லது $2 < x < 3$

03. $x \neq 1$ இற்கு $\left(\frac{x-3}{x-1}\right) \geq 0$

	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x \geq 3$
$\frac{x-3}{x-1}$ இன்	$\frac{(-)}{(-)}$	$\frac{(-)}{(+)}$	$\frac{(+)}{(+)}$
குறி	$(+)$	$(-)$	$+$

$x < 1$ அல்லது $x \geq 3$ ஆகும்.

04. $x^2 - 5|x| - 6 < 0$

$x \geq o$ எனின் $x^2 - 5x - 6 < O$

$(x-6)(x+1) < O$

+ + + | - - - - | + + +

-1 6

$\therefore -1 < x < 6$

தீர்வு $o \leq x < 6$ ——— ①

$x < o$ எனின்

$x^2 - 5(-x) - 6 < 0$

$x^2 + 5x - 6 < 0$

$(x+6)(x-1) < 0$

+ + + + | - - - - - | + + +

$x = -6$ $x = 1$

$-6 < x < 1$

தீர்வு $-6 < x < o$ ——— ②

தீர்வு $-6 < x < 6$

05. $|x-1|+|x-2| \geq 3$

$x<1$ எனின் $-(x-1)+[-(x-2)] \geq 3$

$-x+1-x+2 \geq 3$

$-2x \geq 0$

$x \leq 0$

தீர்வு $x \leq 0$ ——— ①

$1 \leq x<2$ $\quad x-1-(x-2) \geq 3$

$x-1-x+2 \geq 3$

$1 \geq 3$

தவறு

தீர்வு இல்லை ——— ②

$x \geq 2$ எனின் $\quad x-1-(x-2) \geq 3$

$2x \geq 6$

$x \geq 3$

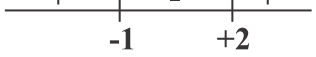
தீர்வு $x \geq 3$ ——— ③

இறுதி தீர்வு $x \leq 0$ *or* $x \geq 3$ ஆகும்.

06. $\frac{|x-2|}{x+1} \leq 0$, $x \neq -1$ ஆகும்.

$x<2$ எனின் $\frac{-(x-2)}{x+1} \leq 0$

$\frac{x-2}{x+1} \geq 0$



$x<-1$ $\quad x \geq 2$

தீர்வு

$x<-1$ $\quad (\because x<2)$

$x \geq +2$ எனின்

$\frac{x-2}{x+1} \leq 0$



$-1<x \leq 2$

தீர்வு $x=2$ $\quad (\because x \geq 2)$

இறுதி தீர்வு $x<-1$ *or* $x=2$

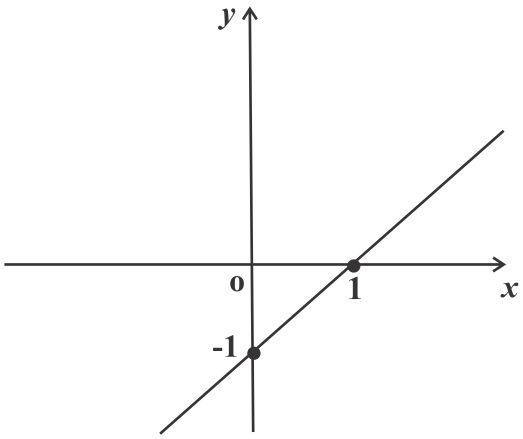
www.lkedu.lk

மட்டுச்சமனிலி வரைபுகள்.

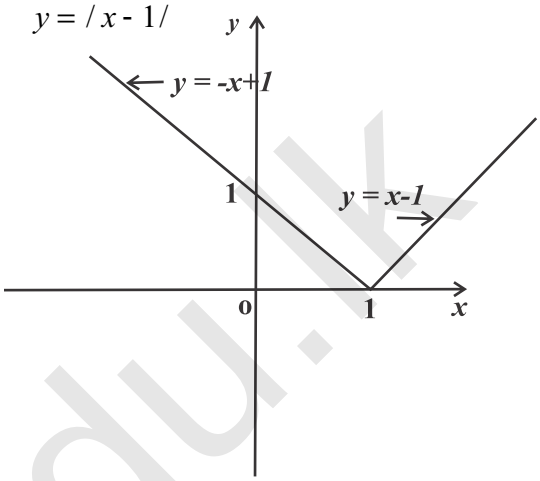
01. $y = |x - 1|$

$$= \begin{cases} x - 1 & , \ x \geq 1 \\ -x + 1 & , \ x < 1 \end{cases}$$

$y = x-1$



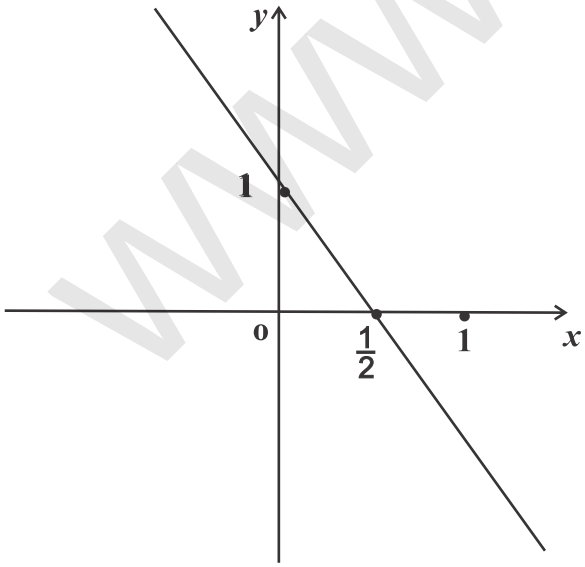
$y = |x - 1|$



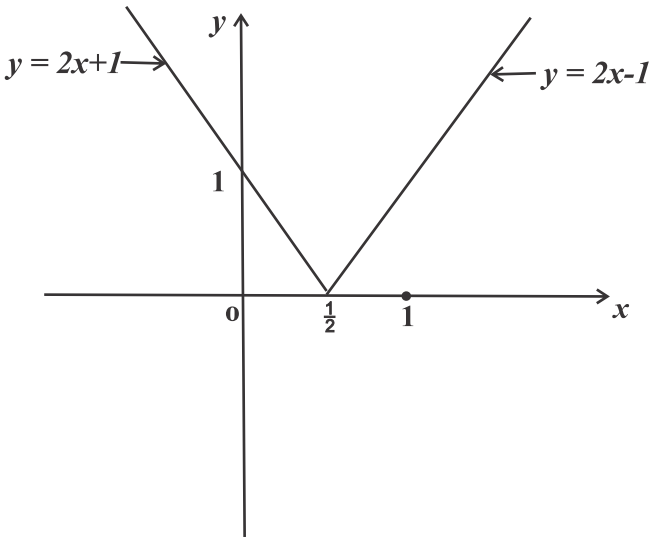
02. $y = |1 - 2x|$

$$= \begin{cases} 2x - 1 & , \ x \geq \frac{1}{2} \\ -2x + 1 & , \ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$y = 1 - 2x$



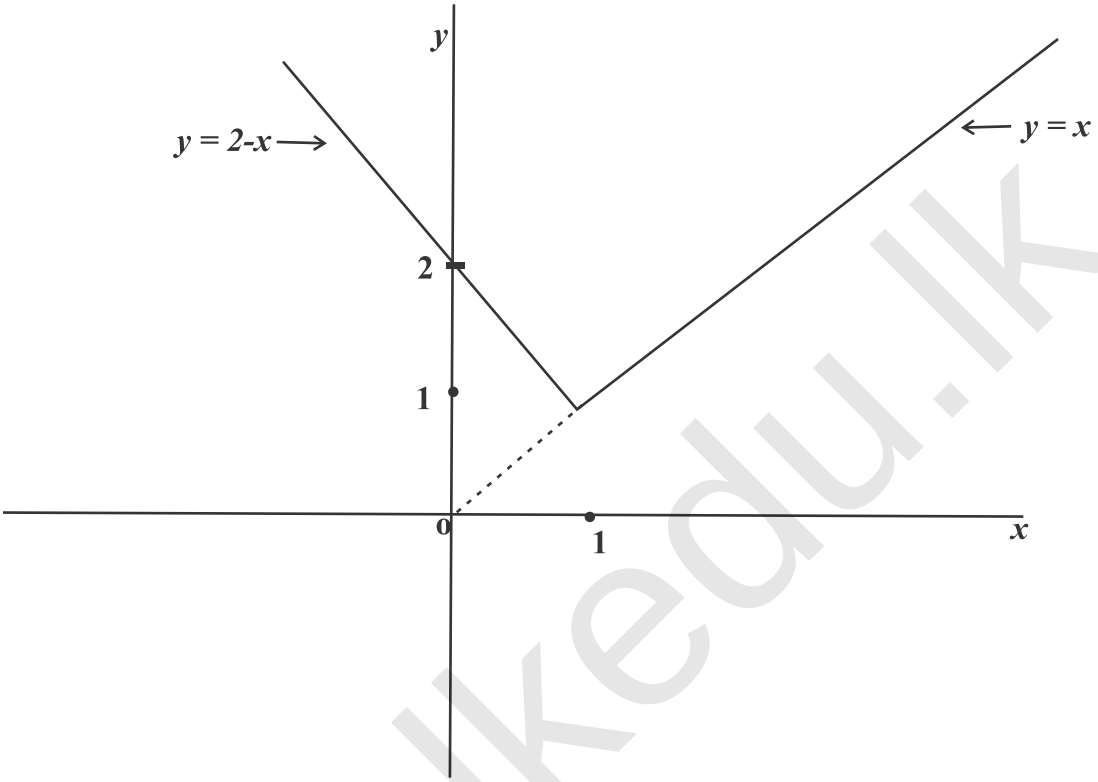
$y = |1 - 2x|$



www.lkedu.lk

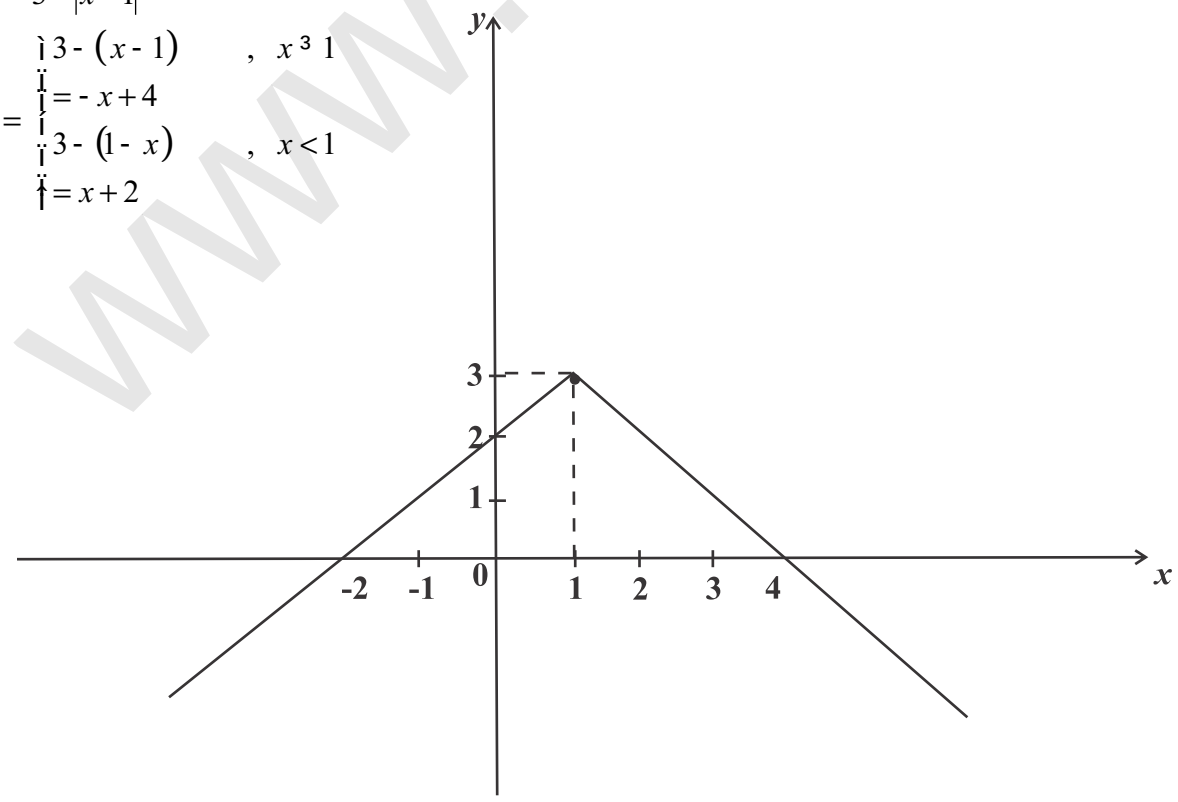
03. $y = /+|x-1|$

$$= \begin{cases} 1+(x-1) & , \ x \geq 1 \\ = x & \\ 1+(1-x) & , \ x < 1 \\ = 2-x & \end{cases}$$



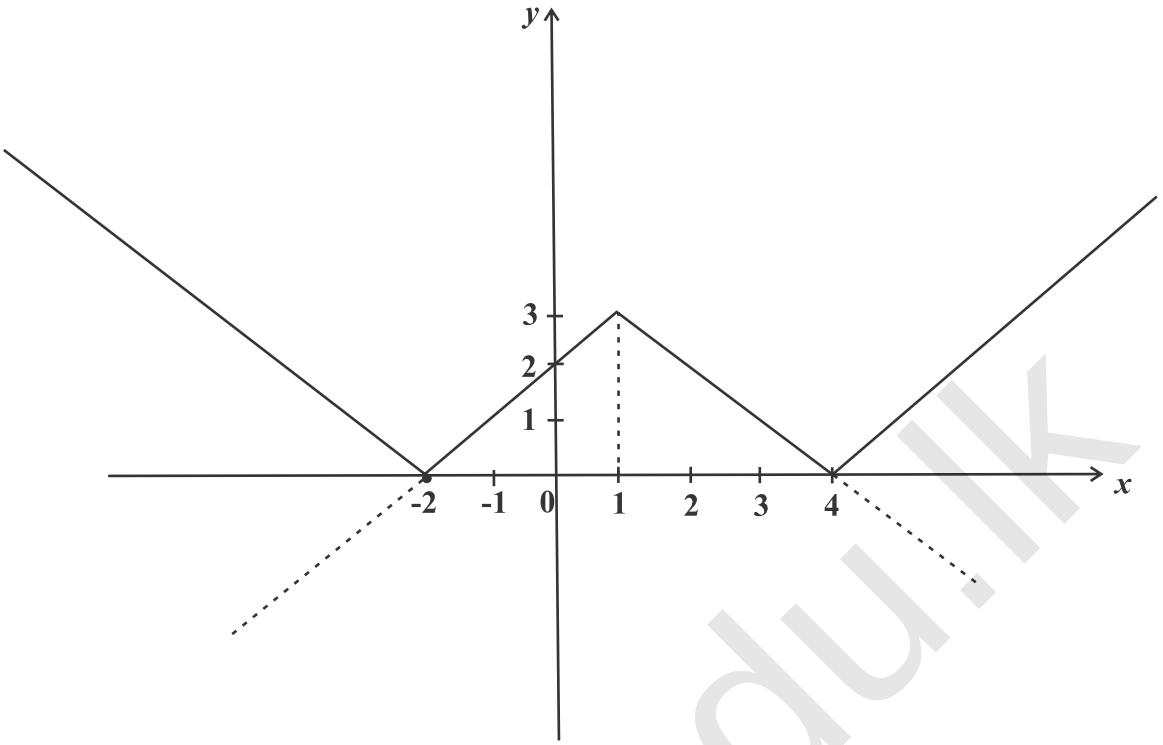
04. $y = 3-|x-1|$

$$= \begin{cases} 3-(x-1) & , \ x \geq 1 \\ = -x+4 & \\ 3-(1-x) & , \ x < 1 \\ = x+2 & \end{cases}$$



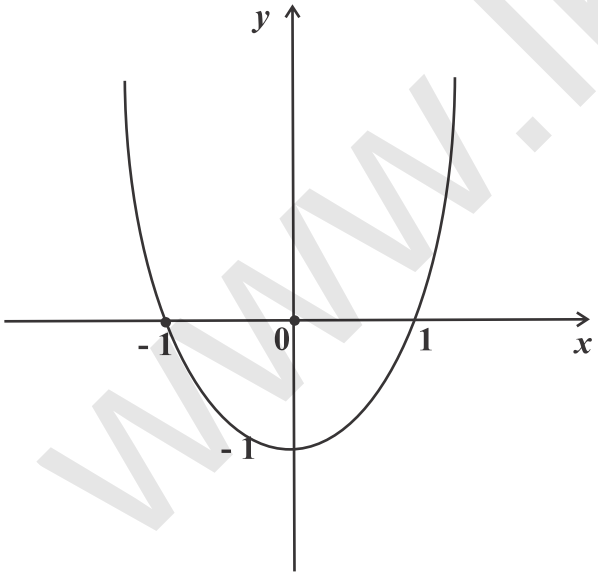
www.lkedu.lk

05. $y=/3-/x-11/$

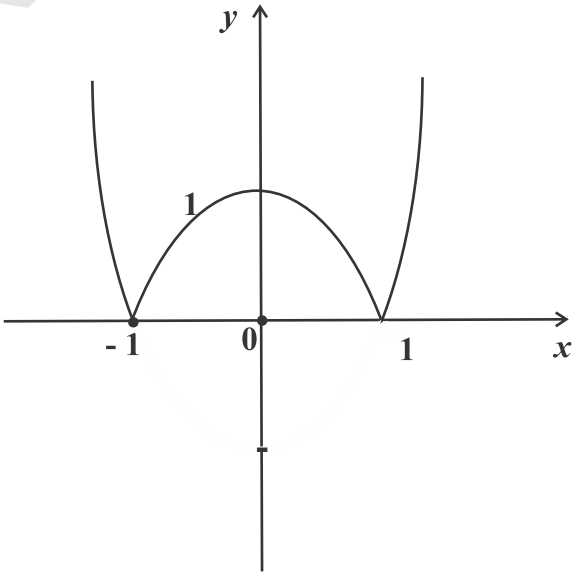


06. $y = 1x^2 - 11$

$y = x^2 - 1$



$y = |x^2 - 1|$



www.lkedu.lk

07. $y = |x^2 - 4x + 3|$

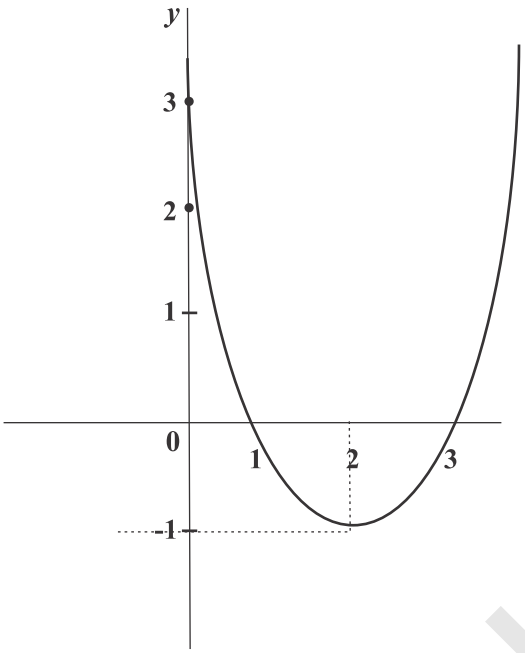
$y = x^2 - 4x + 3$

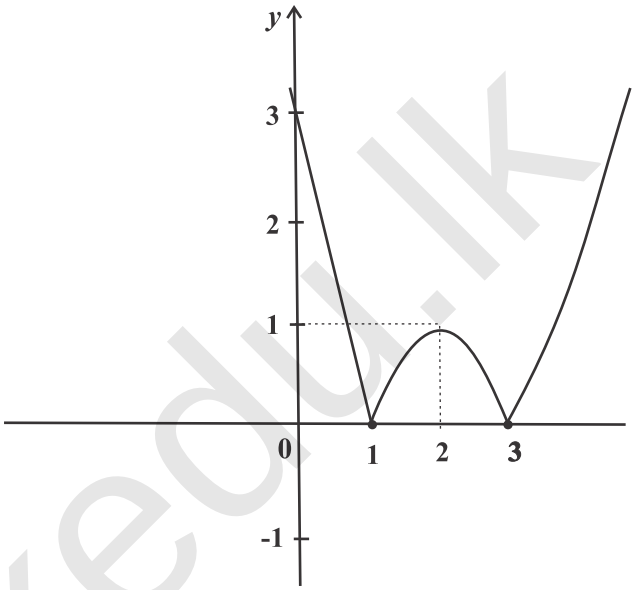
$= x^2 - 4x + 4 - 1$

$= (x - 2)^2 - 1$

$y = 0 \Rightarrow \quad x = 1, 3 \quad (1,0)\ (3,0)$

$x = 0 \Rightarrow \quad y = 3 \quad (0,3)$

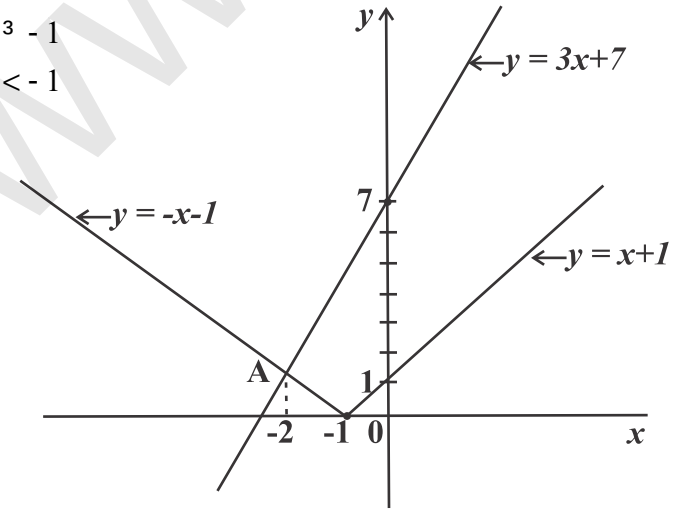




உதாரணம் 01 :-

வரைபு முறையைப் பயன்படுத்தி $1x+1/7\ \ 3x+7$ ஐத்திருப்தியாக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & , x \geq -1 \\ -x-1 & , x < -1 \end{cases}$$



புள்ளி A இன் x ஆள்கூறு காண

$-x - 1 = 3x + 7$

$4x = -8$

$x = -2$

∴ வீச்சு , $x < -2$

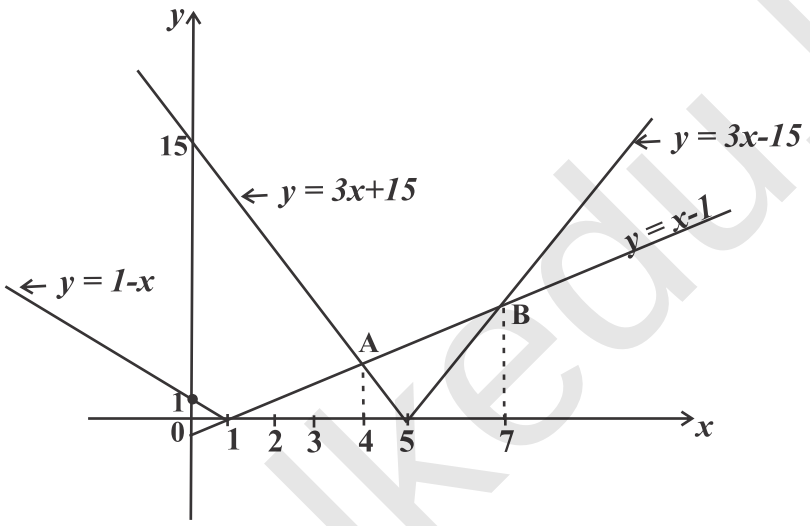
www.lkedu.lk

உதாரணம் 02 :-

ஒரே ஆள்கூற்று அச்சுக்களில் $y=|x-1|$, $y=3|x-5|$ என்பவற்றின் வரைபுகளை வரைந்து $|x-1|>3|x-5|$ ஆகுமாறுள்ள x இன் பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.

$$y=|x-1|=\begin{cases} x-1 & ; x \geq 1 \\ 1-x & ; x<1 \end{cases}$$

$$y=3|x-5|=\begin{cases} 3(x-5) & ; x \geq 5 \\ =3x-15 & \\ 3(5-x) & ; x<5 \\ =15-3x & \end{cases}$$



புள்ளி A இன் x ஆள்கூறு காண

$x-1=-3x+15$

$4x=16$

$x=4$

புள்ளி B இன் x ஆள்கூறு காண

$x-1=3x-15$

$2x=14$

$x=7$

$\therefore$ x இன் வீச்சு $4<x<7$

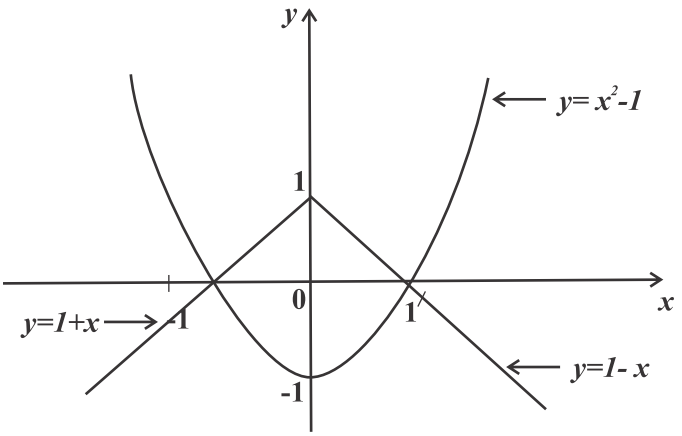
உதாரணம் 03:-

a. $1-|x|<x^2-1$ ஆகுமாறு x இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

b. $1-|x|<|x^2-1|$ ஆகுமாறு x இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

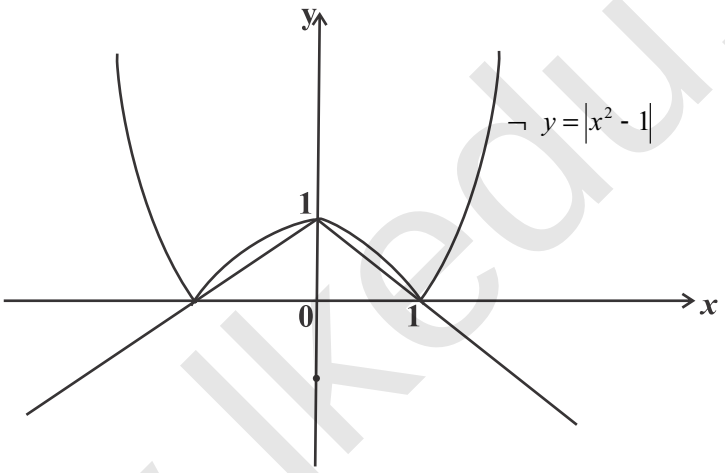
a. $$y=1-|x|=\begin{cases} 1-x & ; x \geq 0 \\ 1+x & ; x<0 \end{cases}$$

www.lkedu.lk



∴ வீச்சு $-1 < x < 1$

b.



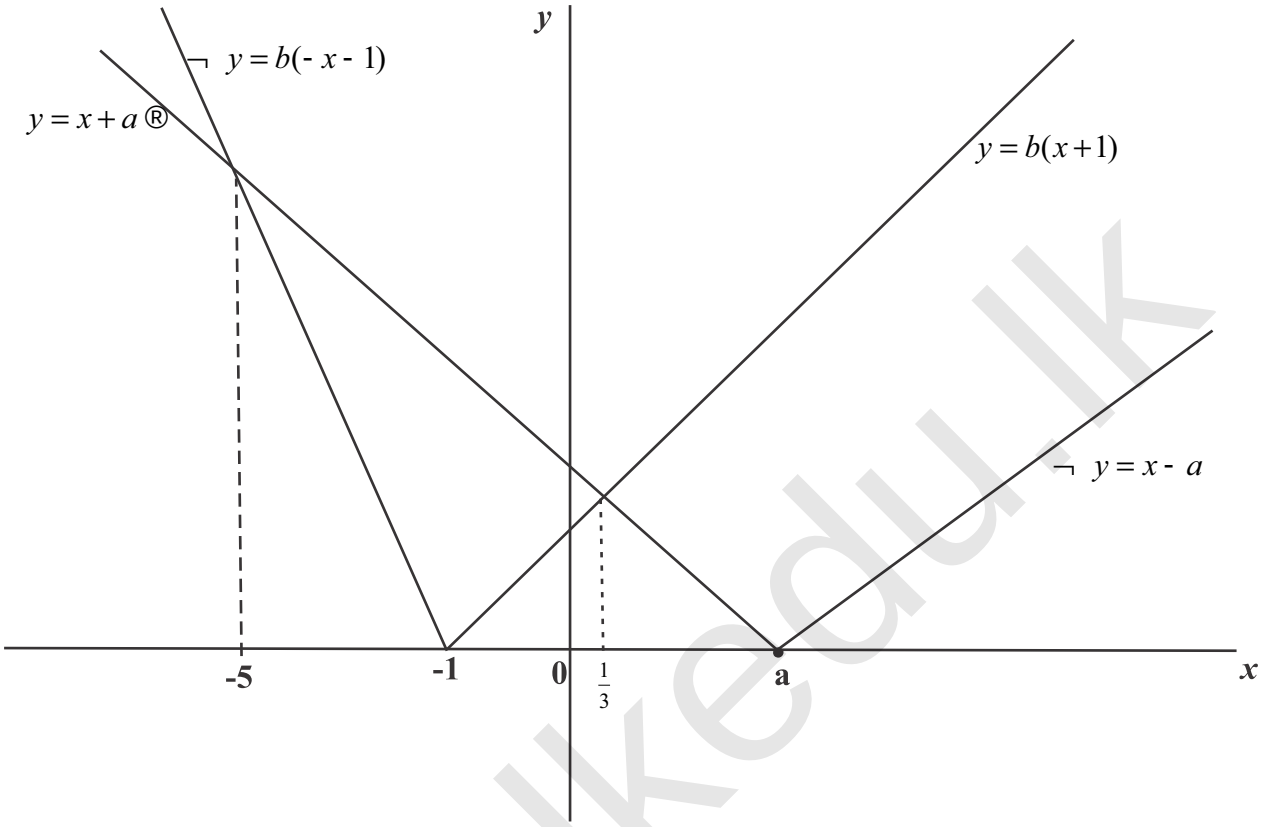
x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் இது உண்மையாகும்.

உதாரணம் 04:-

$y = |x - a|$, $y = b|x+1|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பயன்படுத்தி (a > b > o) சமனிலி $|x - a| 7 > b|x+1|$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களினதும் தொடை $\{x; -5 < x < \frac{1}{3}\}$ எனின் a,b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$y = |x - a| = \begin{cases} x - a & ; x \geq a \\ -x + a & ; x < a \end{cases}$$

$$y = b|x+1| = \begin{cases} b(x+1) & x \geq -1 \\ b(-x-1) & x < -1 \end{cases}$$



$y = -x+a, y = b(-x-1)$ என்பவற்றைத் தீர்க்க.

$$-x+a = b(-x-1)$$
$$x(b-1) = -b-a$$
$$x = \frac{a+b}{1-b} = -5$$
$$a+b = -5+5b$$
$$4b-a = 5 \quad \text{——①}$$

$y=-x+a$, $y=b(x+1)$ என்பவற்றைத் தீர்க்க.

$$-x+a = b(x+1)$$
$$a-b = (b+1)x$$
$$x = \frac{a-b}{b+1} = \frac{1}{3}$$
$$3a-3b = b+1$$
$$4b-3b = -1 \quad \text{——②}$$

①, ② ⇒ $a = 3, \quad b = 2$

www.lkedu.lk

உதாரணம் 05:-

$y = |x - 1| + |x - 2|$ இன் வரைபை வரைக. இதிலிருந்து $|x - 1| + |x - 2| \leq 5$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

$y = |x - 1| + |x - 2|$ ——— (*)

$x < 1$ எனின்

(*) $\Rightarrow$ $y = 1 - x + 2 - x$

$= -2x + 3$

$1 \leq x < 2$ எனின்

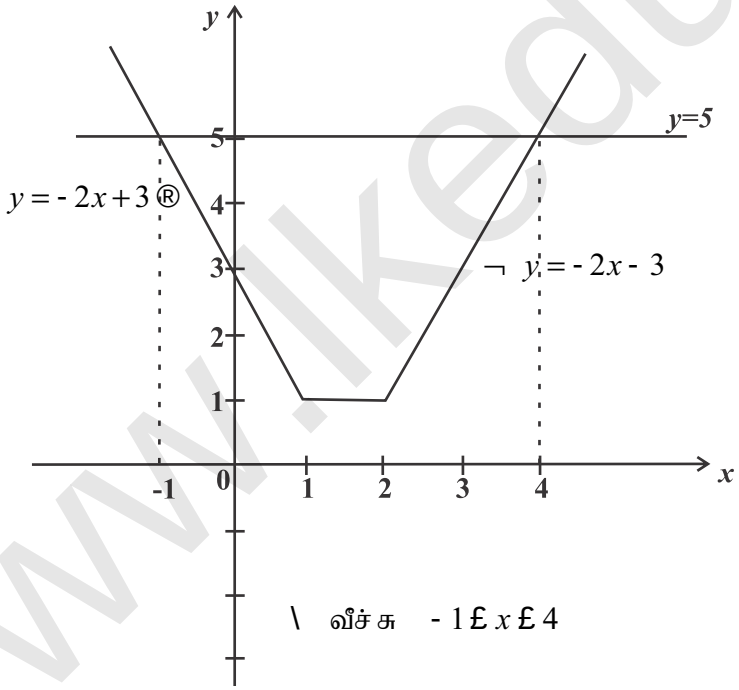
(*) $\Rightarrow$ $y = (x - 1) + (2 - x)$

$y = 1$

$x \geq 2$ எனின்

(*) $\Rightarrow$ $y = (x - 2) + (x - 1)$

$= 2x - 3$



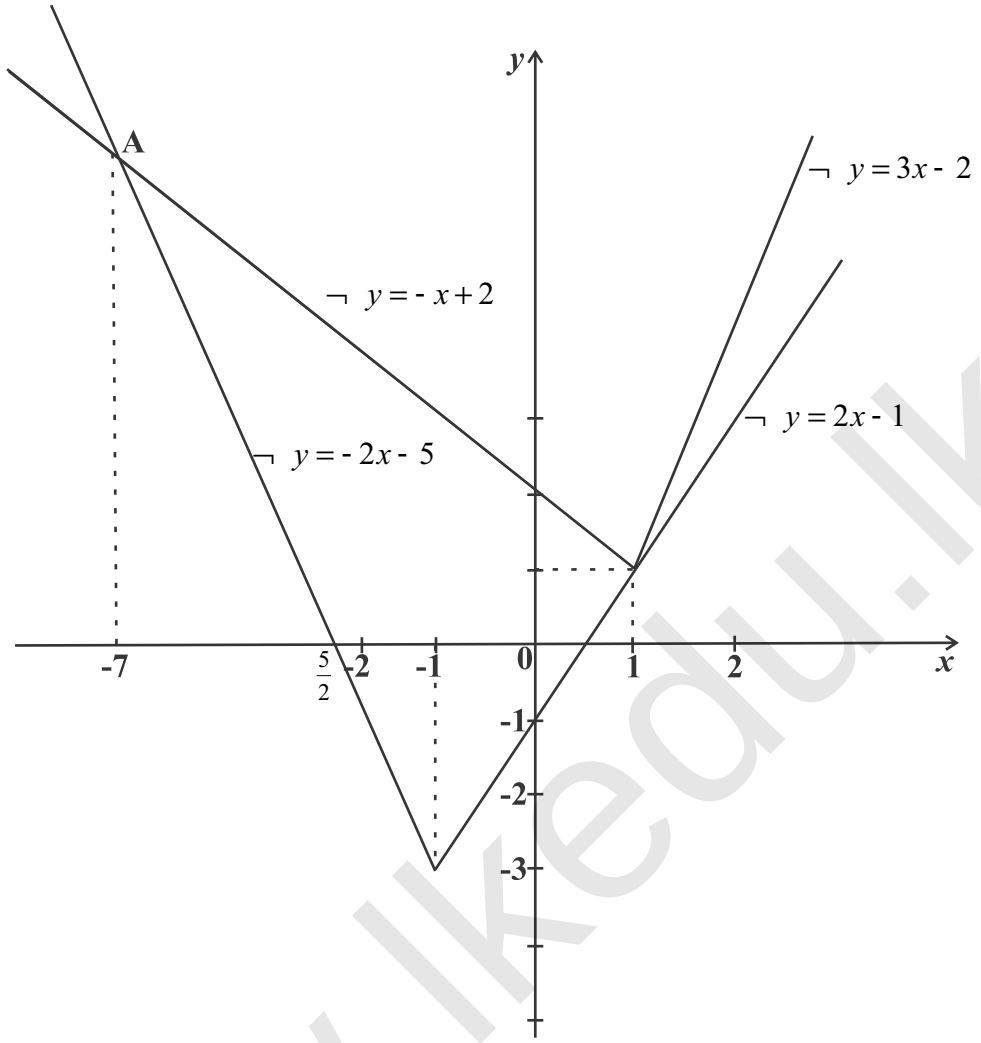
\ வீச்சு $-1 \leq x \leq 4$

உதாரணம் 06:-

$y = 2|x + 1| - 3$, $y = x + 2|x - 1|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து $x + 2|x - 1| > 2|x + 1| - 3$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் பெறுமானத் தொடையைக் காண்க.

$$y = 2|x + 1| - 3 = \begin{cases} 2(x + 1) - 3 & ; \ x \geq -1 \\ = 2x - 1 & \\ 2(-x - 1) - 3 & ; \ x < -1 \\ = -2x - 5 & \end{cases}$$

$$y = x + 2|x - 1| = \begin{cases} x + 2(x - 1) & ; \ x \geq 1 \\ = 3x - 2 & \\ x + 2(1 - x) & ; \ x < 1 \\ = -x + 2 & \end{cases}$$



புள்ளி A இன் x ஆள்கூறு காண

$$-2x-5=-x+2$$

$$-7=x$$

∴ வீச்சு $x > -7$

www.lkedu.lk

தாயங்கள்

எண்களின் செவ்வக ஒழுங்கு தாயம்.
பொதுவாக A, B, C, ... என்ற ஆங்கில பெரிய எழுத்துகளினால் குறிக்கப்படும்.

உ+ம்

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

← 1ம் நிரை
← 2ம் நிரை

↑ 1ம் நிரல் ↑ 2ம் நிரல் ↑ 3ம் நிரல்

தாயம் A ஆனது 2 நிரையினையும் 3 நிரலினையும் கொண்டுள்ளது.

வரைவிலக்கணம்

தாயம் A ஆனது m நிரைகளையும் n நிரல்களையும் கொண்டிருப்பின் இத்தாயம் $m \times n$ வரிசை கொண்ட தாயம் என அழைக்கப்படும்.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots\ldots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \ldots\ldots\ldots & a_{4n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ என எழுதப்படும்.

இங்கு $1 \leq i \leq m \quad i \in z$
$1 \leq j \leq n \quad j \in z$

மேலும் a_{ij} என்பது i வது நிரையில் j வது நிரலில் உள்ள மூலகம் ஆகும்.

www.lkedu.lk

நிரை தாயம் (நிரை காவி)

ஒரே ஒரு நிரையை மட்டும் கொண்டு தாயம் நிரை தாயம் ஆகும்.

அதாவது $A=(a_{ij})_{1\times n}$, $1 \le j \le n$, $j \in z^{+}$ என அமையும்.

<u>உ+ம்</u> $A=(3 \quad 4)_{1\times 2}$ $B=(5 \quad 2 \quad -1)_{1\times 3}$

நிரல் தாயம் (நிரல் காவி)

ஒரே ஒரு நிரலை மட்டும் கொண்ட தாயம் நிரல் தாயம் ஆகும்.

அதாவது $A=(a_{ij})_{m\times 1}$, $1 \le i \le m$, $i \in z$ என அமையும்.

<u>உ+ம்</u>

$$A=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}_{2\times 1} \qquad B=\begin{pmatrix}1\\6\\7\\4\end{pmatrix}_{4\times 1}$$

சமமான தாயங்கள்

இரு தாயங்களின் வரிசைகள் சமமாகவும் ஒத்த மூலகங்கள் சமமாகவும் இருப்பின் அவை இரண்டும் சமமாகி தாயங்கள் ஆகும்.

அதாவது $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ எனவும் இருக்கும் போது $A=B$ எனின், i , j இற்கு $(a_{ij})=(b_{ij})$ ஆகும்.

தாயங்களின் கூட்டம்

A, B என்பன ஒரே வரிசை உடைய தாயங்களாக இருக்கும் போது அவை கூட்டல் விருதிக்கு உட்படும்.

அதாவது தாயம் $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ என்க.

$$\begin{aligned}A+B &= (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n}\\ &= (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}\\ &= (C_{ij})_{m\times n}\\ &= C\end{aligned}$$

இங்கு $C_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ஆகும்.

<u>உ+ம்</u>

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 7\\ 2 & 8 & 9\end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}3+5 & 1+(-4) & -2+7\\ 5+2 & 2+8 & 1+9\end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$=\begin{pmatrix}8 & -3 & 5\\ 7 & 10 & 10\end{pmatrix}_{2\times 3}$$

www.lkedu.lk

தாயம் ஒன்றை எண்ணினால பெருக்குதல்.

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ எனின், k என்பது ஒரு மாறிலியாக இருக்க $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$ ஆகும்.

<u>உ+ம்</u>

$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 7\end{pmatrix}$ எனின் $6A=\begin{pmatrix}6\times 5 & 6\times 2\\ 6\times 4 & 6\times 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 12\\ 24 & 42\end{pmatrix}$ ஆகும்.

$B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ -1 & 5 & -2\end{pmatrix}$ எனின் $-3B=\begin{pmatrix}-6 & -12 & -9\\ 3 & -15 & 6\end{pmatrix}$ ஆகும்.

பூச்சிய தாயம்

தாயம் ஒன்றின் எல்லா மூலகமும் பூச்சியம் எனின், அத்தாயம் பூச்சிய தாயம் என அழைக்கப்படும்.

அதாவது $A=(a_{ij})_{m\times n}$ இல் எல்லா i, j இற்கும் $a_{ij}=0$ என இருப்பின் அத்தாயம் பூச்சிய தாயம் ஆகும்.

<u>உ+ம்</u>

$0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{3\times 2}$

தேற்றங்கள்

A, B, C என்பன $m\times n$ வரிசை கொண்ட தாயங்கள் ஆகவும் λ , μ எண்ணிகளாகவும் இருக்கையில்

1) $A+B=B+A$
2) $A+0=A$
3) $A+(B+C)=(A+B)+C$
4) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
5) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
6) $\lambda\mu(A)=\lambda(\mu A)$

இங்கு 0, $m\times n$ வரிசை கொண்ட பூச்சிய தாயம் ஆகும்.

நிலைமாற்று தாயம்

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ என்க. Aயின் நிலைமாற்று தாயம் A^T இனால் குறிக்கப்படும். Aயின் i ஆவது நிரை A^Tயில் i ஆவது நிரல் ஆகவும், Aயின் j ஆவது நிரல் A^T யில் j ஆவது நிரையாகவும் அமையும்.

அதாவது $A^T=A=(a_{ij})_{n\times m}$

<u>உ+ம்</u>

$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 6 & 7 & 8\end{pmatrix}_{2\times 3}$ எனின் $A^T=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 7\\ 5 & 8\end{pmatrix}_{3\times 2}$

www.lkedu.lk

தேற்றம்

A, B என்பன $m \times n$ வரிசை கொண்ட தாயங்கள் ஆகவும் λ மாறிலியாகவும் இருப்பின்

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ ஆகும்.

விசேட தாயங்கள்

சதுர தாயம்

தாயம் ஒன்றின் நிரைகளும், நிரைகளும் சமமாக இருப்பின் அவை சதுரதாயம் ஆகும்.

உ+ம் 2×2, 3×3, 4×4 வரிசை கொண்ட தாயங்கள் சதுர தாயம் ஆகும்.

$A=(a_{ij})_{m\times n}$

இதில் a_{ii} என அமையும் மூலகங்களைக் கொண்டவை முந்துறு மூலைவிட்டம் எனவும் $1 \leq i \leq n$, $i \in z$ (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}). இதில் a_i, $n+1-i$ என அமையும் மூலகங்களை கொண்டவை துணை மூலைவிட்டம் எனவும் அழைக்கப்படும். (a_{n1}, a_{n+2}, a_{n-23}, a_{1n}).

சமச்சீர் தாயம்

A என்பது ஒரு சதுர தாயம் என்க. $A = A^T$ எனின், A சமச்சீர் தாயம் ஆகும். மேலும்

$A = (a_{ij})_{n\times n}$

$A^T = (a_{ji})_{n\times n}$ ஆகவும் இருக்க

$A = A^T$ எனின்

$a_{ij} = a_{ji}$

ஓராயச் சமச்சீர் தாயம்

A என்பது சதுர தாயம் என்க. $A = -A^T$ எனின், A ஆனது ஓராயச் சமச்சீர் தாயம் என அழைக்கப்படும். மேலும் $A = (a_{ij})_{n\times n}$

$A^T = (a_{ji})_{n\times n}$ ஆகவும் இருக்க

$A = -A^T$ எனின்

$a_{ij} = -a_{ji}$

$a_{ij} + a_{ji} = 0$ ஆகும்.

இதிலிருந்து முந்துறு மூலைவிட்டம் வழியே உள்ள மூலங்கள் யாவும் பூச்சியம் ஆகும். ($i = j$ இல்)

www.lkedu.lk

தாயங்களில் பெருக்கல்

A, B என்பன இரண்டு தாயங்கள். A இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் Bயின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பின் AB பெருக்கம் வரையறுக்கப்படும்.

அதாவது $A = (a_{ij})_{m \times p}$ $B = (b_{ij})_{p \times n}$ எனவும் இருப்பின் AB பெருக்கத்தை வரையறுக்கலாம் $AB = C$ எனின் Cயின் வரிசை $m \times n$ ஆகும்.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

இங்கு $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$ $\quad c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$ $\quad c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$

$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23}$ $\quad c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}$

தேற்றங்கள்

$A = (a_{ij})_{m \times p}$ $B = (b_{ij})_{p \times q}$ $C = (c_{ij})_{q \times n}$ எனின்,

1) $A(BC) = (AB)C$
2) $A(B+C) = AB + AC$
3) $(B + C)A = BA + CA$
4) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$
5) $(AB)^T = B^T A^T$
6) $AO = OA = O$
7) பொதுவாக $AB \neq BA$
8) $AB = O \not\Rightarrow A = O$ அல்லது $B = O$

சதுர தாயம் ஒன்றின் நேர்மாறு

A என்பது சதுர தாயம் என்க. $AB = BA = I$ ஆகுமாறு தாயம் B உண்டு எனின், B என்பது A இன் நேர்மாறு என அழைக்கப்படும். அதாவது $B = A^{-1}$

www.lkedu.lk

மேல் முக்கோண தாயம்

சதுர தாயம் ஒன்றில் முந்துறு மூலைவிட்டத்துக்கு கீழ் உள்ள எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியம் ஆகும்.

அதாவது A= $(a_{ij})_{m \times n}$ இல்

$i > j$ இற்கு $a_{ij} = 0$ ஆகும்

கீழ் முக்கோண தாயம்

சதுர தாயம் ஒன்றில் முந்துறு மூலைவிட்டத்து மேல் உள்ள எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியம் ஆகும்.

அதாவது A= $(a_{ij})_{n \times n}$ இல்

$i < j$ இற்கு $a_{ij} = 0$ ஆகும்

மூலைவிட்ட தாயம்

சதுர தாயம் ஒன்றில் முந்துறு மூலைவிட்டத்துக்கு மேலும், கீழும் உள்ள மூலகங்கள் யாவும் பூச்சியம் எனின் அது மூலைவிட்ட தாயம் என அழைக்கப்படும்.

உ+ம்

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \qquad = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

எண்ணி தாயம்

மூலைவிட்ட தாயம் ஒன்றின் முந்துறு மூலைவிட்டம் வழியே உள்ள மூலகங்கள் யாவும் சமன் எனின், அது எண்ணி தாயம் ஆகும்.

உ+ம்

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \qquad = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

அலகு தாயம் / சர்வ சமன்பாட்டு தாயம் (I)

சதுர தாயம் ஒன்றில் முந்துறு மூலைவிட்டத்தின் வழியே உள்ள மூலகங்கள் யாவும் 1 ஆகவும் ஏனைய மூலகங்கள் யாவும் பூச்சியம் ஆகவும் இருப்பின் அத்தாயம் அலகு தாயம் ஆகும்.

உ+ம்

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

www.lkedu.lk

தேற்றம்

A, B என்பன ஒரே வரிசை உடைய இரு சதுர தாயங்கள் ஆக இருக்க

1) $(A^{-1})^{-1} = A^{T}$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(AT)^{-1} = (A^{-1})^{T}$

2×2 தாயம் ஒன்றின் நேர்மாறு

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்க. Aயின் நேர்மாறு $A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ எனின்

$A\,A^{-1} = D$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$ap + br = 1$ $\qquad$ $aq + bs = 0$

$cp + dr = 0$ $\qquad$ $cq + ds = 1$

$p = \dfrac{d}{ad - bc}$ $\qquad$ $q = -\dfrac{b}{ad - bc}$

$r = \dfrac{-c}{ad - bc}$ $\qquad$ $s = \dfrac{a}{ad - bc}$

இங்கு $ad - bc \neq 0$ ஆகும்.

$A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

இங்கு $|A| = ad - bc$ ஆகும்.

$ad - bc \neq 0$ எனின், A^{-1} உண்டு

www.lkedu.lk

01. பின்வரும் தாயங்களின் det A (துணிதேற்றல்) ஐக் காண்க. அவற்றின் நேர்மாறு தாயங்களை எழுதுக. <u>உ+ம்</u>

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$\det A = ad - bc$

$\det A \neq 0$ எனின்

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

$\det A = -10 - 12$

$= -22$

$A^{-1} = \frac{1}{-22}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 4 \times 1 - 4x(-1)$

$= 8$

$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

C) $A = \begin{pmatrix} 2+x & 1 \\ 4-x^2 & 2-x \end{pmatrix}$

$\det A = (2+x)(2-x) - (4-x^2)$

$= 4 - x^2 - 4 + x^2$

$= 0$

A^{-1} வரைறுக்க முடியாது.

d) $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ a - \frac{a^2}{2} & 2-a \end{pmatrix}$

$\det A = a(2-a) - 2\left(a - \frac{a^2}{2}\right)$

$= 2a - a^2 - 2a + a^2$

$= 0$

A^{-1} வரையறுக்க முடியாது.

02. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \cos a & Sin a \\ -Sin a & \cos a \end{pmatrix}$ எனின்

A^2, B^2 ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+12 & 6+15 \\ 8+20 & 12+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 21 \\ 28 & 37 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} \cos a & Sin a \\ -Sa & \cos a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos a & Sin a \\ -Sa & \cos a \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 a - Sin^2 a & \cos a Sin a \\ -\cos a Sin a - \cos a Sin a & \cos^2 a - Sin^2 a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2a & Sin 2a \\ -Sin 2a & \cos 2a \end{pmatrix}$$

www.lkedu.lk

03. $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ எனின் $A^2-9A+14I=0$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து A^{-1} ஐ காண்க.

$$A^2=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+6 & 12+15\\ 8+10 & 6+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & 27\\ 18 & 31\end{pmatrix}$$

$$A^2-9A=\begin{pmatrix}22 & 27\\ 18 & 31\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}36 & 27\\ 18 & 45\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}14 & 0\\ 0 & -14\end{pmatrix}$$

$$=-14\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=-14I$$

$$A^2-9A+14I=0$$

$$A^2-9A=-14I$$

$$A(A-9I)=-14I \qquad (A-9I)A=-14I$$

$$A\left(\frac{1}{-14}(A-9I)\right)=I \qquad \left(\frac{1}{14}(A-9I)\right)A=I$$

—(1) —(2)

(1), (2) $\Rightarrow$ $A^{-1}=\frac{1}{14}(A-9I)$

$$=\frac{1}{-14}\begin{pmatrix}4-9 & 3-0\\ 2-0 & 5-9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{5}{14} & \frac{-3}{14}\\ \frac{-2}{14} & \frac{4}{14}\end{pmatrix}$$

04. $A=\begin{pmatrix}1 & \tan\theta\\ -\tan\theta & 1\end{pmatrix}$ உம் $AB=BA=I$ உம் எனின் $B=\cos^2\theta\, A^T$ எனக் காட்டுக. A^T என்பது A யின் நிலைமாற்று தாயம் ஆகும்.

$$B=A^{-1}=\frac{1}{(1+\tan^2\theta)}\begin{pmatrix}1 & -\tan\theta\\ \tan\theta & 1\end{pmatrix}$$

$$=\cos^2\theta\begin{pmatrix}1 & -\tan\theta\\ \tan\theta & 1\end{pmatrix}$$

$$=\cos^2\theta\, A^T$$

www.lkedu.lk

05. $A=\begin{pmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix}$ எனின் $A^2=0$ தாயம் எனக் காட்டி $A^5=0$ உம் பூச்சிய தாயம் எனக் காட்டுக. இங்கு பூச்சியதாயத்தின் வரிசை 2×2 ஆகும்

$$A^2=A.A=\begin{pmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^2b^2-a^2b^2 & ab^3-ab^3 \\ -a^3b+a^3b & -a^2b^2+a^2b^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=0_{2\times 2}$$

$$A^3=A^2.A$$

$$=0.A$$

$$=0$$

$$A^5=A^3.A^2$$

$$=0\times 0$$

$$=0_{2\times 2}$$

06. தாயம் $A=\begin{pmatrix} x & o \\ 2 & y \end{pmatrix}$ எனின் $A^2-3A+2I=0$ ஆகுமாறு A யிற்கு இரு தாயங்கள் உண்டு எனக்காட்டி அத்தாயங்களை எழுதுக.

$$A^2=A.A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 2 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 2 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2x+2y & y^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2-3A+2I=\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2x+2y & y^2 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} x & 0 \\ 2 & y \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x^2-3x+2 & 0 \\ 2x+2y-6 & y^2-3y+2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$\therefore\ x^2-3x+2=0 \qquad y^2-3y+2=0 \quad x+y-3=0$

$x=1,2 \qquad\qquad y=1,2$

$x+y-3=0$ இல் $x=1$ எனின் $y=2$

$x=2$ எனின் $y=1$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ அல்லது $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

www.lkedu.lk

07. A,B என்பன ஒரே வரிசை உடைய சதுர தாயங்கள் எனின் $(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$ எனக் காட்டுக.

$$(AB)(B^{-1}\ A^{-1}) = A\ (B\,B^{-1})A^{-1}$$
$$= AI\ A^{-1}$$
$$= AA^{-1}$$
$$= I$$
$$(B^{-1}\ A^{+1})(AB) = B^{-1}\ (A^{-1}\ A)B$$
$$= B^{-1}\ I\ B$$
$$= B^{-1}\ B$$
$$= I$$

$\therefore \quad (AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$ ஆகும்.

08. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ எனின் $AB, A^T, B^T, (AB)^T, B^T A^T$ ஆகியவற்றைக் காண்பதன் மூலம் $(AB)^T = B^T A^T$ எனக் காட்டுக.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 28 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 28 & 16 \end{pmatrix}$$

$$B^T.A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 12+5 & 6+3 \\ 8+20 & 4+12 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 28 & 16 \end{pmatrix}$$

$B^T A^T = (AB)^T$ ஆகும்.

www.lkedu.lk

09. $2x+3y=9$

$x-y=2$ எனும் சமன்பாடுகளை AX = B எனும் வடிவில் எழுதலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு A 2×2 வரிசை உடைய தாயமும் X,B ஆகியன 2×1 வரிசை உடைய தாயங்களும் ஆகும். இதிலிருந்து A^{-1} எழுதி $x=3, y=1$ எனக் காட்டுக.

$2x+3y=9$

$x-y=2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$AX=B$ வடிவில் உள்ளது.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1}\quad B=\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-2-3}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{+1}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$$

$AX=B$

$A^{-1}AX=A^{-1}B$

$IX=A^{-1}B$

$X=A^{-1}B$

$$X=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} \frac{9}{5}+\frac{6}{5} \\ \frac{9}{5}-\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x=3 \quad y=1$ ஆகும்.

www.lkedu.lk

10. $3a+4b-31=0$

$2a-3b+2=0$

எனும் இருசமன்பாடுகளை $AX=Y$ எனும் வடிவில் தருக. இங்கு A, 2×2 வரிசை கொண்ட தாயம் x,y ஆகியன 2×1 வரிசை கொண்ட தாயங்கள் ஆகும்.

A-1 ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து a,b ஐக் காண்க.

$3a+4b=31$

$2a-3b=-2$

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31\\ -2\end{pmatrix}$$

$AX=Y$ வடிவில் உள்ளது

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -3\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\quad y=\begin{pmatrix}31\\ -2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{17} & \frac{4}{17}\\ \frac{2}{17} & \frac{-3}{17}\end{pmatrix}$$

$AX=Y$

$A^{-1}AX=A^{-1}y$

$IX=A^{-1}y$

$X=A^{-1}y$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{17} & \frac{4}{17}\\ \frac{2}{17} & \frac{-3}{17}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}31\\ -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{93-8}{17}\\ \frac{62+6}{17}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}$$

$a=5,\ b=4$

www.lkedu.lk

வரிசை மாற்றம்

வகை (I)

01. 6 வெவ்வேறு நிறக் கொடிகளில் ஒரு சைகைக்கு 4 கொடிகள் பயன்படுத்தப்பட்டு சைகை ஒன்று காட்டப்படுகிறது. எத்தனை வெவ்வேறு விதமான சைகைகளை உருவாக்கலாம்?

6	5	4	3
1ம் இடம்	2ம் இடம்	3ம் இடம்	4ம் இடம்

$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

02. ஒரு கொடியில் 4 வெவ்வேறு நிறங்களிலான கோடுகள் காணப்பட்டன. 8 வெவ்வேறான நிறங்களை கொண்டு அவ்வாறான வெவ்வேறு விதமான எத்தனை கொடிகள் உருவாக்கலாம்?

8	7	6	5
1ம் இடம்	2ம் இடம்	3ம் இடம்	4ம் இடம்

$8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ கொடிகள்

வகை (II)

01. SANNURAHI என்ற சொல்லில் உள்ள எல்லா எழுத்துக்களையும் கொண்டு எத்தனை வேறு வேறான சொற்கள் உருவாக்கலாம்?

S - 1
A - 2
N - 2
U - 1
R - 1
H - 1
I - 1

$$\frac{9!}{2! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2}$$

$$= 97920$$

02. ஒவ்வொரு வகையிலும் 4 புத்தகங்களைக் கொண்ட 3 வகையான புத்தகங்களை எத்தனை வெவ்வேறான வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்?

A - 4
B - 4
C - 4

$$\frac{12!}{4! \times 4! \times 4!}$$

வகை (III)

01. ஒவ்வொன்றும் 4 விடைகளைக் கொண்ட 10 பல்தேர்வு வினாக்களுக்கு எத்தனை வெவ்வேறான வழிகளில் விடையளிக்கலாம்?

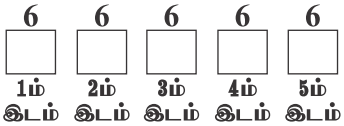
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
1ம் இடம்	2ம் இடம்	3ம் இடம்	4ம் இடம்	5ம் இடம்	6ம் இடம்	7ம் இடம்	8ம் இடம்	9ம் இடம்	10ம் இடம்

மொத்த வரிசை $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

$= 4^{10}$

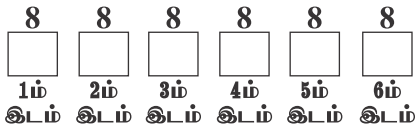
www.lkedu.lk

02. 5 சதுரமுகி தாயக்கட்டைகளை சுண்டும் போது பெறப்படக் கூடிய மாதிரிவெளியில் உள்ள மூலகங்கள் எத்தனை?



மாதிரிவெளியில் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை = 6^5

03. ஒரு சைகை காட்டி 6 சைகை தூண்களை கொண்டுள்ளது. ஒவ்வொரு தூணும் 8 வெவ்வேறான சைகைகளைக் காட்டும் எனின், காட்டக் கூடிய மொத்த சைகைகளின் எண்ணிக்கை யாது?

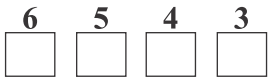


சைகைகள் $= 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^6$
$= 2^{18}$

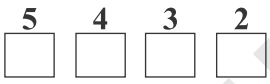
வகை (IV)

01. "FLOWER" என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களை கொண்டு தடவைக்கு 4 எழுத்துக்களை எடுத்து செய்யக் கூடிய வரிசை மாற்றங்கள் எத்தனை? அவற்றில் F ஐ கொண்டிராத வரிசை மாற்றங்கள் எத்தனை?

F - 1
L - 1
O - 1
W - 1
E - 1
R - 1



$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$



$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

02. "INSURNCE" என்ற சொல்லில் உள்ள எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி

1) உயிர் எழுத்துக்கள் எல்லாம் ஒன்றாக வரும் வரிசை மாற்றங்கள்?

N - 2 I - 1
S - 1 U - 1
R - 1 E - 1
C - 1

$\frac{6!}{2!} \times 3! = 1080$

2) உயிர் எழுத்துக்கள் எல்லாம் ஒன்றாக வராத வரிசை மாற்றங்கள்?

$\frac{8!}{2!} - \frac{6!}{2!} \times 3!$
$= 20160 - 1080$
$= 19080$

03. "MATHEMATICS" என்ற சொல்லில் உள்ள எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி ஆரம்பம், முடிவு, T இல் அமையும் வரிசை மாற்றங்கள் எத்தனை?

M - 2 A - 2
T - 2 E - 1
H - 1 I - 1
C - 1
S - 1



$\frac{9!}{2! \times 2!}$

www.ikedu.lk

04. "HAVANA" என்ற சொல்லில் உள்ள எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி உருவாக்கக் கூடிய

1) வரிசை மாற்றங்கள் எத்தனை?

H - 1 A - 3
V - 1
N - 1
C - 1

$$\frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$$

2) மூன்று Aயும் ஒன்றாக வரும் வரிசை மாற்றங்கள் எத்தனை?

$4! = 24$

3) V, N ஒன்றாக வராத வரிசை மாற்றங்கள் எத்தனை?

V, N ஒன்றாக வரும் வரிசை மாற்றங்கள் = $\frac{5!}{3!} \times 2! = 40$

H, (V, N,) A, A, A

V, N ஒன்றாக வராத வரிசை மாற்றங்கள் $= 120 - 40$
$= 80$

வகை (V)

இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி எண்களை உருவாக்குவது தொடர்பான பிரச்சினைகள்

01. 1, 2, 3, 4, 5 ஆகிய இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி பாவித்த இலக்கத்தை மீண்டும் பயன் படுத்தலாம் எனின், உருவாக்கக் கூடிய

1) இரண்டு இலக்க எண்கள் எத்தனை?

5	5
□	□

$5 \times 5 = 25$

2) மூன்று இலக்க எண்கள் எத்தனை?

5	5	5
□	□	□

$5 \times 5 \times 5 = 125$

3) நான்கு இலக்க எண்கள் எத்தனை?

5	5	5	5
□	□	□	□

$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

02. 1, 2, 3, 4, 5 ஆகிய இலக்கங்களை தடவைக்கு ஒருமுறை மாத்திரம் பயன்படுத்தி உருவாக்கக் கூடிய

1) 2 இலக்க எண்கள் எத்தனை?

5	4
□	□

$5 \times 4 = 20$

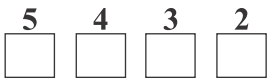
2) 3 இலக்க எண்கள் எத்தனை?

5	4	3
□	□	□

$5 \times 4 \times 3 = 60$

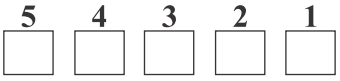
www.lkedu.lk

3) 4 இலக்க எண்கள் எத்தனை?



$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

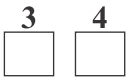
4) 5 இலக்க எண்கள் எத்தனை?



$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

03. 0, 1, 2, 3 ஆகிய இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி (ஒரு இலக்கத்தை பல தடவை பயன்படுத்தலாம் எனில்,) உருவாக்கக் கூடிய

1) 2 இலக்க எண்கள் எத்தனை?



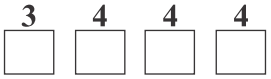
$3 \times 4 = 12$

2) 3 இலக்க எண்கள் எத்தனை?



$3 \times 4 \times 4 = 48$

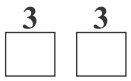
3) 4 இலக்க எண்கள் எத்தனை?



$3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192$

04. 0, 1, 2, 3 ஆகிய இலக்கங்களை தடவைக்கு 1 தடவை மாத்திரம் பயன்படுத்தி ஆக்கக் கூடிய

1) 2 இலக்க எண்கள் எத்தனை?



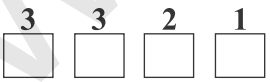
$3 \times 3 = 9$

2) 3 இலக்க எண்கள் எத்தனை?



$3 \times 3 \times 2 = 18$

3) 4 இலக்க எண்கள் எத்தனை?



$3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$

www.lkedu.lk

பயிற்சி வினாக்கள்

01. நான்கு ஆண்கள், நான்கு பெண்கள் ஒரு வரிசையில்

1) அமரக் கூடிய வழிகள் எத்தனை?

2) எந்த இரு ஆண்களும் அருகருகே இல்லாத வழிகள் எத்தனை?

3) ஆணும் பெண்ணும் மாறி மாறி அமரத்தக்க வழிகள் எத்தனை?

02. "Director" என்ற சொல்லிலுள்ள எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி

1) அமைக்கக் கூடிய ஒழுங்குகள் எத்தனை?

2) உயிர் எழுத்துக்கள் யாவும் ஒன்றாக வரும் எண்கள் எத்தனை?

3) உயிர் எழுத்துக்கள் யாவும் ஒன்றாக வராத ஒழுங்குகள் எத்தனை?

4) உயிர் எழுத்துக்கள் அருகருகே வராத (எந்த இரு) ஒழுங்குகள் எத்தனை?

www.lkedu.lk

03. "Pencil" என்ற சொல்லில் உள்ள எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி, உயிர் எழுத்துக்கள் இரட்டை இடங்களில் அமையத்தக்கதாக எத்தனை ஒழுங்குகள் அமைக்கலாம்?

04. "GANESHPURI" என்ற சொல்லில் உள்ள

1) எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி எத்தனை ஒழுங்குகள் அமைக்கலாம்?

2) அவற்றுள் G முதலாவதாக அமையும் ஒழுங்குகள் எத்தனை?

3) P, I முறையே முதலாவதாகவும், இறுதியாகவும் வரும் ஒழுங்குகள் எத்தனை?

4) P, I முடிவுப் புள்ளிகளாக அமையும் ஒழுங்குகள் எத்தனை?

5) உயிர் எழுத்துக்கள் யாவும் ஒன்றாக வரும் ஒழுங்குகள் எத்தனை?

6) E, H, P ஆகிய 3 எழுத்துக்களும் ஒன்றாக வராத ஒழுங்குகள் எத்தனை?

www.lkedu.lk

05. INTERMEDIATE என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களை பயன்படுத்தி

1) அமைக்கக் கூடிய வரிசை மாற்றங்கள் எத்தனை?

2) I இல் தொடங்கி E இல் முடிவடையும் ஒழுங்குகள் எத்தனை?

3) உயிரெழுத்துக்கள், இரட்டை இடங்களில் அமையத்தக்க இடங்கள் எத்தனை?

4) உயிரெழுத்துக்களும் மெய் எழுத்துக்களும் அவ்வவற்றுக்குரிய இடங்களில் அமையத் தக்க வழிகள் எத்தனை?

5) எந்த இரு உயிர் எழுத்துக்களும் அருகருகே அமையாத ஒழுங்குகள் எத்தனை?

6) உயிர் எழுத்துக்க்ளும் மெய் எழுத்துக்களும் மாறி மாறி அமையக் கூடிய ஒழுங்குகள் எத்தனை?

7) எல்லா உயிரெழுத்துக்களும் ஒன்றாய் அமையக் கூடிய இடங்கள் எத்தனை?

8) எல்லா E களும் ஒன்றாக அமையும் ஒழுங்குகள் எத்தனை?

9) 2E அருகருகே அமையாத வரிசை மாற்றங்கள் எத்தனை?

www.lkedu.lk

சேர்மானம்

வகை - I

22 மாணவர்கள் கொண்ட குழுவில் ஒவ்வொருவரும் மற்றய எல்லோருடனும் ஒரு முறை கை குலுக்கிக் கொண்டனர். மொத்தம் எத்தனை கை குலுக்கல் நிகழும்.

$$22_{c_2} = \frac{22!}{2! \times 20!} = \frac{22 \times 2!}{2} = 231$$

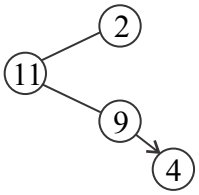
வகை - II

11 வெவ்வேறான புத்தகங்களில் இருந்து 6 புத்தகங்களை தெரிந்தெடுக்க வேண்டி உள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் தெரிந்தெடுக்கக்கூடிய வழீகளைக் காண்க.

i. 2 குறித்த புத்தகங்கள் எப்போதும் இருத்தல் வேண்டும்.

ii. 2 குறித்த புத்தகங்கள் எப்போதும் இருத்தல் கூடாது.

i.



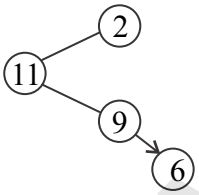
9 புத்தகங்களில் 4 புத்தகங்கள் எடுக்க வேண்டும். வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 9_{c_4}$

$$= \frac{9!}{4! \times 5!}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$$= 126$$

ii.



$$9_{c_6} = \frac{9!}{6! \times 3!}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3}$$

$$= 84$$

வகை - III

10 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழு ஒன்றில் இருந்து ஒரு குழுவை தெரிந்தெடுக்க வேண்டும். அக்குழு குறைந்தது 3 மாணவர்களை கொண்டிருக்க வேண்டும் எனில் எத்தனை வெவ்வேறான வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்.

மொத்த வழிகள் $10_{c_3} + 10_{c_4} + 10_{c_5} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 10_{c_{10}}$

$$= 2^{10} - \left(10_{c_0} + 10_{c_1} + 10_{c_2}\right)$$

$$= 2^{10} - (1 + 10 + 45)$$

$$= 1024 - 56$$

$$= 968$$

www.ikedu.lk

வகை - IV

10 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழு ஒன்றில் இருந்து ஒரு குழுவை தெரிந்தெடுக்க வேண்டும். அக்குழு குறைந்தது 3 மாணவர்களைக் கொண்டிருக்கும் அதே வேளை எஞ்சிய மாணவர்களும் குறைந்தது 3 ஆக இருத்தல் வேண்டும் எனில் எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்.

$$10_{C_3} + 10_{C_4} + 10_{C_5} + \ldots\ldots\ldots + 10_{C_7}$$
$$= 2^{10} - \left(10_{C_0} + 10_{C_1} + 10_{C_2} + 10_{C_8} + 10_{C_9} + 10_{C_{10}}\right)$$
$$= 2^{10} - (1+10+45+45+10+1)$$
$$= 1024 - 112$$
$$= 912$$

வகை - V

ஒரு நிறுவனத்தில் 7 கணக்காளர்கள், 6 பொறியியலாளர்கள், 3 விஞ்ஞானிகள், வேலை செய்கின்றனர். இவர்களில் இருந்து 6 பேர் கொண்ட குழுவை தெரிவு செய்ய வேண்டும். பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் தெரிவு செய்யக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

i. ஒவ்வொரு வகையிலும் சரியாக 2 பேர் கொண்டவர்களாக

ii. ஒவ்வொரு வகையிலும் குறைந்தது ஒருவராவது இருக்கத்தக்கதாக ஆனால் 3 பேருக்கு அதிக மாகாதவாறு,

i. கணக்காளர் பொறியியலாளர் இஞ்சினியர்

7_{C_2} 6_{C_2} 3_{C_2}

மொத்த வழிகள் $= 7_{C_2} \times 6_{C_2} \times 3_{C_2}$
$= 21 \times 15 \times 3$
$= 945$

ii.

7 கணக்காளர்	6 பொறியியலாளர்	3 இஞ்சினியர்	
3	2	1	$7_{C_3} \times 6_{C_2} \times 3_{C_1}$
3	1	2	$7_{C_3} \times 6_{C_1} \times 3_{C_2}$
2	2	2	$7_{C_2} \times 6_{C_2} \times 3_{C_2}$
2	1	3	$7_{C_2} \times 6_{C_1} \times 3_{C_3}$
2	3	1	$7_{C_2} \times 6_{C_3} \times 3_{C_1}$
1	2	3	$7_{C_1} \times 6_{C_2} \times 3_{C_3}$
1	3	2	$7_{C_1} \times 6_{C_3} \times 3_{C_2}$

$$= 35 \times 15 \times 3 + 35 \times 6 \times 3 + 21 \times 15 \times 3 + 21 \times 6 \times 1 + 21 \times 20 \times 3 + 7 \times 15 \times 1 + 7 \times 20 \times 3$$
$$= \{1575 + 630 + 945 + 126 + 1260 + 105 + 420\}$$

www.lkedu.lk

பயிற்சி வினாக்கள்

01) 7 விளையாட்டுக் குழுக்கள் தமக்கிடையே நடைபெறும் போட்டிகளில் முதலாவது சுற்றில் ஒவ்வொரு குழுவும் மற்றய ஒவ்வொரு குழுவுடனும் இரு முறை மோதுகின்றன எனில் முதலாவது சுற்றில் நடைபெறும் போட்டிகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

02) எல்லா வகையிலும் சரியாக ஒரு புத்தகத்தைக் கொண்ட 9 வகையான புத்தகங்கள் உள்ளன. அவற்றில் இருந்து 5 புத்தகங்கள் தெரிவு செய்ய வேண்டி உள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு வகைகளிலும் தெரிவு செய்யக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

i. குறித்த ஒரு புத்தகம் எப்போதும் தெரிவில் உள்ளடங்கலாக.

ii. குறித்த ஒரு புத்தகம் தெரிவில் உள்ளடங்குவதாகவும் குறிப்பிட்ட இரு புத்தகங்கள் தெரிவில் உள்ளடங்காதவாறும்

03) 10 பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் மூலை விட்டங்களின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

04) 15 பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளை உச்சிகளாக கொண்ட எத்தனை முக் கோணிகள் அமைக்கலாம்.

05) ஒரு வினாப்பத்திரம் 3 பகுதிகளைக் கொண்டது. ஒவ்வொரு பகுதியும் 5 வினாக்களைக் கொண்டது. ஒரு பரீட்சாத்தில் 5 வினாக்களுக்கு கையளிக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு பகுதியிலும் குறைந்தது ஒரு வினாவிற்காவது விடையளிக்க வேண்டும் எனில் எத்தனை வெவ்வேறு வழிகளில் விடையளிக்கலாம்.

06) 4 அதிகாரிகளையும் 10 எழுதுனர்களையும் கொண்ட ஒரு அலுவலகத்தில் 2 அதிகாரிகளையும் 3 எழுதுனர்களாகவும் கொண்ட குழு ஒன்றை தெரிவு செய்ய வேண்டி உள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு வழியிலும் எத்தனை வகையான குழுக்களை தெரிவு செய்யலாம் எனக் காண்க.

i. எந்த இரு அதிகாரியும் எந்த மூன்று எழுதுனரும் குழுவில் இடம் பெறலாம்.

ii. ஒரு குறித்த எழுதுனர் குழுவில் எப்போதும் இடம்பெற வேண்டும்.

iii. ஒரு குறித்த அதிகாரி குழுவில் இடம்பெறக் கூடாது.

iv. ஒரு குறித்த அதிகாரி குழுவில் இடம்பெற வேண்டும். ஒரு குறித்த எழுதுனர் குழுவில் இடம்பெறக் கூடாது?

07) 20 பேர் கொண்ட கிரிக்கட் வீரர் குழுவில் 6 பேர் பந்து வீச்சாளர்கள் 3 பேர் விக்கட் காப்பாளர்கள், இவர்களில் இருந்து 11 பேர் கொண்ட ஒரு குழுவை 2 விக்கட் காப்பாளர்கள், குறைந்தது 4 பந்து வீச்சாளர் அடங்கலாக எத்தனை வெவ்வேறு வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்.

08) 6 ஆண் பிள்ளைகள் 4 பெண் பிள்ளைகள் கொண்ட மாணவர் தலைவர்களில் இருந்து ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு 5 பேர் கொண்ட ஒரு குழுவை தெரிவு செய்ய வேண்டும். அக்குழுவில் குறைந்தது ஒரு பெண் பிள்ளை ஆவது உள்ளடங்கலாக எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

www.ikedu.lk

இருபடிச் சமன்பாடுகள்

$ax^2 + bx + c = 0$, a, b, c மெய்யெண்கள் $a \neq 0$ ஆகும்.

இதன் மூலங்கள் $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ஆகும்.

மூலகங்கள் α , β எனக் கொள்வோமாயின்,

$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ஆகும்

α, β என்பன $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் என்பதால் $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, $a\beta^2 + b\beta + c = 0$.

λ , μ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$(x - \lambda)(x - \mu) = 0$

$x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu = 0$

01. $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α , β எனின்,

i) $\alpha^2 + \beta^2$ ii) $\alpha^3 + \beta^3$ iii) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α , β எனின்,

$\alpha + \beta = -b/a$ $\alpha\beta = c/a$

i) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$= \frac{b^2}{a^2} - \frac{2C}{a}$

$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

ii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$= (a+b)((a^2 + b^2) - ab)$

$= \frac{-b}{a}\left[\frac{b^2 - 2ac}{a^2} - \frac{c}{a}\right]$

$= \frac{-b}{a}\left[\frac{b^2 - 2ac - ac}{a^2}\right]$

$= \frac{-b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}$

www.lkedu.lk

iii) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$

$= \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab}$

$= \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}}$

$= \frac{b^2 - 2ac}{ac}$

02. $x^2 - ax + b = 0$ இன் மூலங்கள் α , β எனின்

i) α^2 , β^2 ii) $\alpha + 2\beta$, $2\alpha + \beta$ ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தருக.

$x^2 - ax + b = 0$ இன் மூலங்கள் α , β ஆயின்,

$\alpha + \beta = a$ $\alpha\beta = b$

i) α^2 , β^2 ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு.

$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$

$x^2 - [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]x + (\alpha\beta)^2 = 0$

$x^2 - (a^2 - 2b)x + b^2 = 0$

ii) $(\alpha + 2\beta)$, $(2\alpha + \beta)$ ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$x^2 - (\alpha + 2\beta + 2\alpha + \beta)x + (\alpha + 2\beta)(2\alpha + \beta) = 0$

$x^2 - 3(\alpha+\beta)x + (2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 2\beta^2) = 0$

$x^2 - 3(\alpha+\beta)x + [2(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta] = 0$

$x^2 - 3ax + 2a^2 + b = 0$

www.lkedu.lk

03. $x^2 + px + q = 0$ இன் மூலங்களிற்கு இடையிலான வித்தியாசம் 2 எனின்,

$p^2 - 4(q+1)$ எனக்காட்டுக.

$x^2 + px + q = 0$ இன் மூலங்கள் α , β ஆயின்

$\alpha + \beta = -p$ ———————— (1)
$\alpha\beta = q$ ———————— (2)
$\alpha - \beta = 2$ ———————— (3) $(\alpha > \beta)$

$(1)^2$, $2 \Rightarrow$ $\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - 2q$
$(3)^2$, $2 \Rightarrow$ $\alpha^2 + \beta^2 = 4 + 2q$
$p^2 - 2q = 4 + 2q$
$p^2 = 4(q+1)$

04. $x^2 - ax + b = 0$ இன் மூலங்கள் α , β எனின்,
$A_n = \alpha^n + \beta^n$ எனத்தரப்படின், $A_{n+1} = aA_n - bA_{n-1}$ எனக்காட்டுக.

$x^2 - ax + b = 0$ இன் மூலங்கள் α , β எனின்,
$\alpha + \beta = a$
$\alpha\beta = b$
$A_n = \alpha^n + \beta^n$
RHS $= aA_n - bA_{n-1}$
$= a(\alpha^n + \beta^n) - b(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$
$= (\alpha+\beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$
$= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + \alpha\beta^n + \beta\alpha^n - \alpha^n\beta - \alpha\beta^n$
$= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}$
$= A_{n+1}$
$= LHS.$
$\therefore A_{n+1} = aA_n - bA_{n-1}$

05. i) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ இன் மூலங்கள் α , β எனின்,
$3(\alpha^5 + \beta^5) - 5(\alpha^4 + \beta^4) + 7(\alpha^3 + \beta^3)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

ii) $x^2 + k(2x+3) - 3 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வித்தியாசம் 2 எனின், k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. k இன் பெறுமானங்களுக்கு மூலகங்களை காண்பதன் மூலம் விடையை வாய்ப்புப் பார்க்க.

www.lkedu.lk

i). $3x^2 - 5x + 7 = 0$ இன் மூலங்கள் α , β எனின்,

$3\alpha^2 - 5\alpha + 7 = 0$ ——————(1)

$3\beta^2 - 5\beta + 7 = 0$ —————— (2)

$3(\alpha^5 + \beta^5) - 5(\alpha^4 + \beta^4) + 7(\alpha^3 + \beta^3)$

$= (3\alpha^5 - 5\alpha^4 + 7\alpha^3) + (3\beta^5 - 5\beta^4 + 7\beta^3)$

$= \alpha^3(3\alpha^2 - 5\alpha + 7) + \beta^3(3\beta^2 - 5\beta + 7)$

$= \alpha^3 \times 0 + \beta^3 \times 0$

$= 0$

ii) $x^2 + k(2x + 3) - 3 = 0$

$x^2 + 2kx + 3k - 3 = 0$

மூலங்கள் α , β எனின், $\alpha + \beta = -2k$, $\alpha\beta = 3k - 3$ —————— (3)

$\alpha - \beta = 2$ அல்லது $\beta - \alpha = 2$ ஆகும்.

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$4 = 4k^2 - 4(3k - 3)$

$1 = k^2 - 3k + 3$

$k^2 - 3k + 2 = 0$

$(k - 1)(k - 2) = 0$

$k = 1$ or $k = 2$

$k = 1$ எனின்,

$x^2 + 2x = 0$

$x(x + 2) = 0$

$x = 0, -2$

$k = 2$ எனின்,

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$(x + 3)(x + 1) = 0$

$x = -3 , -1$

www.lkedu.lk

பிரித்துக்காட்டி

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ஆகும்.

இங்கு $b^2 - 4ac$ என்பது பிரித்துக்காட்டி எனப்படும். இது Δ எனும் குறியீட்டால் குறிக்கப்படும்.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$ax^2 + bx + c = 0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow$ மெய்மூலங்கள் உண்டு.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ இரு வேறு மெய்மூலங்கள் உண்டு.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ பொருந்தும் சம மூலங்கள் உண்டு.

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ கற்பனை மூலங்கள் உண்டு.

06. a, b, c என்பன மெய்யாக இருக்க
$3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவை எனக் காட்டுக. மூலங்கள் இரண்டும் பொருந்துவனவாக இருக்க a, b, c யிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண்க.

$\Delta = 4(a + b + c)^2 - 4 \times 3(ab + bc + ca)$
$= 4[a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca]$
$= 2[2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca]$
$= 2[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2]$
≥ 0

$\therefore$ மூலங்கள் மெய்யானவை.

மூலங்கள் இரண்டும் பொருந்துவனவாயின் $\Delta = 0$.

$2[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] = 0$
$(a-b)^2 = 0$
$(a-c)^2 = 0$
$(b-c)^2 = 0$
$\therefore a = b = c$

07. $x^2 + x(2 - \lambda) + 9 = 0$ கற்பனை மூலங்களைக்கொண்டிருக்க. λ இன் வீச்சைக் காண்க.

$\Delta < 0$
$(2 - \lambda)^2 - 4 \times 9 < 0$
$\lambda^2 - 4\lambda - 32 < 0$
$(\lambda - 8)(\lambda + 4) < 0.$
$-4 < \lambda < 8.$

www.lkedu.lk

08. $a, b, \in R$ என்க.

$3x^2 - 2(a + b)x + ab = 0$ இன் பிரித்துக்காட்டியை a, b என்பவற்றில் எழுதி இதிலிருந்து இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவை எனக் காட்டுக. இம் மூலங்கள் α, β எனின், $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ ஐ a, b என்பவற்றில் எழுதுக.

$\beta = \alpha + 2$ எனின், $a^2 - ab + b^2 = 9$ எனக்காட்டுக. $|a| \leq \sqrt{12}$ என உய்த்தறிந்து b இனை a இல் காண்க.

$3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$

$$\begin{aligned} D &= 4(a+b)^2 - 4 \times 3 \times ab \\ &= 4(a^2 + b^2 - ab) \\ &= 4\left[\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] \\ &> 0 \end{aligned}$$

எனவே மூலங்கள் மெய்யானவை ஆகும்.

$$a + b = \frac{2}{3}(a+b) \qquad ab = \frac{ab}{3}$$

$$b = a + 2$$

$$\begin{aligned} (b - a)^2 &= 4 \\ (b + a)^2 - 4ab &= 4 \\ \frac{4}{9}(a+b)^2 - \frac{4}{3}ab &= 4 \\ (a+b)^2 - 3ab &= 9 \\ b^2 - ab + a^2 &= 9 \\ \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 &= 9 - a^2 + \frac{a^2}{4} \\ &= 9 - \frac{3a^2}{4} \\ &= \frac{3}{4}(12 - a^2) \end{aligned}$$

$12 - a^2 \geq 0$

$|a| \leq \sqrt{12}$

$$b - \frac{a}{2} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{12 - a^2}$$

$b = \frac{a}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{12 - a^2}$ ஆகும்

www.lkedu.lk

09. a) $x^2 - bx + c = 0$ $(c \neq 0)$ என்ற இருபடிச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β ஆகும்.

i) $\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

ii) $\alpha^2 = \beta$ எனின், $b^2 = c(3b + c + 1)$ எனக்காட்டுக.

b) $x^2 + kx - 6k = 0$, $x^2 - 2x - k = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகள் ஒரு பொது மூலத்தைக் கொண்டிருப்பின் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$x^2 - bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α , β என்க.

$$a + b = b$$
$$ab = c$$
$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 + b^3}{ab}$$
$$= \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{ab}$$
$$= \frac{(a + b)((a + b)^2 - 3ab)}{ab}$$
$$= \frac{b(b^2 - 3c)}{c}$$
$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{b^3 - 3bc}{c}$$
$$\frac{a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{a} = ab = c$$

சமன்பாடு $x^2 - \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right)x + \frac{a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{a} = 0$

$$x^2 - \frac{(b^3 - 3bc)}{c} + c = 0$$
$$cx^2 - (b^3 - 3bc)x + c^2 = 0$$

$\alpha^2 = \beta$ எனின்,

$\alpha + \alpha^2 = b$, $\alpha^3 = c$

$\alpha^3(1 + \alpha)^3 = b^3$

$$a^3\{1 + 3(a + a^2) + a^3\} = b^3$$
$$c\{1 + 3(b) + c\} = b^3$$
$$c\{1 + 3b + c\} = b^3$$

www.lkedu.lk

பொது மூலம் α என்க.

$a^2 + ka - 6k = 0$ ——————— (1)

$a^2 - 2a - k = 0$ ——————— (2)

$(k+2)a - 5k = 0$

$$a = \frac{5k}{k+2} \text{ ——————— (3)}$$

(1) , (3) $\Rightarrow$ $\left(\frac{5k}{k+2}\right)^2 + k\left(\frac{5k}{k+2}\right) - 6k = 0$

$(5k)^2 + 5k^2(k+2) - 6k(k+2)^2 = 0$

$25k^2 + 5k^2(k+2) - 6k(k^2 + 4k + 4) = 0$

$11k^2 - k^3 - 24k = 0$

$k(k^2 - 11k + 24) = 0$

$k(k-8)(k-3) = 0$

$k = 0$ or 8 or 3

10. $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாடு செப்பமாக ஒரு மூலத்தை கொண்டிருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் கூறுக. இது $a \neq 0$

$\frac{x}{x-a} + \frac{x}{x-b} = 1 + c$ எனும் சமன்பாட்டில் x ஆனது செப்பமாக ஒரு மூலத்தைக் கொண்டிருக்குமெனின் $c^2 + \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = 1$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து $-1 \leq c \leq$ என உய்த்தறிக.

$ax^2 + bx + c = 0$ $\quad a \neq 0$

$D = 0$

$b^2 - 4ac = 0$

$\frac{x}{x-a} + \frac{x}{x-b} = 1 + c$

$\frac{x(x-b) + x(x-a)}{(x-a)(x-b)} = 1 + c$

$2x^2 - x(a+b) = (1+c)(x^2 - (a+b)x + ab)$

$= x^2 - (a+b)x + ab + cx^2 - c(a+b)x + abc$

$(c-1)x^2 - c(a+b)x + ab(1+c) = 0$

www.lkedu.lk

செப்பமான ஒரு மூலத்தைக் கொண்டிருப்பின்

$$D = 0$$

$$c^2(a+b)^2 - 4(c-1)ab(1+c) = 0$$

$$(a+b)^2 c^2 = 4(c^2-1)ab$$

$$c^2\left[(a+b)^2 - 4ab\right] = -4ab$$

$$c^2(a-b)^2 = -4ab$$

$$c^2 + \frac{4ab}{(a-b)^2} = 0$$

$$c^2 + \frac{4ab}{(a-b)^2} + 1 = 1$$

$$c^2 + \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = 1$$

$$-1 \leq c \leq 1$$

$$c^2 + \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = 1$$

ஆனால் $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \geq 0$

$$1 - c^2 \geq 0$$

$$(1-c)(1+c) \geq 0$$

$$-1 \leq c \leq 1$$

11. $a, b, c \in \mathbb{R}$ எனவும் $ac \neq 0$ எனவும் கொள்வோம். பூச்சியமானது சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$ இன் ஒரு மூலமன்று எனக்காட்டுக. α, β ஆகியன இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனவும் $\lambda = \frac{a}{b}$ எனவும் கொள்வோம். $ac(\lambda+1)^2 = b^2\lambda$ எனக்காட்டுக.

$p, q, r \in \mathbb{R}$ எனவும் $Pr \neq 0$ எனவும் கொள்வோம். அத்துடன் γ, δ ஆகியன சமன்பாடு $px^2 + qx + r = 0$ இன் மூலங்கள் எனவும் $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$ எனவும் கொள்வோம். $acq^2 = prb^2$ ஆக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் $\lambda = \mu$ அல்லது $\lambda = \frac{1}{m}$ ஆக இருக்குமெனக் காட்டுக.

$ax^2 + bx + c = 0$

பூச்சியம் இச் சமன்பாட்டின் மூலம் எனின்,

$x = 0 \Rightarrow$ $ax^2 + bx + c = 0$

$0 + 0 + c = 0$

$c = 0$

ஆனால் $ac \neq 0$

$a \neq 0$

$\therefore c = 0$

$\therefore$ பூச்சியம் இச்சமன்பாட்டின் மூலம் அன்று.

www.lkedu.lk

α, β இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனின்,

$$a + b = -\frac{b}{a} \qquad l = \frac{a}{b}$$

$$ab = \frac{c}{a}$$

$$(a + b)^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = \frac{b^2/a^2}{c/a}$$

$$l + \frac{1}{l} + 2 = \frac{b^2}{ac}$$

$$ac(l + 1)^2 = b^2 l$$

இவ்வாறே

$px^2 + qx + r = 0 \qquad pr \neq 0$

γ, δ மூலங்கள் எனில் $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$

$$pr(m+1)^2 = q^2 m$$

$$acq^2 = prb^2$$

$$\Rightarrow \frac{ac}{b^2} = \frac{pr}{q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{(l+1)^2} = \frac{m}{(m+1)^2} \qquad \text{(by (1), (2))}$$

$$\Rightarrow m(l+1)^2 = l(m+1)^2$$

$$\Rightarrow m(l^2 + 1 + 2l) = l(m^2 + 1 + 2m)$$

$$\Rightarrow l^2 m + m + 2lm = lm^2 + l + 2ml$$

$$\Rightarrow lm(l - m) - 1(l - m) = 0$$

$$\Rightarrow (lm - 1)(l - m) = 0$$

$$\Rightarrow lm = 1 \text{ or } l = m$$

$$\Rightarrow l = \frac{1}{m} \text{ or } l = m$$

www.lkedu.lk

12. α , β என்பன $x^2 - 2px + q = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகவும் γ , δ என்பன $x^2 - 2rx + s = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகவும் உள்ளன. இங்கு $p, q, r, s \in /R$

i) $\alpha\delta = \beta\gamma$ எனின் $p^2s = r^2q$ எனக்காட்டுக.

ii) α , β, γ , δ ஆகியன ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் அடுத்துள்ள உறுப்புக்கள் எனின், $p^2s = r^2q$ எனக்காட்டுக.

iii) α , β, γ, δ ஆகியன ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் அடுத்துள்ள உறுப்புக்கள் எனின், $s - q = r^2 - p^2$ எனக்காட்டுக.

i) $x^2 - 2px + q = 0$

$a + b = 2p$

$ab = q$

$x^2 - 2\gamma x + s = 0$

$\gamma + \delta = 2r$

$\gamma\delta = s$

$\alpha\delta = \beta\gamma$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

$\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(2p)^2}{q}$

$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{ab} = \frac{4p^2}{q}$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4p^2}{q} - 2$ ——— (1)

இவ்வாறு $\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\delta}{\gamma} = \frac{4r^2}{s} - 2$ ——— (2)

ஆனால் $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma}$

$\frac{4p^2}{q} = \frac{4r^2}{s}$

$p^2s = r^2q$

www.lkedu.lk

ii) $\alpha , \beta , \gamma , \delta$ பெருக்கல் விருத்தியில் இருப்பின்

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma}$$

$$\alpha\gamma = \beta\delta$$

1ம் பகுதியின் படி $p^2 s = r^2 q$

iii) $\alpha , \beta , \gamma , \delta$ என்பன கூட்டல் விருத்தியில் அமையின்

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta = \delta - \gamma$$

$$(\beta - \alpha) = \delta - \gamma$$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\delta - \gamma)^2$$

$$\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta = \gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta$$

$$(\beta - \alpha)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta$$

$$4p^2 - 4q = 4r^2 - 4s$$

$$s - q = r^2 - p^2$$

www.lkedu.lk

மீதித் தேற்றம்

$F(x)$ என்பது x இலுள்ள பல்லுறுப்பி சார்பாகவும் a என்பது ஒரு மெய்மாறிலியாகவும் இருக்க $f(x)$ ஐ $(x - a)$ ஆல் வகுக்க வரும் மீதி $f(a)$ ஆகும்.

நிறுவல்:- $f(x)$ ஐ $(x - a)$ ஆல் வகுக்க வரும் ஈவு $\phi(x)_2$ மீதி R என்க.

$$F(x) = (x - a)\,\phi(x) + R$$

$x = a$ எனப் பிரதியிட

$$F(a) = R$$

$$R = f(a)$$

Note:- $F(x)$ ஐ $(x + a)$ ஆல் வகுக்க வரும் மீதி $F(-a)$ ஆகும்.
வகுக்கும் கோவை $(Ax + B)$ எனும் வடிவில் இருப்பின் மீதி மாறிலி R ஆகும்.

உதாரணம்:- $F(x) = 4x^3 + 10x^2 - 19x + 5$ ஆகும்.

$f(x)$ ஐ $(x - 3)$ ஆல் வகுக்க வரும் மீதி யாது?

$$f(3) = 4\times3^3 + 10\times3^2 - 19\times3 + 5$$
$$= 108 + 90 - 57 + 5$$
$$= 146$$

www.lkedu.lk

காரணித் தேற்றம்

$f(x)$ என்பது x இலுள்ள பல்லுறுப்பி சார்பாகவும் a என்பது ஒரு மெய்மாறிலியாகவும் இருக்க $f(a)=0$ எனின், $(x-a)$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும்.
மறுதலையாக
$(x-a)$ ஒரு காரணி எனின், $f(a)=0$ ஆகும்.

01. $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + 7$ ஆகும். இங்கு a, b ஒருகைகள் $f(x)$ என்பதை $(x-1)$ ஆல் வகுக்க வரும் மீதி 11. $f(x)$ ஐ $(x+2)$ ஆல் வகுக்க வரும் மீதி 17. a, b யின் பெறுமானங்களைக் காண்பதன் மூலம் $f(x)$ ஐ $(x+1)$ ஆல் வகுக்க வரும் மீதியைக் காண்க.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + 7$$
$$f(1) = 11$$
$$a+b+3+7=11$$
$$a+b=1 \quad \text{——————————} \quad (1)$$

$$f(-2) = 17$$
$$a(-2)^3 + b(-2)^2 + 3\times -2 + 7 = 17$$
$$-8a + 4b = 16$$
$$-2a + b = 4 \quad \text{——————————} \quad (2)$$

(1) - (2) Þ $3a = -3$
$a = -1$
$b = 2$

$\therefore f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x + 7$
$f(-1) = (-1)^3 + 2a(-1)^2 + 3a(-1) + 7$
$= -1 + 2 - 3 + 7$
$= 5$

02. $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 15$ என்னும் பல்லுறுப்பிகை $(x-1)$ $(x+5)$ என்பவற்றால் வகுக்கும் போது மீதிகள் முறையே 12, 0 ஆகும். b, c என்பவற்றை காணாது பல்லுறுப்பி $f(x)$ ஐ $(x-1)$ $(x+5)$ ஆல் வகுக்கும் போது ஈவையும் மீதியையும் காண்க.

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 17$
$f(1) = 12$
$f(-5) = 0$
$f(x) = (x-1)(x+5)(px+q) + (Ax+B)$
$x = 1$
$F(1) = A + B$
$A + B = 12 \quad \text{——————————} \quad (1)$
$x = -5$
$F(-5) = -5A + B$
$-5A + B = 0 \quad \text{——————————} \quad (2)$

(1) , (2) Þ $A = 2$

$B = 10$

மீதி $2x + 10$

$f(x) = (x - 1)(x + 5)(px + q) + 2x + 10$

x^3ன் குணகத்திற்கு சமன்பாடு

$1 = p$

மாறிலி $15 = -5q + 10$

$q = -1$

∴ ஈவு $x - 1$

03. $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + x - 10$ என்க. இங்கு $a, b, c, \in / R$ $(x - 1)$ $(x - 2)$ என்பன $f(x)$ ன் காரணிகளாகவும் $(x + 1)$ ஆல் $f(x)$ ஐ வகுக்கிவரும் மீதி 48 ஆகவும் இருப்பின் a, b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. $f(x)$ ஐ $(2x + 1)$ ஆல் வகுக்க வரும் மீதியைக் கண்டு $f(x)$ ஏகபரிமான காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதுக.

$f(1) = 0$

$a \times 1^4 + b + c + 1 - 10 = 0$

$a + b + c = 9$ ——————————— (1)

$f(2) = 0$

$a \times 2^4 + b \times 2^3 + c \times 2^2 + 2 - 10 = 0$

$16a + 8b + 4c = 8$

$4a + 2b + c = 2$ ——————————— (2)

$f(-1) = 48$

$a(-1)^4 + b(-1)^3 + c(-1)^2 + (-1) - 10 = 48$

$a - b + c = 59$ ——————————— (3)

(1) , (2) , (3) Þ $a = 6, \quad b = -25, \quad c = 28$

$f(x) = 6x^4 - 25x^3 + 28x^2 + x - 10$

$f(x)$ ஐ $(2x + 1)$ ஆல் வகுக்க வரும் மீதி $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 6 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^4 - 25 \times \left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 + 28 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} - 10$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{25}{8} + 7 - \frac{1}{2} - 10$$

$$= \frac{28 - 24 - 4}{8}$$

$$= 0$$

∴ ஏகபரிமானக் காரணி

$f(x) = (x - 1)(x - 2)(2x + 1)(3x - 5)$

04. $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$

$q(x) = x^2 + 3x + 6$ எனக் கொள்வோம்.

மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $p(x)$ ஆனது $(x - 1)$ இனால் வகுக்கப்படும் போது உள்ள மீதியையும் $q(x)$ ஆனது $(x - 2)$ ஆல் வகுக்கப்படும் போது உள்ள மீதியையும் காண்க.

$p(x) = (x - 1)\, q(x) + 5$ என வாய்ப்புப் பார்த்து $p(x)$ ஆனது $(x - 1)(x - 2)$ இனால் வகுக்கப்படும் போது உள்ள மீதியையும் காண்க.

$p(x)$ ஆனது $(x - 1)$ ஆல் வகுக்கும் போது உள்ள மீதி.

$p(1) = 1^3 + 2 + 3 - 1$

$= 5$

$q(x)$ ஆனது $(x - 2)$ ஆல் வகுக்கும் போது உள்ள மீதி

$q(2) = 2^2 + 3 \times 2 + 6$

$= 4 + 6 + 6$

$= 16$

$p(x) = (x - 1)\, q(x) + 5$

$R.H.S = (x - 1)(x^2 + 3x + 6) + 5$

$= x^3 + 3x^2 + 6x - x^2 - 3x - 6 + 5$

$= x^3 + 2x^2 + 3x - 1$

$= p(x)$

$= L.H.S$

$L.H.S = R.H.S$

$q(x) = (x - 2)\, f(x) + 16$

$p(x) = (x - 1)\,[(x - 2)\, f(x) + 16] + 5$

$= (x - 1)(x - 2)\, f(x) + 16x - 11$

மீதி $16x - 11$

05. i) பல்லுறுப்பி $f(x)$ ஆனது $(x - \alpha)$ ஆல் வகுபடும் போது பெறப்படும் மீதி $f(x)$ எனக் காட்டுக.

ii) பல்லுறுப்பி $f(x)$ ஆனது $(x - \alpha)(x - \beta)$ ஆல் வகுபடும் போது பெறப்படும் மீதி $Ax + \beta$ எனும் வடிவத்தை எடுக்கின்றது. இங்கு $\alpha \neq \beta$ ஒருமைகள் A ஐயும் B ஐயும் $\alpha, \beta, f(\alpha), f(\beta)$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

iii) இதிலிருந்து $x^3 + kx^2 + k$ என்பது $(x - 1)(x - 2)$ ஆல் வகுபடும் போது பெறப்படும் மீதியானது மாறா (ஒருமை) உறுப்பை கொண்டிருக்காவிடின் ஒருமை k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

i) $f(x)$ ஆனது $(x - \alpha)$ ஆல் வகுக்க மீதி R ஈவு $\phi(x)$

$f(x) = (x - \alpha)\, \phi(x) + R$

$x = \alpha$ எனின்,

$f(x) = 0 + R$

மீதி $R = f(\alpha)$

www.lkedu.lk

ii) $f(x) = (x - a)(x - b)f(x) + Ax + b$

$f(a) = Ax + b$ ——————————— (1)

$f(b) = Ab + b$ ——————————— (2)

$A(a - b) = f(a) - f(b)$

$= \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$

(1) ´ b - (2) ´ a Þ

$B = \frac{a f(B) - b f(a)}{a - b}$

iii) $f(x) = x^3 + kx^2 + k$ என்க.

$(x - \alpha)(x - \beta) = (x - 1)(x + 2)$

$\alpha = 1$, $\beta = -2$

$f(x)$ ஐ $(x - 1)(x + 2)$ வகுக்க வரும் மீதியில் மாறா ஒருமை இல்லை.

$\beta = 0$

$\frac{a f(b) - b f(a)}{a - b} = 0$ ——————————— (1)

இங்கு $\alpha = 1$, $\beta = -2$

$f(a) = f(1) = 1^3 + k1^2 + k$

$= 1 + 2k$

$f(b) = f(-2) = (-2)^3 + K(-2)^2 + k$

$= 5k - 8$

(1) Þ $\frac{1.a(1 + 2k) - (-2)(5k - 8)}{1 - 2} = 0$

$5k - 3 + 2 + 4k = 0$

$k = \frac{2}{3}$

www.lkedu.lk

06. $f(x)$ என்பது படி 3 இலும் கூடியதும் x இல் உள்ளதுமான ஒரு பல்லுறுப்பியாகும். $f(x)$ ஆனது $(x-1)(x-2)(x-3)$ ஆகியவற்றினால் வகுக்கப்படும் போது மீதிகள் முறையே a, b, c என்பனவாகும்.

மீதித் தேற்றத்தை திருப்பத் திருப்ப பிரயோகிப்பதன் மூலம் $f(x)$ ஆனது $(x-1)(x-2)(x-3)$ இனால் வகுக்கப்படும் போது மீதியை $\lambda(x-1)(x-2)+\mu(x-1)+\Upsilon$ என எடுத்துரைக்கலாமெனக் காட்டுக. இங்கு λ, μ, Υ ஆகியன மாறிலிகள். λ, μ, Υ ஆகியவற்றை a, b, c ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

$f(1) = a$

$f(2) = b$

$f(3) = c$

$f(x) = (x-1)f(x) + R_1$

$f(x) = (x-1)f(x) + a \qquad [R_1 = a]$

$f(x) = (x-2)\,q(x) + R_2$

(1)ல் பிரதியிட

$$f(x) = (x-1)[(x-2)q(x) + R_2] + a$$
$$= (x-1)(x-2)q(x) + (x-1)R_2 + a$$
$$f(2) = R_2 + a$$
$$= b - a$$
$$f(x) = (x-1)(x-2)q(x) + (b-a)(x-1) + 9 \qquad \text{---------- (2)}$$
$$q(x) = (x-3)q(x) + R_3$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)[(x-3)q(x) + R_3] + (b-a)(x-1) + a$$
$$= (x-1)(x-2)(x-3)q(x) + R_3(x-1)(x-2) + (b-a)(x-1) + a$$
$$f(3) = 0 + R_3 \times 2 \times 1 + (b-a)2 + a$$
$$R_3 = \frac{c - 2b + a}{2}$$
$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)q(x) + \left(\frac{c-2b+a}{2}\right)(x-1)(x-2) + (b-a)(x-1) + a$$

இங்கு $l = \frac{a+c-2b}{2}$, $m = b-a$, $\Upsilon = a$

www.lkedu.lk

07. $f(x) = ax^3 + bx^2 - 11x + 6$ எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $a, b \in R$, $(x - 1)$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணியாகவும் $f(x)$ ஆனது $(x - 4)$ இனால் வகுக்கப்படும் போது கிடைக்கும் மீதி -6 ஆகவும் இருப்பின் a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

$f(x)$ இன் மற்றைய ஏகபரிமாணக் காரணிகளைக் காண்க.

$f(x) = ax^3 + bx^2 - 11x + 6$

$f(1) = 0$

$a + b - 11 + 6 = 0$

$a + b = 5$ ——————————— (1)

$f(4) = -6$

$a \times 4^3 + b4^2 - 11 \times 4 + 6 = -6$

$4a + b = 2$ ——————————— (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ $a = -1$

$b = 6$

$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$

$= (x-1)(-x^2 + 5x - 6)$

$= (x-1)(-x+2)(x+3)$

மற்றைய ஏகபரிமாணக் காரணி

$(-x+2)(x+3)$ ஆகும்.

08. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ எனக் கொள்வோம்.

i) $(x-1)(x+1) f(x)$ இன் காரணிகள் இல்லை எனக் காட்டுக.

ii) $f(x) = (x^2-1)\phi(x) + ax + b$ ஆகுமாறு a, b காண்க.

iii) $f(x)$ ஐ $x^2 + 1$ ஆல் வகுக்க மீதி $2x$ எனக் காட்டுக.

iv) $f(x) = 2x$ இன் மூலங்களைக் காண்க.

i) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

$f(1) = 1 - 3 + 2 - 2 + 3 + 1$

$= 2$

$\neq 0$

$(x-1)$ ஆனது $f(x)$ இன் காரணி அல்ல.

$f(-1) = 1 - 3 - 2 - 2 - 3 + 1$

$= -10$

$\neq 0$

$x+1$ ஆனது $f(x)$ இன் காரணி அல்ல.

www.lkedu.lk

ii) $f(x) = (x^2-1)\,\phi(x) + ax + b$

$f(1) = a + b$

$a + b = 2$ ——————————— (1)

$f(-1) = -a + b$

$-a + b = -10$ ——————————— (2)

(1) , (2) $\Rightarrow$ $b = -4$

$a = 6$

மீதி $6x - 4$

iii) $f(x) = (x^2+1)\,\phi(x) + px + q$

$= (x^2+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) + px + q$

$= x^2[ax^3 + bx^3 + cx + d] + 1[ax^3 + bx^3 + cx + d] + px + q$

x^5 ன் குணகத்தை சமப்படுத்த

$a = 1$

$x^4 \Rightarrow b = -3$

$x^3 \Rightarrow c + a = 2$

$c = 1$

$x \Rightarrow c + p = 3$

$p = 2$

மாறிலி $\Rightarrow$ $d + q = 1$

$q = 0$

மீதி $px + q$

$= 2x$

iv) $f(x) = (x^2+1)(x^3 - 3x^2 + x + 1) + 2x$

$f(x) = 2x$

$(x^2+1)(x^3 - 3x^2 + x + 1) = 0$

$x^2 + 1 \neq 0$

$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$

$(x - 1)(x^2 - 2x - 1] = 0$

$x = 1$ or $x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 1}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$= 1 \pm \sqrt{2}$

$x = 1$ or $1 + \sqrt{2}$ or $1 - \sqrt{2}$

www.lkedu.lk

09. $c \neq 0$, d ஆகியன மெய்யெண்கள் எனவும் $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$ எனவும் கொள்வோம்.
$f(x)$ ஆனது $(x + c)$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி $-c^3$ ஆகும். அத்துடன் $(x - c)$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும். $c = -2$ எனவும் $d = -12$ எனவும் காட்டுக.
c, d ஆகியவற்றின் இப்பெறுமானங்களுக்கு $f(x)$ ஆனது $(x^2 - 4)$ இனால் வகுக்கப்படும் போது மீதியைக் காண்க.

$f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$

$f(-c) = -c^3 + 4c^2 + c \times (-c) + d = -c^3$

$3c^2 + d = 0$ ——— (1)

$f(c) = c^3 + 4c^2 + c^2 + d = 0$

$c^3 + 5c^2 + d = 0$ ——— (2)

$c^3 + 2c^2 = 0$

$c^2(c + 2) = 0$

$c \neq 0 \quad c = -2$

$\therefore d = -3 \times 4$

$= -12$

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 12$

$f(x) = (x^2 - 4)\, q(x) + lx + m$

$f(2) = 2l + m$

$f(-2) = -2l + m$

$2l + m = 2^3 + 4 \times 2^2 - 2 \times 2 - 12$

$= 8 + 16 - 4 - 12$

$= 8$ ——— (A)

$-2l + m = -8 + 16 + 4 - 12$

$= 0$ ——— (B)

(A), (B) $\Rightarrow m = 4, \quad l = 2$

மீதி $2x + 4$

www.lkedu.lk

10. $g(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $p, q, \in R$ $g(x)$ ஆனது $(x-1)(x+2)$ இனால் வகுக்கப்படும் போது மீதி $3x + 2$ ஆகும். $g(x)$ ஆனது $(x - 1)$ இனால் வகுக்கப்படும் போது மீதி 5 எனவும் $g(x)$ ஆனது $(x + 2)$ இனால் வகுக்கப்படும் போது மீதி (-4) எனவும் காட்டுக.

$g(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$

$= (x - 1)(x + 2)f(x) + 3x + 2$

$g(1) = 0 + 3 + 2$

$= 5$

$g(-2) = -6 + 2$

$= -4$

$g(1) = 1^3 + p + q + 1 = 5$

$p + q = 3$ ——————————— (1)

$g(-2) = -8 + 4p - 2q + 1 = -4$

$4p - 2q = 3$ ——————————— (2)

(1), (2) ⇒ $p = \frac{3}{2}$

$q = \frac{3}{2}$

$\therefore g(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

$g(-2) = -2^3 + \frac{3}{2}(-2)^2 + \frac{3}{2}(-2) + 1$

$= -8 + 6 - 3 + 1$

$= -4$

$\therefore g(x)$ $(x + 2)$ இனால் வகுக்கப்படும் போது மீதி -4 ஆகும்.

www.lkedu.lk

எல்லைகள், வகையீடு

01. எல்லைகள் பற்றி தேற்றங்கள்

a, A, B, k, $\in$ /R ஆயிருக்க $\lim_{x \to a} f(x) = A$, $\lim_{x \to a} g(x) = B$ என்க.

01. $\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$

02. $\lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = A - B$

03. $\lim_{x \to a} \{kf(x)\} = k \lim_{x \to a} f(x) = kA$

04. $\lim_{x \to a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = AB$

05. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$

தேற்றங்கள்

01. $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$, $n \in Q$

02. x ஆரையனில் அளக்கப்பட்டிருக்க $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sin } x}{x} = 1$

சார்பு ஒன்றின் பெறுமதி அல்லது வகையீட்டுக் குணகம்

$f(x)$ என்பது x இல் சார்பு எனின் $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ என்பது x குறித்து $f(x)$ இன் பெறுதி அல்லது வகையீட்டுக் குணகம் எனப்படும். இது $f'(x)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y என்பது x இல் ஒரு சார்பு எனின் x இல் ஓர் சிறிய ஏற்றம் δx இற்கு y இல் அதற்கு ஒத்த ஏற்றம் δy எனின், $\lim_{dx \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ என்பது x ஐக் குறித்து y இன் வகையீட்டுக் குணகம் அல்லது பெறுதி எனப்படும்.

இது $\frac{dy}{dx}$ என்பதால் குறிக்கப்படும்.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

www.lkedu.lk

வகையீட்டுத் தேற்றங்கள்

a) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

b) $\frac{dc}{dx} = 0$ C - மாறிலி

c) f, g என்பன x இல் இரு சார்புகள் எனின்

1) $\frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d}{dx}\{f(x)\} \pm \frac{d}{dx}\{g(x)\}$

2) $\frac{d}{dx}\{cf(x)\} = c \cdot \frac{d}{dx}\{f(x)\}$

3) $\frac{d}{dx}\{f(x)\, g(x)\} = f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x)$

4) $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{g(x)\, f'(x) - f(x)\, g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

d) ஒரு சார்பினது சார்பின் வகையீடு y என்பது z இன் ஒரு சார்பாகவும் z என்பது x இன் ஓர் சார்பாகவும் இருப்பின் $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$ ஆகும்.

திரிகோணகணிதச் சார்புகளின் வகையீடு

1) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

2) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

3) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

4) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\cot x \operatorname{Cosec} x$

5) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{Cosec}^2 x$

6) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

www.lkedu.lk

நேர்மாறு திரிகோணகணிதச் சார்புகளின் வகையீடு

01. $\frac{d}{dx}\{\text{Sin}^{-1}x\} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $-1 \leq x \leq 1$; $\frac{-p}{2} \leq \text{Sin}^{-1}x \leq \frac{p}{2}$

02. $\frac{d}{dx}\{\text{Cos}^{-1}x\} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $-1 \leq x \leq 1$; $0 \leq \text{Cos}^{-1}x \leq p$

03. $\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}x\} = \frac{1}{1+x^2}$; $-\infty < x < \infty$; $\frac{-p}{2} < \tan^{-1}x < \frac{p}{2}$

அடுக்குக்குறி, மடக்கைச் சார்புகளின் வகையீடு

01. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

02. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$; $x > 0$

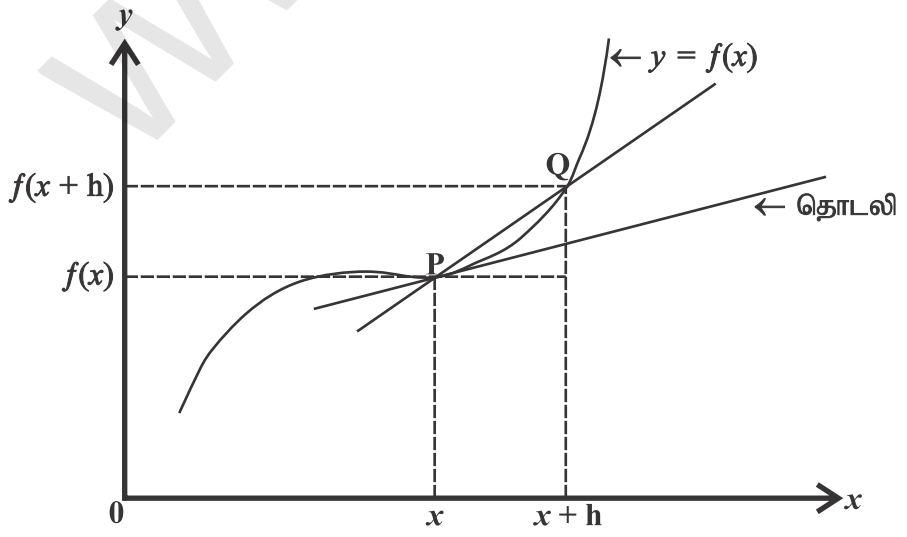
அடுத்தடுத்த வகையீடு

$f(x)$ இன் முதலாவது பெறுதி $f^1(x)$ எனக் குறிக்கப்படுவது போன்று இரண்டாம், மூன்றாம் பெறுதிகள் முறையே $f^2(x)$, $f^3(x)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

x குறித்து y இன் முதலாவது பெறுதி $\frac{dy}{dx}$ ஆகும். இரண்டாம், மூன்றாம் பெறுதிகள் முறையே $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

வகையீட்டின் பிரயோகம்

01. அதிகரிக்கும் சார்பு, குறையும் சார்பு சார்பின் குறி ஆராய்தல்.
02. தொடலி, செவ்வனின் சமன்பாடுகளை காணுதல்.
03. சார்பின் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காணல்.
04. நடைமுறை வாழ்க்கை தொடர்பான பிரச்சினைகள்.
05. சார்பின் நடத்தையை ஆராய்தலும் சார்பை வரைதலும்.



www.lkedu.lk

நாண் PQ இன் படித்திறன் = $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{df(x)}{dx}$

(x, y) இல் தொடலியின் படித்திறன் = $\frac{d\,f(x)}{dx}$

$y = f(x)$ என்பது x ஐ மாறியாக உடைய சார்பாக $\frac{dy}{dx}$ ஆனது தரப்பட்ட வளையிங்கு (x, y) இல் தொடலியின் படித்திறனைக் குறிக்கும் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆக அமையலாம்.

01. (a, b) ஆயிடையில் $\frac{dy}{dx} > 0$ எனில் அவ் ஆயிடையில் x அதிகரிக்க சார்பு அதிகரிக்கும்.

02. (a, b) ஆயிடையில் $\frac{dy}{dx} < 0$ எனில் அவ் ஆயிடையில் x அதிகரிக்க சார்பு குறையும்.

03. $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும் புள்ளிகளில் படித்திறன் பூச்சியம். $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும் புள்ளிகள் திரும்பற் புள்ளிகள் எனப்படும்.

குறிப்பு:

01. x அதிகரிக்க y அதிகரிக்குமா or குறையுமா என ஆராய $\frac{dy}{dx} > 0$ இன் குறி உதவுகின்றது.

02. $\frac{dy}{dx}$ ஆனது x அதிகரிக்க அதிகரிக்குமா or குறையுமா என ஆராய $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ இன் குறி உதவுகின்றது.

03. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகும் புள்ளிகளில் விபத்திப் புள்ளிகள் பெறப்படும்.

($\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகும் எல்லாப் புள்ளிகளும் விபத்திப் புள்ளிகளாக அமைய வேண்டிய அவசியம் இல்லை.)

$a < x < b$	$a < x < b$	$a < x < b$	$a < x < b$
$\frac{dy}{dx} > 0$ $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$	$\frac{dy}{dx} < 0$ $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$	$\frac{dy}{dx} > 0$ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$	$\frac{dy}{dx} < 0$ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$
சார்பு அதிகரிக்கும் சார்பின் வடிவம் கீழ் நோக்கிய குழிவாக அமையும்.	சார்பு குறையும் சார்பின் வடிவம் கீழ் நோக்கிய குழிவாக அமையும்.	சார்பு அதிகரிக்கும் சார்பின் வடிவம் மேல் நோக்கிய குழிவாக அமையும்.	சார்பு குறையும் சார்பின் வடிவம் மேல் நோக்கிய குழிவாக அமையும்.

www.lkedu.lk

சார்பு ஒன்றின் வரைபை வரைதலில் இரண்டாம் வகையீட்டு பெறுதியின் தாக்கமும் இரண்டாம் வகையீட்டைப் பயன்படுத்தி சார்பை வரைதலும்.

முதலாம் வகையீட்டை பயன்படுத்தி வரைபை வரையக் கூடியதாக இருப்பினும் அவ்வளையி ஆனது சிலவேளைகளில் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகவுள்ள புள்ளிகளிலும் விபத்திப் புள்ளிகளைக் கொண்டிருக்கலாம்.

1ம் வகையீட்டை பயன்படுத்தி வரைபை வரையும் போது அவ்விபத்திப் புள்ளிகளில் வரைபின் வடிவம் சரியாக வரைய முடியாது.

2ம் வகையீட்டுப் பெறுதியில் $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகும் புள்ளிகள் விபத்துப் புள்ளிகள் ஆதலால் அப் புள்ளிகளை அறிவதன் மூலம் விபத்திப் புள்ளிகளை தெளிவாக காட்ட முடியும்.

வரைபை வரைவதற்கான படிமுறை

01. நிலைக்குத்து அணுகுகோடுகள் இருப்பின் அவற்றை குறித்தல்.

02. $\lim_{x \to \infty} fx$ $\lim_{x \to -\infty} fx$ என்பவற்றை காண்பதன் மூலம் $x \to \infty$, $x \to -\infty$ ஆகும் போது சார்பு எப்பெறுமானத்தை அணுகுகிறது என அறிதல்.

03. $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐ காணுதல்.

04. திரும்பற் புள்ளியில் $\frac{dy}{dx} = 0$ எனக் குறிப்பிட்டு $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும் புள்ளிகளை காணுதல்.

05. அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளிகள் உள்ள x இன் பெறுமானங்களை ஏறுவரிசையில் கருது வதன் மூலம் ஒவ்வொரு ஆயிடையிலும் $\frac{dy}{dx}$ இன் குறியை ஆராய்தல். இதன் மூலம் ஒவ்வொரு ஆயிடையிலும் சார்பு அதிகரிக்குமா or குறையுமா என அறிதல். திரும்பற் புள்ளிகள் உயர்வா or இழிவாக or விபத்தியா என அறிதல்.

06. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகும் புள்ளிகளை அறிதல். $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகும் x இன் பெறுமானங்களின் ஏறுவரிசையில் ஒவ்வொரு ஆயிடையிலும் $\frac{d^2y}{dx^2}$ இன் குறியை ஆராய்வதன் மூலம் அவ்வாயிடையில் சார்பு கீழ் நோக்கிய குழிவா $\left(\frac{d^2y}{dx^2} < 0\right)$, மேல் நோக்கிய குழிவாக $\left(\frac{d^2y}{dx^2} > 0\right)$ என அறிதல். மற்றும் $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ விபத்திப் புள்ளிகளாக or இல்லையா என அடையாளம் காணல்.

07. அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளிகள் குறித்தல் ஒவ்வொரு ஆயிடையிலும் $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ இன் குறியை கருதுவதன் மூலம் வரைபை வரைதல்.

வகையீடு

01. எல்லைகள்

01. $\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos 2x)\sin 5x}{x^3 \sin 3x} = \frac{10}{3}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos 2x)\sin 5x}{x^3 \sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}$$

$$= 2 \times 1 \times \frac{5}{3}$$

$$= \frac{10}{3}$$

02. பெறுமானம் காண்க. $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \cot x}{1 - \cos x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \cot x}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x \cot x}{2\sin^2 x/2}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}} \cdot \frac{1}{2 \times \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1 \times 2 \times \frac{1}{4} \times 1}$$

$$= 2$$

www.ikedu.lk

03. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4 + \cos x}}{x \sin x} = \frac{1}{4\sqrt{5}}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4 + \cos x}}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{5 - (4 + \cos x)}{x \sin x \left(\sqrt{5} + \sqrt{4 + \cos x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x \sin x}\right) \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4 + \cos x}}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \times \frac{1}{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)} \times \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\left(\sqrt{5} + \sqrt{4 + \cos x}\right)}\right)$$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \times \frac{1}{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)} \times \frac{1}{4} \times \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4 + \cos x}}\right)$$

$$= 2 \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}}$$

04. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin \left(\frac{a + b}{2}\right) x \cdot \sin \left(\frac{b - a}{2}\right) x}{x^2}$$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin \left(\frac{a + b}{2}\right) x}{\left(\frac{a + b}{2}\right) x}\right] \times \left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin \left(\frac{b - a}{2}\right) x}{\left(\frac{b - a}{2}\right) x}\right] \cdot \left(\frac{b - a}{2}\right)$$

$$= 2 \times 1 \times \left(\frac{a + b}{2}\right) \times 1 \times \left(\frac{b - a}{2}\right)$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2}$$

www.lkedu.lk

05. $\lim_{x \to a} \frac{x^2 \sin a - a^2 \sin x}{x - a}$ ஐக் காண்க.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 \sin a - a^2 \sin x}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 \sin a - a^2 \sin a + a^2 \sin a - a^2 \sin x}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x^2 - a^2)\sin a - a^2(\sin x - \sin a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} (x + a)\sin a - a^2 \lim_{x \to a} \left[\frac{\sin x - \sin a}{x - a}\right]$$

$$= \lim_{x \to a} (x + a)\sin a - 2a^2 \lim_{x \to a} \left[\frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x - a}\right]$$

$$= \lim_{x \to a} (x + a)\sin a - 2a^2 \left[\lim_{x \to a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \lim_{x \to a} \left[\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\right]\right]$$

$$= 2a\sin a - 2a^2 \cos a \times \frac{1}{2} \times 1$$

$$= 2a\sin a - a^2 \cos a$$

06. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1 - \sin x}{4x^2 - \pi^2}\right]$ ஐக் காண்க.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1 - \sin x}{4x^2 - \pi^2}\right] = \lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{4x^2 - \pi^2}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{4x^2 - \pi^2}$$

$$= -2 \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{(\pi + 2x)(\pi - 2x)}$$

$\because x \to \frac{\pi}{2}$ ஆக $\frac{x}{2} \to \frac{\pi}{4}$

$$= -2 \lim_{\frac{x}{2} \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\right] \times \lim_{\frac{x}{2} \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\right] \times \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\pi - 2x}{\pi + 2x}\right] \frac{1}{8}$$

$$= -2 \times 1 \times 1 \times 0$$

$$= 0$$

07. $\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{\tan x - \tan a} = 3a^2 \cos^2 a$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{\tan x - \tan a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x^2 + xa + a^2)}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin a}{\cos a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x^2 + a x + a^2)}{\sin(x - a)} \cos a \cos a$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{\sin(x - a)} \cdot \lim_{x \to a} (x^2 + a x + a^2) \cos a \cos a$$

$$= 1 \cdot (a^2 + a^2 + a^2) \cos a \cos a$$

$$= 3a^2 \cos^2 a$$

08. $\lim_{x \to p} \frac{\sin x}{x^3 - p^3} = -\frac{1}{3p^2}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x \to p} \frac{\sin x}{x^3 - p^3}$$

$$= \lim_{x - p \to 0} \frac{\sin(p - x)}{(x - p)(x^2 + xp + p^2)}$$

$$= -\lim_{(x - p) \to 0} \frac{\sin(x - p)}{(x - p)} \cdot \lim_{x \to p} \frac{1}{(x^2 + xp + p^2)}$$

$$= -1 \cdot \frac{1}{(p^2 + p^2 + p^2)}$$

$$= -\frac{1}{3p^2}$$

www.lkedu.lk

09. $\underset{x \to 1}{Lt} (1-x)\tan\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$ எனக் காட்டுக.

$$= \underset{x \to 1}{Lt}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$$

$$= \underset{x-1 \to 0}{Lt}\frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

$$= \underset{x-1 \to 0}{Lt}\frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\underset{(1-x)\frac{\pi}{2} \to 0}{Lt}\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)} \cdot \underset{x \to 0}{Lt}\sin\frac{\pi x}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

10. $\underset{x \to 0}{Lt}\frac{1-\cos\frac{\pi x}{4}}{x^2(x+1)} = \frac{\pi^2}{32}$ எனக் காட்டுக.

$$\underset{x \to 0}{Lt}\frac{1-\cos\frac{\pi x}{4}}{x^2(x+1)}$$

$$= \underset{x \to 0}{Lt}\frac{2\sin^2\frac{\pi x}{8}}{x^2(x+1)}$$

$$= 2\frac{\pi^2}{64}\left[\underset{\frac{\pi x}{8} \to 0}{Lt}\frac{\sin\frac{\pi x}{8}}{\frac{\pi x}{8}}\right]^2 \underset{x \to 0}{Lt}\frac{1}{(x+1)}$$

$$= 2 \times \frac{\pi^2}{64} \times 1 \times \frac{1}{(1+0)}$$

$$= \frac{\pi^2}{32}$$

www.lkedu.lk

11. $\underset{x \to -1}{\text{Lt}} \dfrac{\text{Sin}\left(x^2 - x - 2\right)}{(x+1)} = -3$ எனக் காட்டுக.

$$\underset{x \to -1}{\text{Lt}} \frac{\text{Sin}\left(x^2 - x - 2\right)}{(x+1)}$$

$$= \underset{x \to -1}{\text{Lt}} \frac{\text{Sin}(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} \cdot (x-2)$$

$$= \underset{(x+1)(x-2) \to 0}{\text{Lt}} \frac{\text{Sin}(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} \cdot \underset{x \to -1}{\text{Lt}} (x-2)$$

$$= 1.\ (-1-2)$$
$$= -3$$

12. $\underset{x \to 0}{\text{Lim}} \dfrac{\sqrt{1+\text{Sin}\,x} - \sqrt{1+\text{Sin}^2 x}}{2x} = \dfrac{1}{4}$ எனக் காட்டுக.

$$\underset{x \to 0}{\text{Lim}} \frac{\sqrt{1+\text{Sin}\,x} - \sqrt{1+\text{Sin}^2 x}}{2x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{(1+\text{Sin}\,x) - (1+\text{Sin}^2 x)}{2x\left\{\sqrt{1+\text{Sin}\,x} + \sqrt{1+\text{Sin}^2 x}\right\}}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\text{Sin}\,x\,(1-\text{Sin}\,x)}{2x\left\{\sqrt{1+\text{Sin}\,x} + \sqrt{1+\text{Sin}^2 x}\right\}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\text{Sin}\,x}{x} \cdot \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{(1-\text{Sin}\,x)}{\left(\sqrt{1+\text{Sin}\,x} + \sqrt{1+\text{Sin}^2 x}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{(1-0)}{(1+1)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

www.ikedu.lk

13. $n \in Z^+$ இற்குப் பேறு $\lim\limits_{y \to 2} \frac{y^n - a^n}{y - a} = na^{n-1}$ ஐப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறு விதமாக

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(x + \sqrt{2}\right)^4 - 4}{\sin 4x} = 2\sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(x + \sqrt{2}\right)^4 - 4}{\sin 4x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(x + \sqrt{2}\right)^4 - \left(\sqrt{2}\right)^4}{\left(x + \sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{2}\right)} \cdot \left\{ \frac{\left(x + \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}}{\sin 4x} \right\}$$

$$= \lim_{x + \sqrt{2} \to \sqrt{2}} \frac{\left(x + \sqrt{2}\right)^4 - \left(\sqrt{2}\right)^4}{\left(x + \sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{2}\right)} \cdot \frac{1}{4} \lim_{4x \to 0} \frac{4x}{\sin 4x}$$

$$= 4\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1$$

$$= 2\sqrt{2}$$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \left\{ \frac{(8 + x)^{\frac{1}{3}} - 2}{x^2} \right\} \sin 2x = \frac{1}{6}$

$$\cdot \lim_{x \to 0} \frac{\left\{ (8 + x)^{\frac{1}{3}} - 2 \right\} \sin 2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(8 + x)^{\frac{1}{3}} - 8^{\frac{1}{3}}}{(8 + x) - 8} \cdot 2\frac{\sin 2x}{2x}$$

$$= 2 \lim_{x + 8 \to 8} \frac{(8 + x)^{\frac{1}{3}} - 8^{\frac{1}{3}}}{(8 + x) - 8} \cdot \lim_{2x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} \cdot 1$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2^{-2}$$

$$= \frac{1}{6}$$

www.lkedu.lk

15. $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{1 - \cos(1 - \cos 2x)}{x^4} = 2$ எனக் காட்டுக.

$$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{1 - \cos(1 - \cos 2x)}{x^4}$$
$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{1 - \cos(2 - \sin^2 x)}{x^4}$$
$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{2\sin^2(\sin^2 x)}{x^4}$$
$$= 2 \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin^2(\sin^2 x)}{\sin^4 x} \cdot \frac{\sin^4 x}{x^4}$$
$$= 2 \left[\underset{\sin^2 x \to 0}{Lt} \frac{\sin(\sin^2 x)}{(\sin^2 x)}\right]^2 \left[\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin x}{x}\right]^4$$
$$= 2 \cdot 1^2 \cdot 1^4$$
$$= 2$$

16. $\underset{x \to \frac{\pi}{4}}{Lt} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.

$$\underset{x \to \frac{\pi}{4}}{Lt} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$$
$$= \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{Lt} \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \sqrt{2} \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{Lt} \frac{\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \sqrt{2} \underset{\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \to 0}{Lt} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \sqrt{2} \times 1$$
$$= \sqrt{2}$$

www.ikedu.lk

17. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2x+9}+x-3}{\sin 2x} = \frac{2}{3}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2x+9}+x-3}{\sin 2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2x+9}-3}{\sin 2x} + \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(2x+9)-9}{\sin 2x \left\{\sqrt{2x+9}+3\right\}} + \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 2x}$$

$$= \lim_{2x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{2x+9}-3\right)} + \frac{1}{2} \cdot \lim_{2x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{(3+3)} + \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{6}$$

$$= \frac{2}{3}$$

18. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5}}{\sqrt{20+\sin^2 x}-\sqrt{20}} = 2$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5}}{\sqrt{20+\sin^2 x}-\sqrt{20}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{\frac{5+x^2-5}{20+\sin^2 x-20}\right\} \cdot \left\{\frac{\sqrt{20+\sin^2 x}+\sqrt{20}}{\sqrt{5+x^2}+\sqrt{5}}\right\}$$

$$= \left\{\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}\right\}^2 \cdot \lim_{x \to 0} \left\{\frac{\sqrt{20+\sin^2 x}+\sqrt{20}}{\sqrt{5+x^2}+\sqrt{5}}\right\}$$

$$= 1^2 \cdot \frac{\sqrt{20}+\sqrt{20}}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}$$

$$= 1^2 \cdot \frac{\sqrt{20}+\sqrt{20}}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$$

$$= 2$$

www.lkedu.lk

19. $a > 0$ எனக் கொள்வோம். $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos ax}{\sqrt{4 + x^2} - \sqrt{4 - x^2}} = 16$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக a இன பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos ax}{\sqrt{4 + x^2} - \sqrt{4 - x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 ax \left\{\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{4 - x^2}\right\}}{(1 + \cos ax)\left\{(4 + x^2) - (4 - x^2)\right\}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 ax}{2x^2} \cdot \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{4 - x^2}}{1 + \cos ax}\right]$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\lim_{ax \to 0} \frac{\sin ax}{ax^2}\right]^2 \cdot \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{4 - x^2}}{1 + \cos ax}\right]$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot 1^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{4} + \sqrt{4}}{1 + 1}\right]$$

$$= a^2$$

$$a^2 = 16$$

$$a = 4 \quad (\because a > 0)$$

20. $\lim_{x \to a} \frac{\cos \frac{\pi x}{2a}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \frac{\pi}{3}$ எனின், $a = 9$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x \to a} \frac{\cos \frac{\pi x}{2a}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sin \left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right]\left(\sqrt{a} + \sqrt{x}\right)}{(a - x)}$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right) \to 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)}{\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)} \lim_{x \to a} \left(\sqrt{a} + \sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2a} \cdot 1 \cdot \left(\sqrt{a} + \sqrt{a}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a}}$$

$$\therefore \frac{\pi}{\sqrt{a}} = \frac{\pi}{3}$$

$$a = 9$$

www.lkedu.lk

02. இரண்டாம் வகையீடு

01. $y = e^{m\tan^{-1}\left(x^2\right)}$ எனின் $\left(1 + x^4\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\left(2x^2 - m\right)\frac{dy}{dx} - 2my = 0$ எனக் காட்டுக.

$y = e^{m\tan^{-1}\left(x^2\right)}$

x குறித்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = e^{m\tan^{-1}\left(x^2\right)} \cdot m \cdot \frac{1}{1 + \left(x^2\right)^2} \cdot 2x$$

$$\left(1 + x^4\right)\frac{dy}{dx} = 2mxy$$

x குறித்து மீண்டும் வகையிட

$$\left(1 + x^4\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 4x^3 \cdot \frac{dy}{dx} = 2m\left(x \cdot \frac{dy}{dx} + y\right)$$

$$\left(1 + x^4\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\left(2x^2 - m\right)\frac{dy}{dx} - 2my = 0$$

02. $y = 2\ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$ எனின் $\frac{dy}{dx} = \frac{2\left(2x^2 - 1\right)}{x\left(x^2 - 1\right)}$ எனக் காட்டுக.

$y = 2\ln x\sqrt{x^2 - 1}$

$$y = 2\left[\ln x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 1\right)\right]$$

$$= 2\ln x + \ln\left(x^2 - 1\right)$$

x குறித்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x$$

$$= \frac{2\left(x^2 - 1\right) + 2x^2}{x\left(x^2 - 1\right)}$$

$$= \frac{2\left(2x^2 - 1\right)}{x\left(x^2 - 1\right)}$$

www.lkedu.lk

03. $y = \text{Sin}\left(m\,\text{Sin}^{-1}\,x\right)$ எனின் $\left(1 - x^2\right)\frac{d^3y}{dx^3} - 3x\frac{d^2y}{dx^2} + \left(m^2 - 1\right)\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ எனக் காட்டுக.

$y = \text{Sin}\left(m.\ \text{Sin}^{-1}x\right)$

x குறித்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = \text{Cos}\left(m\,.\,\text{Sin}^{-1}x\right).\ m\,.\ \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\sqrt{1 - x^2}\ .\ \frac{dy}{dx} = m\,\text{Cos}\left(m\,.\,\text{Sin}^{-1}x\right)$$

x குறித்து மீண்டும் வகையிட

$$\sqrt{1 - x^2}\ \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\ .\ \frac{dy}{dx} = -\,m\text{Sin}\left(m\,.\,\text{Sin}^{-1}x\right).\ m\,.\ \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2\,\text{Sin}\left(m\text{Sin}^{-1}x\right) = 0$$

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$$

x குறித்து மீண்டும் வகையிட

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^3y}{dx^3} - 2x\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + m^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^3y}{dx^3} - 3x\frac{d^2y}{dx^2} + \left(m^2 - 1\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

04. $x^2 + y^2 = 2y$ எனின் $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\left(1 - y\right)^3}$ எனக் காட்டுக.

$x^2 + y^2 = 2y$

x குறித்து வகையிட

$$2x + 2y\ .\ \frac{dy}{dx} = 2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - y}$$

x குறித்து மீண்டும் வகையிட

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(1 - y\right)\frac{dx}{dx} - x\,.\,\frac{d\left(1 - y\right)}{dx}}{\left(1 - y\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1 - y\right) - \frac{x\,d\left(1 - y\right)}{dx}}{\left(1 - y\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(1 - y\right) + \frac{x^2}{\left(1 - y\right)}}{\left(1 - y\right)^2}$$

www.lkedu.lk

$$= \frac{(1-y)^2 + x^2}{(1-y)^3}$$

$$= \frac{1-2y+y^2+x^2}{(1-y)^3}$$

$$= \frac{1}{(1-y)^3} \qquad (\because x^2+y^2=2y)$$

05. $y = \sqrt{5x^2+3}$ எனின் $y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5$ எனக் காட்டுக.

$y = \sqrt{5x^2+3}$

x குறித்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{5x^2+3}} \cdot (10x)$$

$$\sqrt{5x^2+3}\ \frac{dy}{dx} = 5x$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = 5x$$

x குறித்து மீண்டும் வகையிட

$$y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = 5$$

$$y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5$$

06. $x = \text{Sin}a$, $y = \text{Cos}\,2a$ எனின் $\frac{d^2y}{dx^2} + 4 = 0$ எனக் காட்டுக.

$x = \text{Sin}a$

x குறித்து வகையிட

$$\frac{dx}{da} = \text{Cos}a$$

$y = \text{Cos}\,2a$

x குறித்து வகையிட

$$\frac{dy}{da} = -2\,\text{Sin}\,2a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da} \cdot \frac{da}{dx} = -2\text{Sin}\,2a \cdot \frac{1}{\text{Cos}\,2a}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -4\text{Sin}a = -4x$$

x குறித்து மீண்டும் வகையிட

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \therefore \frac{d^2y}{dx^2} + 4 = 0$$

www.lkedu.lk

07. $y = \text{Cos}\left(4\text{Cos}^{-1}x\right)$ எனின் $\left(1 - x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{xdy}{dx} + 16y = 0$ எனக் காட்டுக.

$y = \text{Cos}\left(4\text{Cos}^{-1}x\right)$

x குறித்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = -\text{Sin}\left(4\text{Cos}^{-1}x\right)\left(\frac{-4}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\sqrt{1-x^2}\ \frac{dy}{dx} = 4\text{Sin}\left(4\text{Cos}^{-1}x\right)$$

x குறித்து மீண்டும் வகையிட

$$\sqrt{1-x^2}\ .\ \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}.\ \frac{dy}{dx} = 4\text{Cos}\left(4\text{Cos}^{-1}x\right)\left(\frac{-4}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = -16\text{Cos}\left(4\text{Cos}^{-1}x\right)$$

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 16y = 0$$

08. $x = \text{Sin}\,t$, $y = \text{Cos}\,2t$ எனின் $\frac{d^2y}{dx^2} + 4 = 0$ எனக் காட்டுக.

$x = \text{Sin}\,t$ $\qquad$ $y = \text{Cos}\,2t$

$\frac{dx}{dt} = \text{Cos}\,t$ $\qquad$ $\frac{dy}{dt} = -\text{Sin}\,2t\ .2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\ .\ \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{-2\text{Sin}\,2t}{\text{Cos}\,t}$$

$$= -4\text{Sin}\,t$$

x குறித்து மீண்டும் வகையிட

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(-4\text{Sin}\,t\right).\ \frac{dt}{dx}$$

$$= -4\text{Cos}\,t\ .\ \frac{1}{\text{Cos}\,t}$$

$$= -4$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2} + 4 = 0$$

www.lkedu.lk

09. $y = x^x$ எனின் $x\ \frac{d^2y}{dx^2} - x\left(1+ \ln x\right)\frac{dy}{dx} - y = 0$ எனக் காட்டுக.

$y = x^x$

$\ln y = x \ln x$

இரு புறமும் x குறித்து வகையிட

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1$

$\frac{dy}{dx} = y + y \ln x$

மீண்டும் x குறித்து வகையிட

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{1}{x} + (\ln x) \cdot \frac{dy}{dx}$

$x\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx} + y + x(\ln x)\frac{dy}{dx}$

$x\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(1+ \ln x\right)\frac{dy}{dx} - y = 0$

10. $\text{Sin}\, y = 2\,\text{Sin}\, x$ எனின் $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + 3\text{Sec}^2 y$ எனவும் $\frac{d^2y}{dx^2} = 3\text{Sec}^2 y\ \tan y$ எனவும் காட்டுக.

$\text{Cot}\, y\ \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$ என்பதை உய்த்தறிக.

$\text{Sin}\, y = 2\,\text{Sin}\, x$

இரு புறமும் x குறித்து வகையிட

$\text{Cos}\, y\ \frac{dy}{dx} = 2\,\text{Cos}\, x$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4\,\text{Cos}^2 x}{\text{Cos}^2 y} = \frac{4\left(1 - \text{Sin}^2 x\right)}{\text{Cos}^2 y}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4 - \text{Sin}^2 y}{\text{Cos}^2 y}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{3 + \text{Cos}^2 y}{\text{Cos}^2 y}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3\text{Sec}^2 y + 1$ ——————— (1)

www.lkedu.lk

மீண்டும் x குறித்து வகையிட

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right).\ \frac{d^2y}{dx^2} = 3\ .\ 2\left(\text{Sec}\ y\right)\text{Sec}\ y\ \tan y\ \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3\text{Sec}^2 y\ \tan y \quad \text{——————} \ (2)$$

$$\text{Cot}\ y\ \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1$$

$$= \text{Cot}\ y\ .\ \left\{3\text{Sec}^2 y\ \tan y\right\} - \left\{3\text{Sec}^2 y + 1\right\} + 1\ \left(\text{by (1), (2)}\right)$$

$$= 3\text{Sec}^2 y\ -\ 3\text{Sec}^2 y\ -\ 1\ + 1$$

$$= 0$$

$$\therefore \text{Cot}\ y\ \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

www.lkedu.lk

தொடலி, செவ்வன் சமன்பாடுகள்

(01) வளையி C ஆனது சமன்பாடு $y^2 = 4ax$ இனால் தரப்படுகின்றது. இங்கு $a > 0$ ஆகும். வளையி C யிற்கும் ள்ளி $P(aP^2, 2aP)$ இல் உள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு $y + Px = 2ap + ap^3$ எனக் காட்டுக.

$$y^2 = 4ax$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

தொடலியின் படித்திறன் $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(aP^2, 2aP)} = \frac{2a}{2aP} = \frac{1}{P}$

செவ்வனின் படித்திறன் $= -P$

செவ்வனின் சமன்பாடு $= \frac{y - 2ap}{x - aP^2} = -P$

$$y - 2aP = -xP + aP^3$$

$$y + Px = 2aP + aP^3$$

(02) வளையி C ஆனது சமன்பாடு $y = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ இனால் தரப்படுகின்றது. வளையி C யிற்கும் புள்ளி $(1, 5)$ இல் வரையப்படும் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இத்தொடலியானது x, y அச்சுக்களை முறையே A, B இல் இடைவெட்டுகின்றன. O என்பது உற்பத்தியாகும். முக்கோணி OAB இன் பரப்பளவைக் காண்க.

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x - 5x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x - 5x$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,5)} = 3 + 4 - 5 = 2$$

∴ புள்ளி (1, 5) தொடலியின் சமன்பாடு.

$$\frac{y - 5}{x - 1} = 2$$

$$y - 5 = 2(x - 1)$$

$$2x - y + 3 = 0$$

இது x, y அச்சுக்களை A, B இல் வெட்டுவதால் $A \equiv \left(-3/2, 0\right)$, $B \equiv (0, 3)$

ΔOAB பரப்பு $= \frac{1}{2} \times 3/2 \times 3 = 9/4$ சதுர அலகுகள்

(03) $y = t + 2$. $y = t^3 + 1$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளினால் ஒரு வளையி C தரப்படுகிறது. C யிற்கு $P(1, 0)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

$$x = t + 2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1$$

www.lkedu.lk

$$y = t^3 + 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \quad \frac{dt}{dx}$$

$$= 3t^2 \quad 1$$

$$= 3t^2$$

$$x = 1 \Rightarrow t + 2 = 1$$

$$t = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \times (-1)^{)2}$$

$$= 3$$

$\therefore$ தொடலியின் சமன்பாடு $\frac{y-0}{x-1} = 3 \quad y = 3x - 3$

(04) வளையி ஒன்றின் பரமனச் சமன்பாடு $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு $a > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ ஆகும். மேற்படி வளையியிற்கு $\theta = \propto$ இல் தொடலியின் சமன்பாடு $x\sin\propto + y\cos\propto = {}^{a}/_{2}\sin 2\propto$ ஆல் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

$$x = a\cos^3\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta$$

$$y = a\sin^3\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = -3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = {}^{dy}/_{d\theta} \quad {}^{d\theta}/_{dx} = \frac{3a\sin^2\theta\ \cos\theta}{-3a\ \cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta$$

$\theta = \propto$ இல் தொடலியின் படித்திறன் $\frac{dy}{dr} = -\tan\propto$

$\theta = \propto$ இல் தொடலியின் சமன்பாடு.

$$\frac{y - a\sin^3\propto}{x - a\cos^3\propto} = -\frac{\sin\propto}{\cos\propto}$$

$$\left(y - a\sin^3\propto\right)\cos\propto = -\sin\propto\,(x - a\cos^3\propto)$$

$$x\sin\propto + y\cos\propto = a\sin\propto\ \cos\propto\ \left[\sin^2\propto + \cos^2\propto\right]$$

$$x\sin\propto + y\cos\propto = \frac{a}{2}\sin 2\propto$$

(05) வளையி $y(1 + x^2) = 2$ இற்கு புள்ளி $P(3, {}^{1}/_{5})$ இல் உள்ள தொடலி வளையியை மறுபடியும் Q இல் சந்திக்கிறது. Q இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$$y\left(1 + x^2\right) = 2 \qquad \text{——————} \quad (1)$$

$$y = 2\left(1 + x^2\right)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(-1)\ \left(1 + x^2\right)^{-2}\ (2x) = \frac{-4x}{\left(1 + x^2\right)^2}$$

P யில் உள்ள தொடலியின் படித்திறன் $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(3,\frac{1}{5}\right)} = \frac{-4(3)}{(1+3^2)^2} = -\frac{3}{25}$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$$

$$\frac{y-1/5}{x-3} = -\frac{3}{25}$$

$$\frac{5y-1}{5(x-3)} = -\frac{3}{25}$$

$$\frac{5y-1}{x-3} = -\frac{3}{5}$$

$$25y-5 = -3x+9$$

$$3x+25y-14 = 0 \quad \text{——————} \quad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow \frac{14-3x}{25} = \frac{2}{1+x^2}$

$$(14-3x)\ (1+x^2) = 50$$

$$14-3x+14x^2-3x^3 = 50$$

$$3x^3-14x^2+3x+36 = 0$$

$$(x-3)\ (3x^2-5x-12) = 0$$

$$(x-3)\ (x-3)\ (3x+4) = 0$$

$$x = 3,\ 3,\ -4/3$$

$x = -4/3$ எனின், $y = 18/25$ $\quad \therefore \quad Q \equiv \left(-4/3,\ 18/25\right)$

06. $x^2+2xy-y^2 = \tan^{-1}x-9$ எனும் வளையின் (0, 3) இல் தொடலியினதும், செவ்வனினதும் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$x^2+2xy-y^2 = \tan^{-1}x-9$$

$$2x+2\left(x\frac{dy}{dx}+y,1\right)-2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$2(x-y)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}-2(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{1+x^2}-2(x+y)}{2(x-y)} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,3)} = \frac{1-2(0+3)}{2(-3)} = \frac{-5}{-6}$$

$$= 5/6$$

தொடலியின் சமன்பாடு

$$\frac{y-3}{x-0} = 5/6$$

$$5x-6y+18 = 0$$

www.lkedu.lk

செவ்வனின் சமன்பாடு $6x+5y+\lambda=0$

$(0,3) \Rightarrow 0+15+\lambda=0$

$\lambda=-5$

$6x+5y-15=0$

(07) கன வடிவ உலோக குற்றியொன்றின் பக்க நிளங்கள் $x\,cm$, $3x\,cm$, $h\,cm$ ஆகும். அதன் மொத்த மேற்பரப்பளவு $98cm^2$ எனில், $h=\frac{49-3x^2}{4x}$ எனக் காட்டுக. இதே நிபந்தனைக்குட்பட்டு குற்றியின் கனவளவு உயர்வாக இருக்கத்தக்கதாக அதன் பரிமாணங்களைக் காண்க.

$2(3x)(x)+2(xh)+2(3xh)=98$

$3x^2+4xh=49$

$h=\frac{49-3x^2}{4x}$

கனவளவு $V = 3x^2h$

$= 3x^2\left[\frac{49-3x^2}{4x}\right]$

$= \frac{3}{4}\left[49x-3x^3\right]$

$dv/dx=\frac{3}{4}\left[49-9x^2\right]$

$\frac{dv}{dx}=0 \Rightarrow \frac{3}{4}\left[49-9x^2\right]=0$

$x=\pm 7/3$

$x=7/3$ பொருத்தமானது. $x<0$

$7/3-\delta \Rightarrow \frac{dv}{dx}>0$

$\frac{7}{3}+\delta \Rightarrow \frac{dv}{dx}<0$

$\therefore x=7/3$ ஆக V யின் உயர்வு பெறப்படும்.

பரிமாணங்கள் $7/3\,cm$, $7cm$

(08) ஒரு வளையி $x=3t$, $y=3/t$ இனால் தரப்படுகின்றது. இங்கு t ஒரு பூச்சியமல்லாத பரமானம்.

வளையிக்குப் புள்ளி $(3t, 3/t)$ இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாடு $x+t^2y=6t$ எனக் காட்டுக. t மாறும்போது ஆள்கூற்று அச்சுக்களினாலும் இத்தொடலியினாலும் வரைபுற்ற முக்கோணப் பிரதேசத்தின் பரப்பளவு ஒரு மாறிலி என்பதை உய்த்தறிக.

www.lkedu.lk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{3}{t^2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{t^2}$$

தொடலியின் சமன்பாடு $\dfrac{y - 3/t}{x - 3t} = -1/t^2$

$$x + t^2 y = 6t$$

தொடலி x அச்சை வெட்டும்புள்ளி $A \equiv (6t, 0)$

தொடலி y அச்சை வெட்டும்புள்ளி $B \equiv \left(0, 6/t\right)$

முக்கோணி OAB யின் பரப்பு $= \dfrac{1}{2} \times 6t \times 6/t$

$= 18$ சதுர அலகு

பரப்பு t இல் தங்கவில்லை. $\therefore$ பரப்பளவு ஓர் மாறிலி ஆகும்.

(09) ஒரு வளையி C ஆனது சமன்பாடு $y = 4 - 4x + 3x^2 - x^3$ இனால் தரப்படுகின்றது. வளையி C யிற்குப் புள்ளி (1, 2) இல் வரையப்படும் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இத்தொடலி வளையி $y^2 = 4x$ இற்கு புள்ளி (1, 2) இல் வரையப்பட்ட தொடலிக்கும் செங்குத்தானதெனக் காட்டுக.

$$y = 4 - 4x + 3x^2 - x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = -4 + 6x + 3x^2 - x^3$$

(1, 2) என்னும் புள்ளியில் வளையி C யிற்கு தொடலியின் படித்திறன்

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)} = -4 + 6 \times 1 - 3 \times 1^2$$

$$= -4 + 6 - 3$$

$$= -1 = m_1$$

எனவே வளையி C இற்கு (1, 2) என்னும் புள்ளியில் தொடலியின் சமன்பாடு $\dfrac{y-2}{x-1} = -1$

$$x + y - 3 = 0$$

$$y^2 = 4x$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 4 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

$y^2 = 4x$ இற்கு (1, 2) எனும் புள்ளியின் தொடலியின் படித்திறன்.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)} = \frac{2}{2}$$

$$= 1 = m_2 \qquad m_1 \times m_2 = -1 \times 1 = -1$$

எனவே வளையி C இற்கு (1, 2) எனும் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடலியானது பரவளைவிற்கு (1, 2) என்னும் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடலிக்கு செங்குத்தாகும்.

www.lkedu.lk

(10) $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ இனால் தரப்படும் வளையி C எனக் கொள்வோம். இங்கு θ ஓர் பரமானம் வளையி C யிற்கு $\theta=\pi/4$ ஐ ஒத்த புள்ளியிலுள்ள செவ்வானது வளையியை மறுபடியும் $\theta=\propto$ ஐ ஒத்த புள்ளியில் சந்திக்கிறது. $2\sin\propto -8\cos\propto +3\sqrt{2}=0$ எனக் காட்டுக.

$\theta=\pi/4$ ஆகவுள்ள புள்ளி P என்க.

$$P\equiv\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$x=2\cos\theta$ $\quad$ $y=\sin\theta$ $\quad$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}.=\dfrac{\cos\theta}{-2\sin\theta}=-\frac{1}{2}\cot q$

$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$ $\quad$ $\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta$

P இலுள்ள தொடலியின் சாய்வு $= -\frac{1}{2}\cot p/4$ $\quad$ $\left(q=p/4\right)$

$= -\frac{1}{2}\times 1$

$= -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\therefore$ செவ்வனின் சாய்வ = 2

P இலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு $=\dfrac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}=2$

$$y-\frac{1}{\sqrt{2}}=2(x-\sqrt{2})$$

இக்கோட்டில் $(2\cos\propto,\ \sin\propto)$ கிடைப்பதால்

$$\sin\propto-\frac{1}{\sqrt{2}}=2\left(2\cos\propto-\sqrt{2}\right)$$

$$2\sin\propto-\sqrt{2}=4\left(2\cos\propto-\sqrt{2}\right)$$

$$2\sin\propto-2\cos\propto+3\sqrt{2}=0$$

(11) $y=x^2+1$ வளையி மீதுள்ள புள்ளி $P(x_0,y_0)$ இல் வளையியிற்கு வரையப்பட்ட தொடலியின் படித்திறனைக் காண்க. இதிலிருந்து உற்பத்தியில் இருந்து இவ்வளையிற்கு வரையப்படும் இரு தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$y=x^2+1$$

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)(x_0,y_0)=2x_0$$

www.ikedu.lk

தொடலியின் படித்திறன் $\frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0}$

$$\therefore \quad 2x_0 = \frac{y_0}{x_0}$$

$$y_0 = 2x_0^2 \quad \text{——————} \quad (1)$$

(x_0, y_0) ஆனது $y = x^2 + 1$ இலிருப்பதால்

$$y_0 = x_0^2 + 1 \quad \text{——————} \quad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow$ $x_0^2 = x_0^2 + 1$

$x_0^2 = 1$

$x_0 \pm 1$

$\Rightarrow$ $y_0 = 2$

$x_0 = 1$ ஆக தொடலியின் படித்திறன் $= 2 \times 1 = 2$ தொடலியின் சமன்பாடு $y = 2x$

$x_0 = -1$ ஆக தொட்லியின் படித்திறன் $= 2 \times (-1) = -2$ தொடலியின் சமன்பாடு $y = -2x$

(12) வளையி C யின் சமன்பாடு $x^3 + xy + 2y^3 = K$ ஆகும். இற்கு K ஒரு மாறிலி $\frac{dy}{dx}$ ஐ x, y இல் காண்க. C ஆனது y அச்சிற்கு சமாந்தரமான தொடலிகளைக் கொண்டிருப்பின் தொடுபுள்ளியின் y ஆள்கூறு சமன்பாடு $216y^6 + 4y^3 + K = 0$ ஐத் திருப்தி செய்ய வேண்டும் எனக் காட்டுக.

$x^3 + xy + 2y^3 = K$

$3x^2 + x\frac{dy}{dx} + y + 6y^2 \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{(3x^2 + y)}{(x + 6y^2)}$

y அச்சிற்கு சமாந்தரமான தொடலிகளைக் கொண்டிருப்பதற்கு

$\frac{dy}{dx} \to \infty$ ஆதல் வேண்டும்.

$\Rightarrow$ $x + 6y^2 = 0$

$x = -6y^2$

(1) $\Rightarrow$ $(-6y^2)^3 + y(-6y^2) + 2y^3 = K$

$216y^6 + 4y^3 + K = 0$

(13) $x = t$, $y = t^2$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளினால் தரப்படும் வளையி மீதுள்ள பரமானப் பெறுமானம் $t = 1$ ஆகவுள்ள புள்ளி P யில் வளையிற்கு வரையப்படும் செவ்வன் வளையியை மறுபடியும் Q இல் சந்திக்கின்றது. Q இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$x = t \Rightarrow dx/dt = 1$

$y = t^2 \Rightarrow dy/dt = 2t$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1} = 2$

P யில் வளையிற்கு வரையப்படும் செவ்வன் வளையியை மறுபடியும் Q இல் சந்திக்கும் என்க. $Q \equiv (T, T^2)$

செவ்வனின் படித்திறன் $= -1/2$ $\qquad P \equiv (1, 1)$

$\frac{T^2 - t^2}{T - t} = -1/2$

$\frac{T^2 - 1}{T - 1} = -1/2$

$2T^2 - 2 = -T + 1$

$2T^2 + T - 3 = 0$

$2T^2 + 3T - 2T - 3 = 0$

$T(2T + 3) - 1(2T + 3) = 0$

$T = 1, \quad -3/2$

$\therefore \ Q \equiv \left(-3/2, \frac{9}{4}\right)$

(14) $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^t - e^{-t}$ இனால் தரப்படும் வளையி C எனக் கொள்வோம். இங்கு t ஒரு மெய்ப்பெறுமானம் t யின் சார்பிற் கண்டு $t = \ell n 2$ ஐ ஒத்து C மீது உள்ள புள்ளியில் தொடலிக் கோட்டின் சமன்பாடு $5x - 3y - 8 = 0$ எனக் காட்டுக.

$x = e^t + e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t}$

$y = e^t - e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \ \frac{dt}{dx}$

$= e^t + e^{-t} \times \frac{1}{e^t - e^{-t}}$

$= \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$

$t = \ell n 2$ வகைக்குறிக்கும் புள்ளி C என்க.

$e^t = 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}}$ $\qquad C \equiv \left(2 + \frac{1}{2}, \ 2 - \frac{1}{2}\right)$

$\equiv \left(5/2, \ 3/2\right)$

www.lkedu.lk

$= \frac{5/2}{3/2} = 5/3$

$= \frac{5/2}{3/2} = 5/3$ தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{y-3/2}{x-5/2} = 5/3$

$$\frac{2y-3}{2x-5} = 5/3$$

$6y-9=10x-25$

$5x-3y-8=0$

(15) ஒரு செங்குத்துப்பரமானம் θ வின் சார்பில் xy - தளத்தில் உள்ள ஒரு வளையி C ஆனது $x=2+\cos 2\theta$, $y=4\sin\theta$ என்னும் சமன்பாடுகளினால் தரப்படுகிறது. பெறுமதி $\frac{dy}{dx}$ ஐ θ இன் சார்பில் கண்டு $\theta = \pi/4$ ஆகவுள்ள புள்ளியில் வளையி C யிற்கு வரையப்பட்டுள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு $x-\sqrt{2}y+2=0$ எனக் காட்டுக.

$x=2+\cos 2\theta$

$y=4\sin\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin 2\theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = 4\cos\theta$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = 4\cos\theta \cdot \frac{1}{-2\sin 2\theta}$

$= \frac{4\cos\theta}{-4\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{-\sin\theta}$

$\theta = \pi/4$ ஆக $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{2}$

$\therefore$ செவ்வனின் படித்திறன் $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \pi/4$ ஆகவுள்ள புள்ளி P என்க.

$P \equiv (2, 2\sqrt{2})$

P இலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு

$\frac{y-2\sqrt{2}}{x-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y-2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-2)$

$\sqrt{2}\,y-4 = x-2$

$x-\sqrt{2}\,y+2=0$

www.lkedu.lk

16. வகையீட்டைப் பயன்படுத்தி $y = \frac{x - 2}{x - 1}$ என்னும் வரைபின் உயர்வு, இழிவுப்பெறுமானங்களைக் கணிப்பிட்டு வரைபை பரும்படியாக வரைக.

$y = \frac{x - 2}{x - 1}$

$x = 0$ ஆக $y = 2$

$y = 0$ ஆக $x = 2$

$\therefore (0, 2), (2, 0)$ என்னும் புள்ளிகளினூடு வரைபு செல்லும் $y \to \pm a$ ஆக $x - 1 = 0$ ஆகும்.

$x = 1$, நிலைக்குத்து அணுகுகோடு.

$$y = \frac{x - 2}{x - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{(x - 1) \cdot d(x - 2)}{dx} - (x - 2)\frac{d}{dx}(x - 1)}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{(x - 1) - (x - 2)}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x - 1)^2}$$

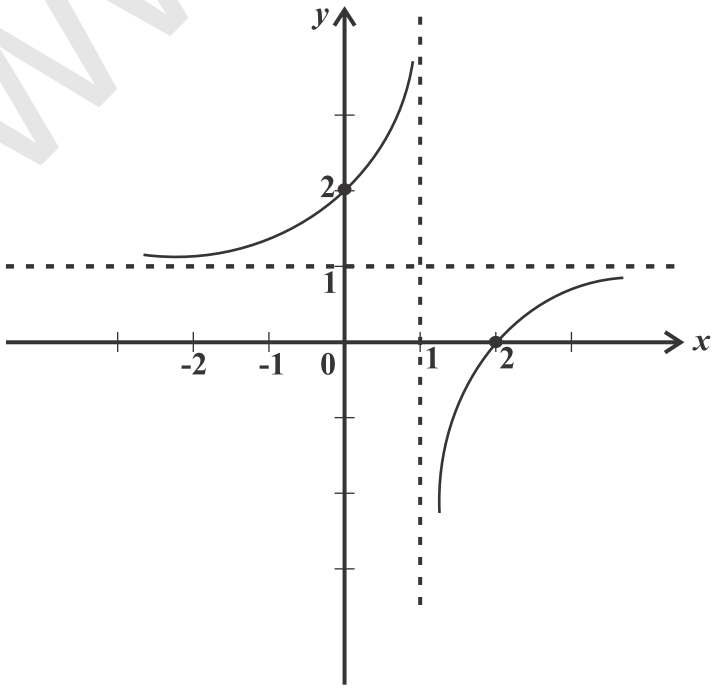
x இன் எந்தவொரு மெய்ப் பெறுமானத்துக்கும் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகாது.

$\therefore$ உயர்வு, இழிவுப் புள்ளிகள் இல்லை.

$y = 1 - \frac{1}{x - 1}$

$x \to \pm a$ ஆக $y \to 1$ ஆகும்.

$y = 1$, கிடை அணுகுகோடாகும்.



www.lkedu.lk

17. $y = \frac{x}{(x+1)^2}$ என்னும் வரைபின் திரும்பல் புள்ளிகளைக் கணிப்பீட்டு வரைபை பரும்படியாக வரைக.

$y = \frac{x}{(x+1)^2}$

$\therefore$ $x = -1$, நிலைக்குத்து அணுகுகோடாகும்.

$y = \frac{x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1/x}{1 + 2/x + 1/x^2}$

$x \to \pm \infty$ ஆக $y \to 0$ ஆகும்.

$y = 0$, கிடை அணுகுகோடாகும்.

$x = 0$ ஆக, $y = 0$

$\therefore (0,0)$ இனூடு வரைபு செல்லும்

$y = \frac{x}{(x+1)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^2 \,.\, 1 - x \,.\, 2 \,.\, (x+1)}{\left[(x+1)^2\right]^2}$

$= \frac{(x+1)[x+1-2x]}{\left[(x+1)^2\right]^2}$

$= \frac{1-x}{(x+1)^3}$

திரும்பல் புள்ளிகளில் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆக, $x = 1$

$x = 1$ ஆக, $y = \frac{1}{4}$, $\left(1, 1/4\right)$ திரும்பல் புள்ளியாகும்.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+1)^3(-1) - (1-x).3(x+1)^2}{(x+1)^6}$

$= \frac{-(x+1)^2[(x+1)+3(1-x)]}{(x+1)^6}$

$= \frac{-(x+1)^2(-2x+4)}{(x+1)^6}$

$= \frac{2x-4}{(x+1)^4}$

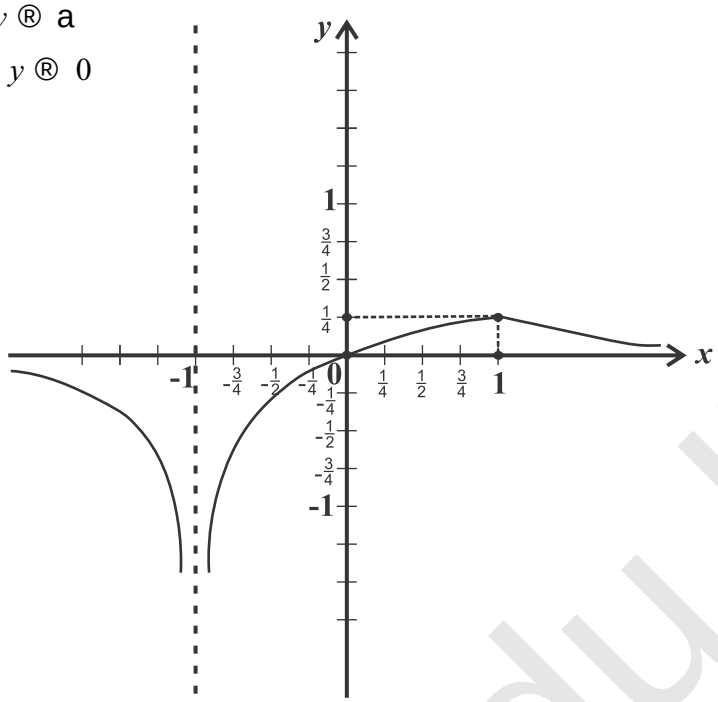
$\left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=1} = \frac{-2}{16} < 0$

$\therefore \left(1, 1/4\right)$ ஓர் உயர்வுப் புள்ளியாகும்.

www.lkedu.lk

$x \to -1$ ஆக $y \to a$

$x \to \pm a$ ஆக $y \to 0$



18. $x = t$, $y = t^3 - 3t$ என்பவற்றால் தரப்படும் வரைபின் திரும்பல் புள்ளிகளைக் காண்க. மேலும் வரைபை பரும்படியாக வரைக.

$y = t^3 - 3t$ $\qquad$ $x = t$

$\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$ $\qquad$ $\frac{dx}{dt} = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= 3t^2 - 3 \cdot 1$$

$$= 3(t - 1)(t + 1)$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ ஆக , $t = \pm 1$

$t = 1$ ஆக $\quad x = 1, \quad y = -2$

$t = -1$ ஆக $\quad x = -1, \quad y = 2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= 6t \cdot 1$$

$$= 6t$$

$t = 1$ ஆக $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6 > 0$ $\qquad$ $\therefore (1, -2)$ இழிவுப் புள்ளியாகும்.

$t = 1$ ஆக $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -6 < 0$ $\qquad$ $\therefore (-1, +2)$ உயர்வுப் புள்ளியாகும்.

www.lkedu.lk

$x = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0$ ஆக $t^3 - 3t = 0$

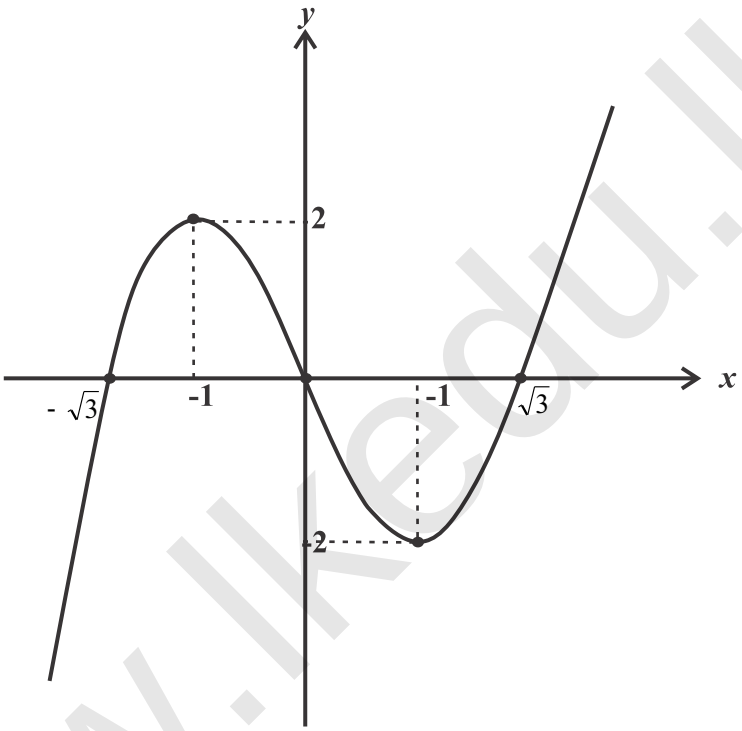
$\Rightarrow t = 0, \ -\sqrt{3}, \ \sqrt{3}$

$\therefore y = 0$ ஆக $x = 0, \ -\sqrt{3}, \ \sqrt{3}$ ஆகும்.

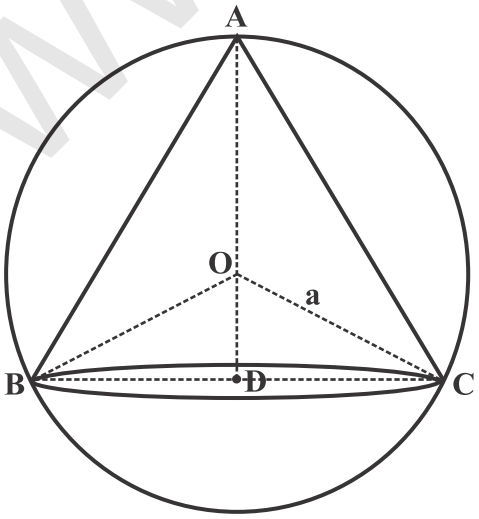
$\therefore (-\sqrt{3}, 0), (0, 0), (\sqrt{3}, 0)$ இனூடு வரைபு செல்லும்.

$x \to +a$ ஆக $t \to +a$, $y = t(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3}) \to +a$

$x \to -a$ ஆக $t \to -a$, $y \to -a$



19. தரப்பட்ட ஒரு கோளத்தினுள் உள்ளடங்கி இருக்கத்தக்கதான நேர்வட்டக் கூம்புகளுள் மிகப் பெரிய கனவளவு கொண்ட கூம்பின் கனவளவு அக்கோளத்தின் கனவளவின் $\frac{8}{27}$ பங்காகும் என நிறுவுக.



கோளத்தின் ஆரை a என்க.

OD = x என்க.

DC = $\sqrt{a^2 - x^2}$

www.lkedu.lk

கோளத்தின் கனவளவு $= \frac{4}{3}\pi a^3$

கூம்பின் கனவளவு $= \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 (a + x)$

$$(v) = \frac{\pi}{3}\left(a^2 - x^2\right)(a + x)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\pi}{3}\left[\left(a^2 - x^2\right)\frac{d}{dx}(a + x) + (a + x)\frac{d}{dx}\left(a^2 - x^2\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[a^2 - x^2 + (a + x)(-2x)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[a^2 - 2ax - 3x^2\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[(a + x)(a - 3x)\right]$$

$\frac{dv}{dx} = 0$ ஆக $(a + x)(a - x) = 0$

$$\therefore \quad x = -a \quad \text{or} \quad x = \frac{9}{3}$$

$x = -a$ பொருந்தாது

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\pi}{3}\left[(a + x).(-3) + (a - 3x).1\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[-6x - 2a\right]$$

$$\left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=\frac{9}{3}} = \frac{\pi}{3}\left[-6 \times \frac{9}{3} - 2a\right]$$

$$= \frac{-4\pi a}{3} < 0$$

$\therefore x = \frac{9}{3}$ இல் V உயர்வாகும்.

$$V_{max} = \frac{\pi}{3}\left[a^2 - \left(\frac{9}{3}\right)^2\right]\left[a + \frac{9}{3}\right]$$

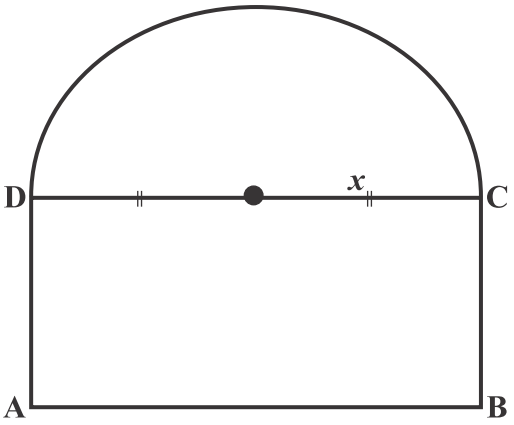
$$= \frac{32\pi a^3}{27 \times 3}$$

$$\therefore \frac{\text{கூம்பின் கனவளவு}}{\text{கோளத்தின் கனவளவு}} = \frac{\frac{32\pi a^3}{27 \times 3}}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

$$= \frac{8}{27}$$

www.lkedu.lk

20. யன்னல் ஒன்று அரைவட்டம் ஏற்றப்பட்டுள்ள செவ்வக வடிவத்தை உடையது. யன்னலின் மொத்த சுற்றளவு 20m ஆகும். யன்னலின் மொத்தப் பரப்பளவு உயர்ந்த பட்சமாக இருப்பதற்கு யன்னலின் பரிமாணங்களைக் காண்க.



நீளம் AB = $2x$ என்க.

அரைவட்டப் பரிதி DC = πx ஆகும்.

அகலம் BC $= \dfrac{20 - (\pi + 2)x}{2}$

$= 10 - \dfrac{(\pi + 2)x}{2}$

பரப்பளவு (A) $= \dfrac{1}{2}\pi x^2 + 2x \cdot \left[10 - \dfrac{(\pi + 2)x}{2}\right]$

$= \dfrac{1}{2}\pi x^2 + 20x - (\pi + 2)x^2$

$\dfrac{dA}{dx} = \pi x + 20 - 2(\pi + 2)x$

$= 20 - (\pi + 4)x$

$\dfrac{dA}{dx} = 0$ ஆக , $x = \dfrac{20}{\pi + 4}$

$\dfrac{d^2A}{dx^2} = -(\pi + 4) < 0$

$\therefore x = \dfrac{20}{\pi + 4}$ இல் A உயர்வாகும்.

$\therefore$ நீளம் $= 2x = \dfrac{40}{\pi + 4}$

அகலம் $= 10 - \left[\dfrac{\pi + 2}{2}\right]\left[\dfrac{20}{\pi + 4}\right]$

$= \dfrac{20}{\pi + 4}$

www.lkedu.lk

வகையீடு

01. $f(x) = \dfrac{x+1}{(x+2)^2}$ இன் வரைபு

$$f^1(x) = \frac{(x+2)^2 - 1 - (x+1)2(x+2)}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{(x+2) - 2(x+1)}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{-x}{(x+2)^3}$$

திரும்பற் புள்ளியில்

$f^1(x) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$x = -2$ ஓர் நிலைக்குத்து அணுகுகோடாகும்.

x இன் வீச்சு	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < \infty$
$f^1(x)$ இன் குறி	(–) $f(x)$ குறையும்	(+) $f(x)$ அதிகரிக்கும்	(–) $f(x)$ குறையும்

$x = 0$ ஓர் உயர்வு பெறப்படும்.

உயர்வுப் புள்ளி $\equiv (0, \frac{1}{4})$

$f^{11}(x) = \dfrac{2(x-1)}{(x+2)^4}$ (தரப்பட்டிருக்கும் / காண வேண்டி இருக்கும்.)

$f^{11}(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

x இன் வீச்சு	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$f^1(x)$ இன் குறி	(–) Concave down கீழ்முக குழிவு	(–) Concave down கீழ்முக குழிவு	(+) Concave up மேன்முக குழிவு

$x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{4}{9}$

$(1, \frac{2}{9})$ விபத்திப் புள்ளி (Point of inflection)

$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$ $\quad (0, \frac{1}{4})$

$y = 0 \Rightarrow x = -1$ $\quad (-1, 0)$

www.lkedu.lk

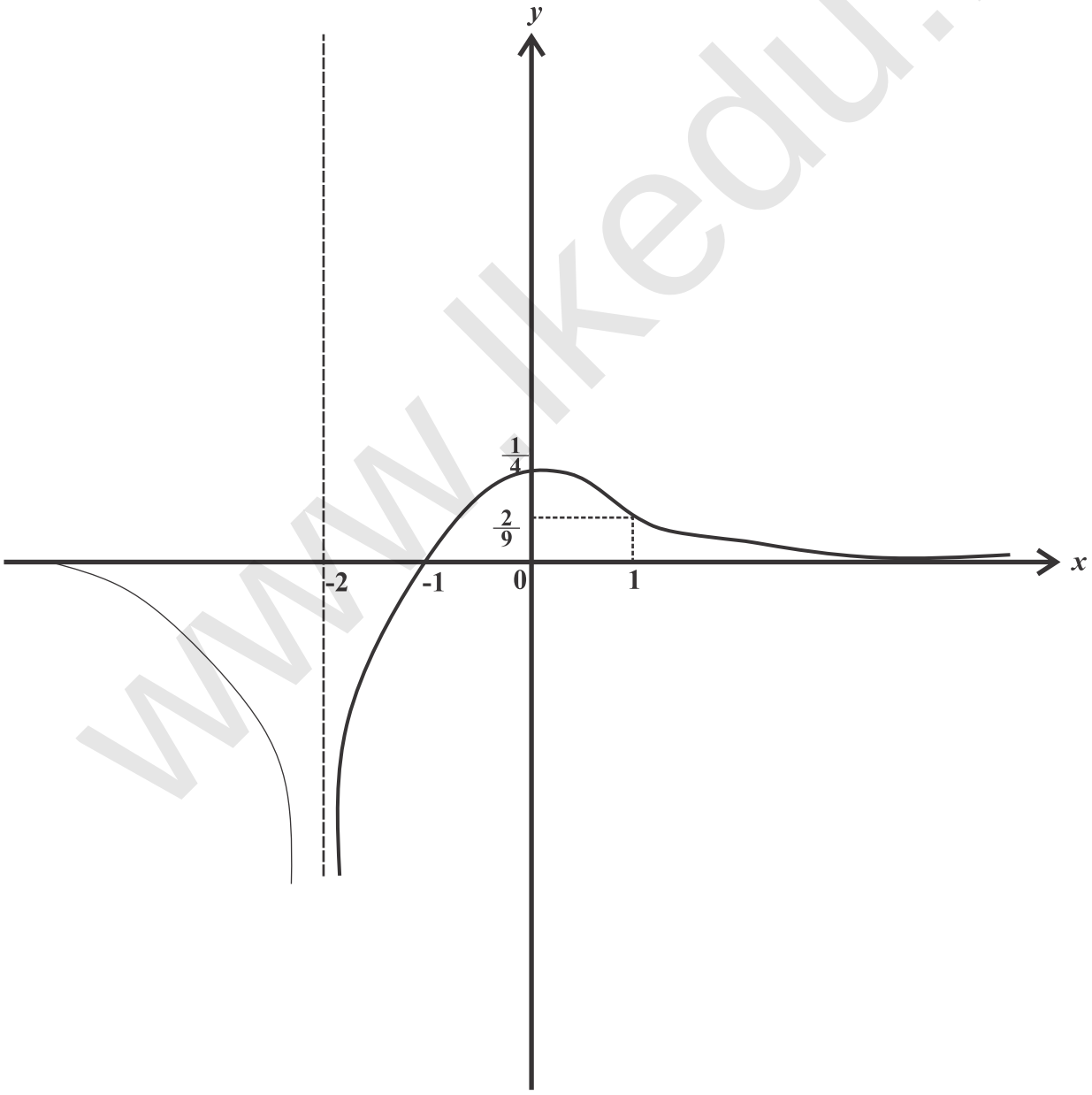
$$f(x) = \frac{x+1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^2}$$

$x \to \pm\infty \qquad y \to 0$

குறிப்பு :

$x = 1$ இல் $f^1(x) = -\frac{1}{27} < 0$



www.lkedu.lk

02. $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2}$, $x=1$ இன் வரைபு

$$f^1(x) = \frac{(x-1)^2\,4x - (2x^2+1)2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)4x - 2(2x^2+1)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{-4\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{-2(2x+1)}{(x-1)^3}$$

$$f^{11}(x) = -2\left\{\frac{(x-1)^3\,2 - (2x+1)3(x-1)^2}{(x-1)^6}\right\}$$

$$= -2\left\{\frac{2(x-1) - 3(2x+1)}{(x-1)^4}\right\}$$

$$= \frac{-2\{-4x-5\}}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{8\left(x+\frac{5}{4}\right)}{(x-1)^4}$$

திரும்பற் புள்ளியில்

$f^1(x) = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$x=1$ ஓர் நிலைக்குத்து அணுகுகோடாகும்.

x இன் வீச்சு	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	$1 < x$
$f^1(x)$ இன் குறி	(–) $f(x)$ குறையும்	(+) $f(x)$ அதிகரிக்கும்	(–) $f(x)$ குறையும்

$x = -\frac{1}{2}$ இல் இழிவு

இழிவுப் புள்ளி $\equiv \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

$f^{11}(x) = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{5}{4}$

www.lkedu.lk

x இன் வீச்சு	$x < -\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4} < x < 1$	$1 < x$
$f^1(x)$ இன் குறி	(–) கீழ்முகக் குழிவு	(–) மேன்முகக் குழிவு	(+) மேன்முகக் குழிவு

$\left(-\frac{5}{4}, \frac{22}{27}\right)$ ← விபத்துப் புள்ளி (Point of inflection)

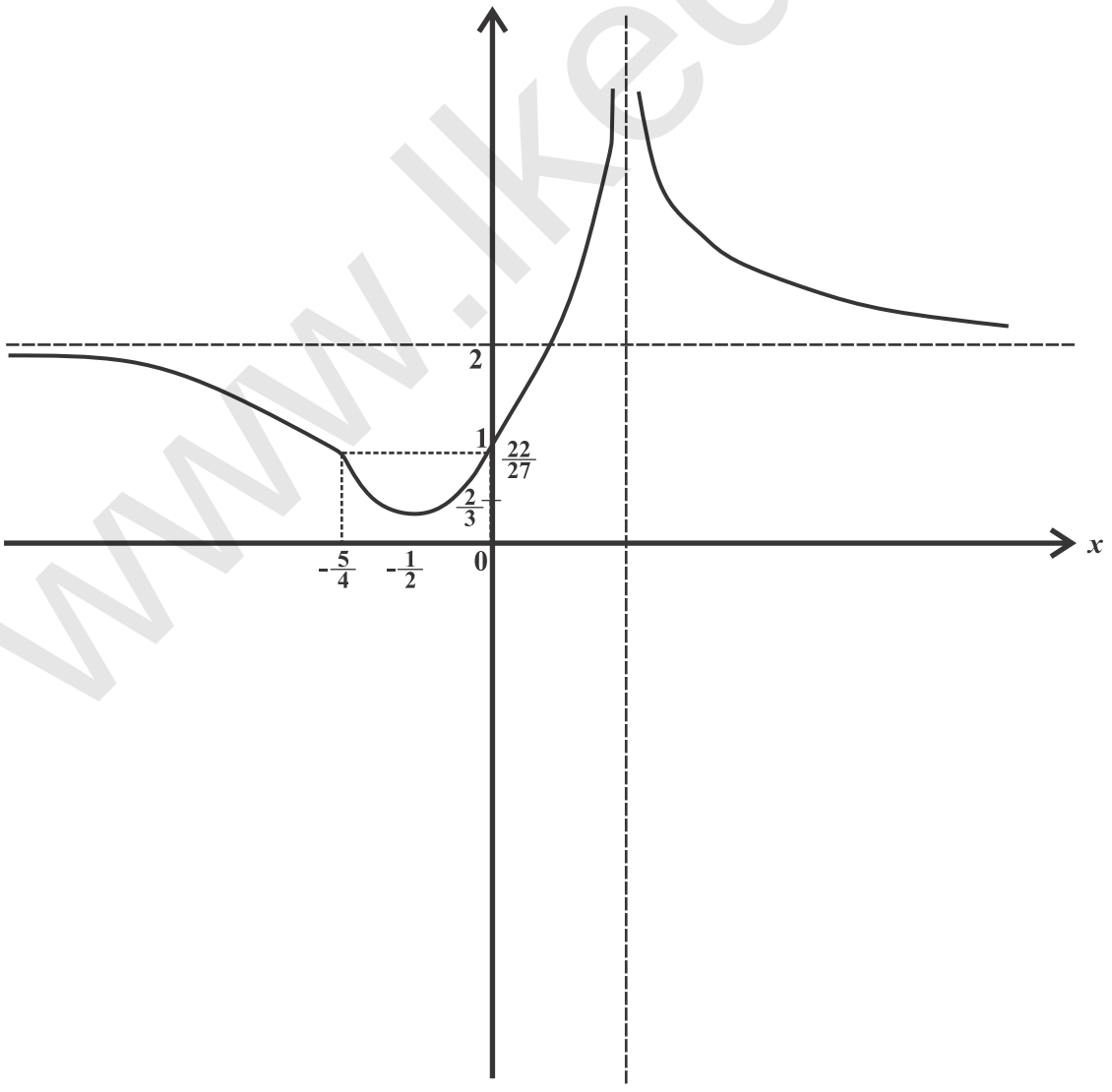
$x=0 \Rightarrow y = 1$

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2+\frac{1}{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$$

$x \to \pm\infty \qquad y \to 2$

$y=2$ ஓர் கிடை அணுகுகோடு.



www.lkedu.lk

தொகையீடு

01. $\int \{f(x)\}^n dx = \frac{\{f(x)\}^{n+1}}{n+1} + c \ , \ n \neq -1$

a) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

b) $\int (x+b)^n dx = \frac{(x+b)^{n+1}}{n+1} + c$

c) $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

02. a) $\int \frac{f^1(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$

b) $\int \frac{f^1(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

03. $\int e^{f(x)} f^1(x) dx = e^{f(x)} + c$

$\int e^x dx = e^x + c$ $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$

04. $\int Sin\, ax\, dx = -\frac{Cos\, ax}{a} + c$

$\int Cos\, ax\, dx = \frac{Sin\, ax}{a} + c$

$\int Sec^2 ax\, dx = \frac{\tan ax}{a} + c$

$\int \tan x\, dx = -ln|Cos\, x| + c = ln|Sec\, x| + c$

$\int Cot\, x\, dx = -ln|Sin\, x| + c$

$\int Sec\, x\, dx = \int \frac{Sec\, x(Sec\, x + \tan x)\, dx}{(Sec\, x + \tan x)} = ln|Sec\, x + \tan x| + c$

$\int Co\sec x\, dx = \int \frac{Co\sec x(Co\sec x - Cotx)\, dx}{(Co\sec x - Cot\, x)}$

$= ln|Cosec\, x - Cot\, x| + c = l$

www.lkedu.lk

05. $I = \int \text{Sin}\, mx\ \text{Cos}\, nx\, dx$

$$\int \text{Sin}\, 4x\ \text{Cos}\, 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\,\text{Sin}\, 4x\ \text{Cos}\, 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \{\text{Sin}\, 6x + \text{Sin}\, 2x\}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\text{Cos}\, 6x}{6} - \frac{\text{Cos}\, 2x}{2} \right] + c$$

06. $I = \int \text{Sin}^{m} x\, dx \qquad m = 1 \text{ ® } 6$

$$I = \int \text{Sin}^{5} x\, dx = -\int \text{Sin}^{4} x\, d(\text{Cos}\, x)$$

$$= -\int \left(1 - \text{Cos}^2 x\right)^2 d(\text{Cos}\, x)$$

$$= -\int \left(1 - 2\text{Cos}^2 x + \text{Cos}^4 x\right) d(\text{Cos}\, x)$$

$$= -\left[\text{Cos}\, x - 2\frac{\text{Cos}^3 x}{3} + \frac{\text{Cos}^5 x}{5} \right] + c$$

07. $I = \int \text{Sin}^{m} x\ \text{Cos}^{n} x\, dx$

$$I = \int \text{Sin}^3 x\ \text{Cos}^2 x\, dx$$

$$= -\int \text{Sin}^2 x\ \text{Cos}^2 x\, d(\text{Cos}\, x)$$

$$= -\int \left(1 - \text{Cos}^2 x\right) \text{Cos}^2 x\, d(\text{Cos}\, x)$$

$$= -\int \left(\text{Cos}^4 x - \text{Cos}^2 x\right) d(\text{Cos}\, x)$$

$$= \frac{\text{Cos}^5 x}{5} - \frac{\text{Cos}^3 x}{3} + c$$

$$I = \int \text{Sin}^2 x\ \text{Cos}^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (2\,\text{Sin}\, x\ \text{Cos}\, x)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \text{Sin}^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \text{Cos}\, 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{\text{Sin}\, 4x}{4} \right] + c$$

08. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \text{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad x^2$ இன் குணகம் < 0

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + (bx)^2}\, dx = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + (bx + c)^2}\, dx = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left[\frac{bx + c}{a}\right] + k$$

www.lkedu.lk

09. $I = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\, dx$

$D > 0 \Rightarrow I = \ln\left| \quad \right| + k$

$D < 0 \Rightarrow I = \tan^{-1}\left(\quad \right) + k$

$I = \int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c}\, dx$

$D > 0 \Rightarrow I = \ln\left| \quad \right| + k$

$D < 0 \Rightarrow px + q = l\, \frac{d}{dx}\left(ax^2 + bx + c\right) + m$

$I = \ln\left| \quad \right| + \tan^{-1}\left(\quad \right) + k$

$I = \int \frac{px + q}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$

$px + q = l\, \frac{d}{dx}\left(ax^2 + bx + c\right) + m$

10. $I = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$

x^2 இன் குணகம் < 0

$I = \text{Sin}^{-1}\left(\quad \right) + k$

x^2 இன் குணகம் < 0

$I = 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + \text{Sin}^{-1}\left(\quad \right) + k$

11. $I = \int \frac{a\,\text{Cos}\,x + b\,\text{Sin}\,x}{c\,\text{Cos}\,x + d\,\text{Sin}\,x}\, dx$

$a\,\text{Cos}\,x + b\,\text{Sin}\,x = l\, \frac{d}{dx}\{c\,\text{Cos}\,x + d\,\text{Sin}\,x\} + m\{c\,\text{Cos}\,x + d\,\text{Sin}\,x\}$

$I = l\ \ln\left|c\,\text{Cos}\,x + d\,\text{Sin}\,x\right| + mx + k$

k - தொகையீட்டு மாறிலி

12. $I = \int \frac{1}{a\,\text{Cos}\,x + b\,\text{Sin}\,x + c}\, dx \quad \Rightarrow t = \tan\frac{x}{2}$

$I = \int \frac{1}{a\,\text{Cos}2x + b\,\text{Sin}\,2x + c}\, dx$

$t = \tan x$

$\frac{dt}{dx} = \left(1 + t^2\right)$

$\text{Cos}\,2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

$= \frac{1 - t^2}{1 + t^2 x}$

$\text{Sin}\,2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

$= \frac{2t}{1 + t^2}$

www.lkedu.lk

13. $\int \frac{1}{a\,\cos^2 x + b\,\sin^2 x + c}\,dx$

$\int \frac{\sec^2 x}{a + b\tan^2 x + c\sec^2 x}\,dx$

$\int \frac{\left(1+\tan^2 x\right)}{(a+c)+(b+c)\tan^2 x}\,dx$ பிரதியீடு $t = \tan x$

14. **வரையறுத்த தொகையீடு**

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (a < c < b)$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a \{f(x) + f(-x)\}dx$$

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

15. **பகுதிகளாகத் தொகையிடல்.**

$$\frac{d}{dx}(uw) = u\frac{dw}{dx} + w\frac{du}{dx}$$

$$u\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx}(uw) - w\frac{du}{dx}$$

$$\int u\frac{dw}{dx}\,dx = \int \frac{d}{dx}(uw)\,dx - \int w\frac{du}{dx}\,.\,dx$$

$$\int u\frac{dw}{dx}\,dx = uw - \int w\frac{du}{dx}\,dx$$

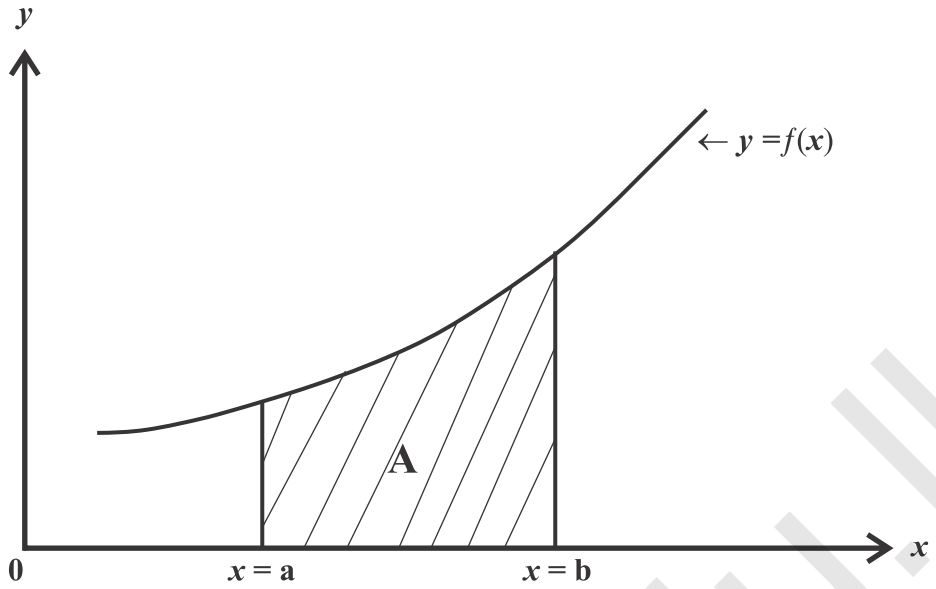
$v = \frac{dw}{dx}$ $\quad \int dw = \int v\,dx$

$$w = \int v\,dx$$

$$\therefore \int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left(\int v\,dx\right)\frac{du}{dx}\,.\,dx$$

www.lkedu.lk

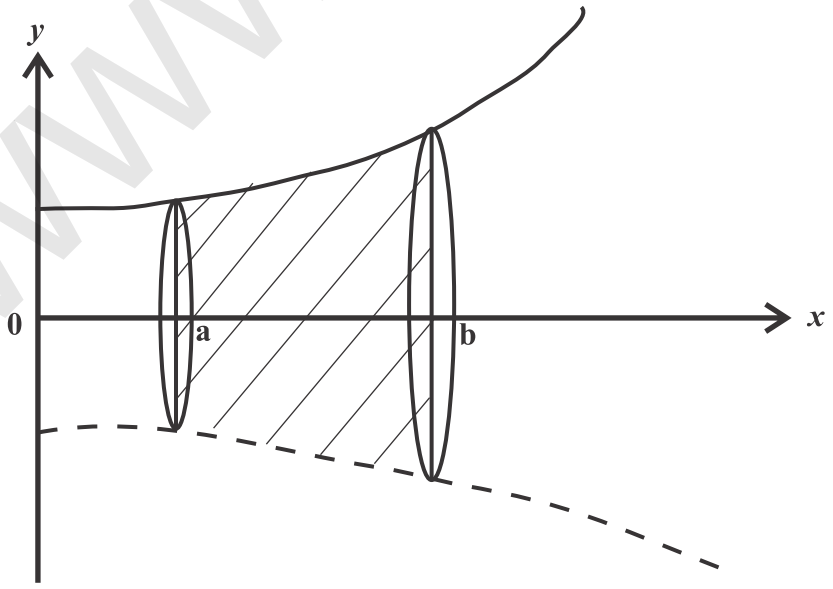
தொகையீட்டின் பிரயோகம் (பரப்பளவு)



$$A = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

தொகையீட்டின் பிரயோகம் (கனவளவு)

$y = f(x)$ என்னும் வளையியினாலும் $x = a, x = b$ என்னும் நேர்கோடுகளாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பளவை x அச்சுப்பற்றி 4 செங்கோணங்களின் ஊடாகச் சுழற்றும் போது பெறப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\pi \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$ ஆகும்.



$$v = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$

www.ikedu.lk

பகுதி – I

01. தொகையிடுக. $\int \text{Sin}^4 2x \, . \, dx$

$$\int \text{Sin}^4 2x \, dx = \int \left(\frac{1}{2}(1 - \text{Cos } 4x)\right)^2 dx$$

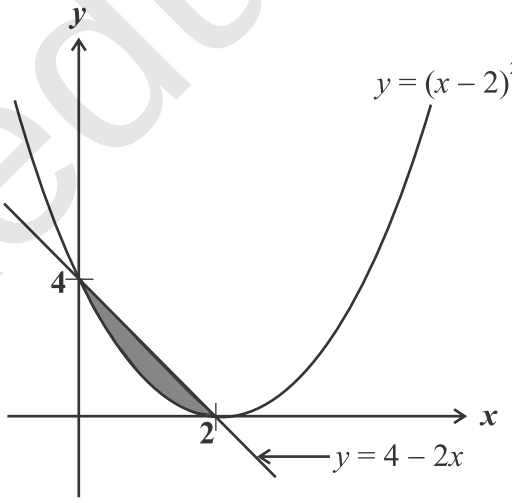
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\text{Cos } 4x + \text{Cos}^2 4x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\text{Cos } 4x)\, dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 + \text{Cos } 8x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - 2.\frac{\text{Sin } 4x}{4}\right) + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{8}\text{Sin } 8x\right) + c$$

$$= \frac{3x}{8} - \frac{1}{8}\text{Sin } 4x + \frac{1}{64}\text{Sin } 8x + c \qquad (c \text{ - மாறிலி})$$

02. $y = (x - 2)^2$, $y = 4 - 2x$ என்னும் வரைபுகளால் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பளவைக் காண்க.



பரப்பளவு $= \int_0^2 (4 - 2x)\, dx - \int_0^2 (x - 2)^2 \, dx$

$$= \left[4x - \frac{2x^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^2$$

$$= (8 - 4) - \left(0 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= 4 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{4}{3} \text{ சதுர அலகுகள்}$$

03. தொகையிடுக. $\int \frac{dx}{x^3 - 4x}$

$$I = \int \frac{dx}{x^3 - 4x} = \int \frac{dx}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)}\right) dx$$

$A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{8}$, $C = \frac{1}{8}$ ஆக

$$I = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{1}{8}}{x-2} + \frac{\frac{1}{8}}{(x+2)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\ln|x - 2| + \frac{1}{8}|x + 2| \frac{1}{4}\ln x + c$$

$$= \frac{1}{8}\ln|x^2 - 4| - \frac{1}{4}\ln|x| + c$$

www.ikedu.lk

04. தகுந்த பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$I = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

$x = t^2$ என்க.

x	t
0	0
1	1

$\therefore \quad dx = 2t\,.dt$

$I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} 2t dt$

$= 2\int_0^1 \frac{t^3}{1+t} dt$

$= 2\int_0^1 \left[\left(t^2 - t + 1\right) - \frac{1}{1+t}\right] dt$

$= 2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln\left(1+t\right)\right]_0^1$

$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2\right)$

$= \frac{5}{3} - 2\ln 2$

05. தொகையிடுக. $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$

பிரதியீடு $x = t^2$

$I = \int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$

$dx = 2tdt$

$I = \int 2t\,.\tan^{-1}t\,.\,dt$

$= 2\left(\frac{t^2}{2}\right)\tan^{-1}t - 2\int \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{t^2}{2}\,.\,dt$

$= t^2\,.\,\tan^{-1}t - \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$

$= t^2\,.\,\tan^{-1}t - t + \tan^{-1}t + c$

$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \tan^{-1}\sqrt{x} + c$

$= \left(1+x\right)\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + c$

www.lkedu.lk

06. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ ஐ காண்க

$$I=\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=\int\sqrt{\frac{(1-x)(1-x)}{(1+x)(1-x)}}\,dx$$

$$=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=\text{Sin}^{-1}x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$1-x^2=t$ என்க.

$\therefore\ -2x\,dx=dt$

$$x\,dx=-\frac{dt}{2}$$

$$I=\text{Sin}^{-1}x+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$=\text{Sin}^{-1}x+\frac{1}{2}.2.t^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\text{Sin}^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+c$$

07. $\int e^x\ \text{Sin}\,2x\,dx$ இனைக் காண்க.

$$I=\int e^x\ \text{Sin}\,2x\,dx$$

$$=-e^x.\frac{\text{Cos}\,2x}{2}-\int\left(-\frac{\text{Cos}\,2x}{2}\right).e^x\,dx$$

$$=-e^x.\frac{\text{Cos}\,2x}{2}+\frac{1}{2}\left[e^x.\frac{\text{Sin}\,2x}{2}-\int\frac{\text{Sin}\,2x}{2}.e^x\,dx\right]$$

$$=-e^x.\frac{\text{Cos}\,2x}{2}+\frac{1}{2}e^x.\frac{\text{Sin}\,2x}{2}-\frac{1}{4}\int e^x\,\text{Sin}\,2x\,dx$$

$$=\frac{e^x}{2}\left(\frac{\text{Sin}\,2x}{2}-\text{Cos}\,2x\right)-\frac{1}{4}I$$

$$\frac{5I}{4}=\frac{e^x}{2}\left(\frac{\text{Sin}\,2x}{2}-\text{Cos}\,2x\right)$$

$$I=\frac{2e^x}{5}\left(\frac{\text{Sin}\,2x}{2}-\text{Cos}\,2x\right)+c$$

www.lkedu.lk

08. பிரதியீட்டின் மூலம் $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2}\, dx$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$I = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2}\, dx$

$x = \sqrt{2}\ \sin\theta$ என்க

$\therefore\ dx = \sqrt{2}\ \cos\theta\ .\ d\theta$

x	θ
0	0
$\sqrt{2}$	$\pi/2$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2\sin^2\theta}\ .\ \sqrt{2}\cos\theta\ .\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\ .\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta\ .\ d\theta$$

$$= \left[\theta\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\left[\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

09. $y = x^2$, $y^2 = x$ ஆகிய வரைபுகளினால் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பளவைக் காண்க.

$y^2 = x^4 \quad = x$

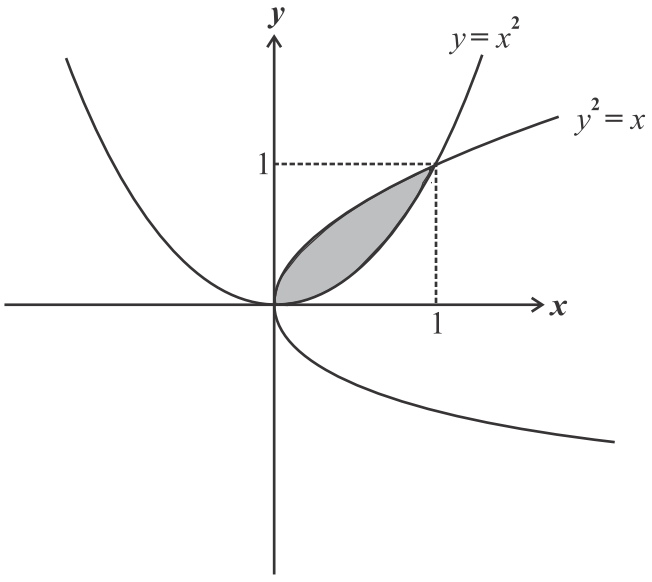
$\therefore\ x^4 - x \quad = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$\therefore\ x = 0, 1$

$x = 0,\ y = 0$

$x = 1,\ y = 1$



உள்ளடக்கப்படும் பரப்பளவு S

$$S = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2\ .\ dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$ சதுர அலகுகள்

www.lkedu.lk

10. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{5 + 4\,\text{Sin}\,x}\,dx$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$t = \tan\frac{x}{2}$ என்க.

$\therefore \quad dt = \frac{1}{2}\,\text{Sec}^2\,\frac{x}{2}.\,dx$

$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$, $\text{Sin}\,x = \frac{2\tan x/2}{1 + \tan^2 x/2} = \frac{2t}{1 + t^2}$,

x	t
0	0
$\pi/2$	1

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{5 + 4\,\text{Sin}\,x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{5 + \left(\frac{8t}{1+t^2}\right)} \left(\frac{2}{1+t^2}\right).\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5t^2 + 8t + 5}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{5\left[t^2 + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2]}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} \left[\tan^{-1} \frac{t + \frac{4}{5}}{3/5}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} \left[\tan^{-1} \frac{3t + 4}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} \left[\tan^{-1} 3 - \tan^{-1} \frac{4}{3}\right]$$

www.ikedu.lk

13. $\int x.\ln\left(1+x^2\right)dx$ ஐ காண்க.

$$I = \int x.\ln\left(1+x^2\right)dx$$

$$= \ln\left(1+x^2\right).\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}.\left(\frac{1}{1+x^2}\right).2x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \int\frac{x^3}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \int x\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c$$

c – மாறிலி

14. $y = \cos x$, $y = \sin 2x$ ஆகிய வளையிகளினால் $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ என்னும் ஆயிடையில் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பளவு $\frac{1}{2}$ சதுர அலகு எனக் காட்டுக.

$y = \sin 2x = \cos x$

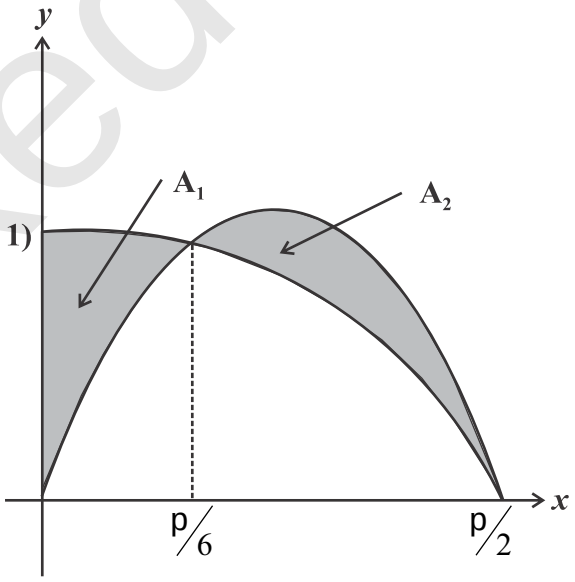
$\Rightarrow \sin 2x - \cos x = 0$

$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$

$\cos x = 0$ அல்லது $\sin x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ அல்லது $x = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ஆயிடை)



உள்ளடக்கப்படும் பரப்பளவு $= A_1 + A_2$

$$S = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^{\pi/6}\left(\cos x - \sin 2x\right)dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\sin 2x - \cos x\right)dx$$

$$= \left[\sin x + \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/6} + \left[\frac{\cos 2x}{2} - \sin x\right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \left(0 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \text{ சதுர அலகுகள்}$$

www.ikedu.lk

11. $\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx$ ஐ காண்க.

$$I=\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}}+\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}\right)dx$$

$$=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}\,dx$$

$t=\sin x-\cos x$ என பிரதியிட

$$dt=(\cos x+\sin x)\,dx$$

$$t^2=1-2\sin x\cos x$$

$$\therefore \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$$

$$\therefore I=\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}}$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\sqrt{2}\sin^{-1}t+c$$

$$=\sqrt{2}\sin^{-1}(\sin x-\cos x)+c$$

12. $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$ ஐ காண்க.

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

$$\therefore x^3+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$$

x^3 இன் குணகம் , $A+B=1$

$x=0$ ஆக , $A=-1 \Rightarrow B=2$

$x=1$ ஆக , $D=2$

x இன் குணகம், $3A+B-C+D=0 \Rightarrow C=1$

$$\therefore \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$$

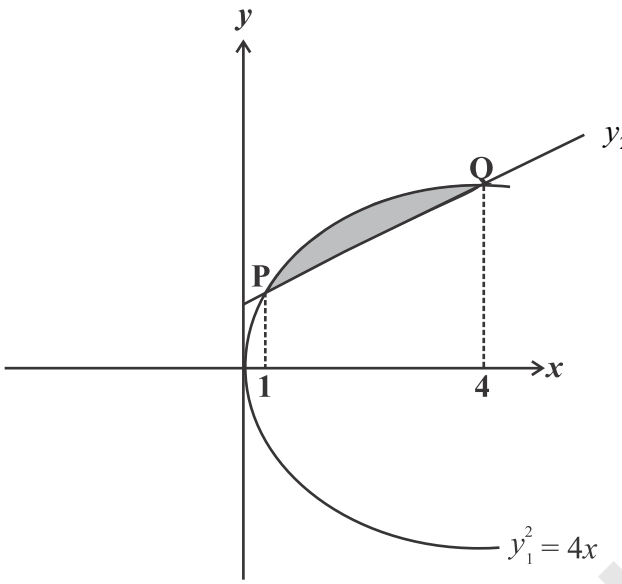
$$\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx+\int\frac{2}{x-1}\,dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx+\int\frac{2}{(x-1)^3}\,dx$$

$$=-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{(x-1)^2}+c$$

c – மாறிலி

www.lkedu.lk

15. $y^2 = 4x,\ 3y - 2x - 4 = 0$ என்னும் வரைபுகளால் உள்ளடக்கப்படும் பிரதேசம் x அச்சுப்பற்றி 4 செங்கோணங்களினூடு சுழற்றுவதால் உருவாகும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.



$y^2 = 6y - 8$

$(y - 4)(y - 2) = 0$

$y = 4$ ஆக $x = 4$

$y = 2$ ஆக $x = 1$

$P \equiv (1, 2),\ Q \equiv (4, 4)$

உருவாகும் திண்ம கனவளவு V

$$V = \pi \int_1^4 y_1^2\,dx - \pi \int_1^4 y_2^2\,dx$$

$$= \pi \left[\int_1^4 4x\,dx - \int_1^4 \left(\frac{2x + 4}{3} \right)^2 dx \right]$$

$$= \pi \left[\left[2x^2 \right]_1^4 - \frac{1}{9} \left[\frac{4x^3}{3} + 8x^2 + 16x \right]_1^4 \right]$$

$$= \pi \left[30 - \frac{1}{9} \left[\frac{256}{3} + 128 + 64 - \left(\frac{4}{3} + 8 + 16 \right) \right] \right]$$

$= \pi \{30 - 28\} = 2\pi$ கன அலகுகள்

www.ikedu.lk

பகுதி – II

01. a) $\int_2^3 \frac{3x-2}{x^3-x^2}\,dx = \ell n\,\frac{4}{3} + \frac{1}{3}$ எனக் காட்டுக.

b) $\sin x = \lambda(\sin x + \cos x) + \mu(\cos x - \sin x)$ ஆகுமாறு λ, μ என்னும் மாறிலிகளைக் காண்க.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$ ஐக் காண்க.

மேலும் $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$ ஐக் காண்க.

a) $$I = \int_2^3 \frac{3x-2}{x^3-x^2}\,dx = \int_2^3 \frac{3x-2}{x^2(x-1)}\,dx$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{2-x}{x^2} + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \int_2^3 \frac{2-x}{x^2}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \int_2^3 \frac{2}{x^2}\,dx - \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \left[-\frac{2}{x}\right]_2^3 - \left[\ln|x|\right]_2^3 + \left[\ln|x-1|\right]_2^3$$

$$= 1 - \frac{3}{2} - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln 2$$

$$= \frac{1}{3} + \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

b) $\sin x = \lambda(\sin x + \cos x) + \mu(\cos x - \sin x)$

$$\left.\begin{aligned} \lambda - \mu &= 1 \\ \lambda + \mu &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2},\ \mu = -\frac{1}{2}$$

$$I_1 = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + c$$

www.ikedu.lk

$$I_2 = \int \frac{\text{Cos}\, x}{\text{Sin}\, x + \text{Cos}\, x}\, dx$$

$$I_1 + I_2 = \int \frac{(\text{Sin}\, x + \text{Cos}\, x)}{\text{Sin}\, x + \text{Cos}\, x}\, dx = \int dx = x$$

$$I_2 = x - I_1$$

$$= x - \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln \left| \text{Sin}\, x + \text{Cos}\, x \right| \right]$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \text{Sin}\, x + \text{Cos}\, x \right| + C_2$$

02. a) $\int_1^5 \frac{x+2}{(x+1)(x+3)}\, dx$ இன் பெறுமானம் காண்க.

b) தகுந்த பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_{-1}^{2} x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx$ இன் பெறுமானம் காண்க.

c) பகுதிகளாக தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \,\text{Sin}\, 3x\, dx$ ஐ காண்க.

a) $$I = \int_1^5 \frac{x+2}{(x+1)(x+3)}\, dx = \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{2x+4}{x^2 + 4x + 3}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln \left| (x+1)(x+3) \right| \right]_1^5$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 48 - \ln 8)$$

$$= \frac{1}{2} \ln 6$$

b) $$I = \int_{-1}^{2} x^2 \sqrt{(x^3 + 1)}\, dx$$

$x^3 = t$ என பிரதியிட

$3x^2\, dx = dt$

$$I = \int_{-1}^{2} x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx = \int_{-1}^{8} \frac{\sqrt{t+1}}{3}\, dt$$

$$= \frac{1}{3} \left| \frac{(t+1)^{3/2}}{3/2} \right|_{-1}^{8}$$

$$= \frac{2}{9} (27 - 0)$$

$$= 6$$

www.ikedu.lk

c) $\int_0^{\frac{p}{3}} x \operatorname{Sin} 3x \, dx = \int_0^{\frac{p}{3}} x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{Cos} 3x}{3}\right) dx$

$= -\left[\frac{x \operatorname{Cos} 3x}{3}\right]_0^{\frac{p}{3}} - \int_0^{\frac{p}{3}} \frac{\operatorname{Cos} 3x}{3} \cdot dx$

$= -\left[\frac{x \operatorname{Cos} 3x}{3}\right]_{\frac{p}{3}}^{0} + \left[\frac{\operatorname{Sin} 3x}{9}\right]_0^{\frac{p}{3}}$

$= p/9 - 0$

$= p/9$

03. a) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)\,dx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{x\,dx}{\operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} x} = \frac{p}{4} \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{\operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} x} = \frac{p}{2\sqrt{2}} \ell n\left(\sqrt{2} + 1\right)$ எனக் காட்டுக.

b) $\int \frac{x\,dx}{x^4 + x^2 + 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Cot}^{-1}\left(\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$ எனக் காட்டுக.

a) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)\,dx$

$a - x = t$ என்க.

$\Rightarrow dx = -dt$, $x = 0$ ஆக $t = a$

$x = a$ ஆக $t = 0$

$R.H.S = \int_0^a f(a - x)\,dx$

$= \int_0^a f(t)(-dt)$

$= \int_0^a f(t).\,dt$

$= \int_0^a f(x).\,dx$

www.ikedu.lk

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos x + \sin x}\,dx - \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\cos x + \sin x}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x + \sin x}\,dx - I$$

$$2I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x}\,dx$$

$$I = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left[\ln \left| \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left[\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln \sqrt{2}+1$$

b) $I = \int \frac{x\,dx}{x^4 + x^2 + 1}$

$x^2 = t$ என்க.

$2x\,dx = dt$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + t + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \theta + c$$

www.ikedu.lk

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$ என்க.

$$\tan\theta = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Cot}\left(\pi/2 - \theta\right) = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

$$\pi/2 - \theta = \text{Cot}^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\theta = \pi/2 - \text{Cot}^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\pi/2 - \text{Cot}^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right] + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{Cot}^{-1}\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Cot}^{-1}\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}\right) + c_1$$

04. a) தக்க பிரிதியீடுகள் மூலம் பின்வருவனவற்றை தொகையிடுக.

i) $\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$ ii) $\int\frac{dx}{12+13\,\text{Cos}\,x}$

b) $I = \int e^{ax}\,\text{Cos}\,bx\,dx$ எனவும் $J = \int e^{ax}\,\text{Sin}\,bx$ எனக் கொள்க.

இங்கு a, b பூச்சியமல்லாத மெய்யெண்கள் ஆகும்.

i) $bI + aJ = e^{ax}\,\text{Sin}\,bx$ ii) $aI - bJ = e^{ax}\,\text{Cos}\,bx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து I, J ஐ காண்க.

a) i) $\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx = I$

$x = \text{Sin}^2\theta$ என்க

$\therefore dx = 2\,\text{Sin}\,\theta\,\text{Cos}\,\theta\,.\,d\theta$

$$I = \int\sqrt{\frac{1-\text{Sin}\,\theta}{1+\text{Sin}\,\theta}}\,.\,2\text{Sin}\,\theta\,\text{Cos}\,\theta\,.\,d\theta$$

$$= \int\frac{2\text{Sin}\,\theta\,\text{Cos}^2\theta}{1+\text{Sin}\,\theta}\,d\theta$$

$$= \int 2\,\text{Sin}\,\theta\,(1-\text{Sin}\,\theta)\,d\theta$$

$$= 2\int\text{Sin}\,\theta\,.\,d\theta - \int(1-\text{Cos}\,2\theta)\,d\theta$$

$$= 2\int\text{Sin}\,\theta\,.\,d\theta - \int d\theta + \int\text{Cos}\,2\theta\,.\,d\theta$$

$$= -2\text{Cos}\,\theta - \theta + \frac{\text{Sin}\,2\theta}{2} + c$$

www.lkedu.lk

ii) $I = \int \frac{dx}{12 + 13\cos x}$, $I = \int \frac{2dt/(1+t^2)}{12 + 13\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}$

$\tan\frac{x}{2} = t$ என்க.

$dt = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx$

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$= \int \frac{2dt}{25 - t^2} = \frac{1}{5}\int\left[\frac{1}{5-t} + \frac{1}{5+t}\right]dt$

$= \frac{1}{5}\left[-\ln|5-t| + \ln|5+t|\right] + c$

$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5+t}{5-t}\right| + c$

$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5+\tan\frac{x}{2}}{5-\tan\frac{x}{2}}\right| + c$

b) i) $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$, $J = \int e^{ax}\sin bx$

$bI = b\int e^{ax}\cos bx\,.\,dx$

$= b\left[e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \int\frac{\sin bx}{b}\,.\,ae^{ax}\,dx\right]$

$= e^{ax}\sin bx - a\int e^{ax}\sin bx\,dx$

$bI = e^{ax}\sin bx - aJ$

$\therefore bI + aJ = e^{ax}\sin bx$ ——— (1)

ii) $aI = a\int e^{ax}\cos bx\,.\,dx$

$= a\left[\cos bx\,.\,\frac{e^{ax}}{a} - \int\frac{e^{ax}}{a}(-b\sin bx)\,dx\right]$

$= e^{ax}\cos bx + b\int e^{ax}\sin bx\,dx$

$= e^{ax}\cos bx + bJ$

$\therefore aI - bJ = e^{ax}\cos bx$ ——— (2)

(1) × b + (2) × a $\therefore (b^2 + a^2)I = e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)$

$I = \frac{e^{ax}}{b^2 + a^2}(b\sin bx + a\cos bx)$

(1) × a - (2) × b $\therefore (a^2 + b^2)J = e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$

$J = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$

www.lkedu.lk

05. a) பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

i) $\int_0^{\pi/4} \tan^6 \theta \, . \, d\theta$ ii) $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)^{1/2}\ (2-x)^{3/2}}$

b) பகுதிகளாகத் தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி $\int_1^e x^{3/2} \ln x \, dx$ இன் பெறுமானம் காண்க.

c) பெறுமானம் காண்க.

i) $\int_0^1 x^2 e^{2x+3} \, dx$ ii) $\int_1^8 \frac{dx}{1 + x^{1/3}}$

a) .i) $I = \int_0^{\pi/4} \tan^6 \theta \, . \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \tan^4 \theta \, . \left(\sec^2 \theta - 1\right) d\theta$

$$= \int_0^{\pi/4} \tan^4 \theta \, . \sec^2 \theta \, d\theta - \int_0^{\pi/4} \tan^4 \theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \tan^4 \theta \, . \, d(\tan \theta) - \int_0^{\pi/4} \tan^4 \theta \, d\theta$$

$$= \left[\frac{\tan^5 \theta}{5}\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan^4 \theta \, . \, d\theta$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan^4 \theta \, . \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \tan^2 \theta \left(\sec^2 \theta - 1\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \tan^2 \theta \, . \, d\tan \theta - \int_0^{\pi/4} \left(\sec^2 \theta - 1\right) d\theta$$

$$= \left[\frac{\tan^3 \theta}{3}\right]_0^{\pi/4} - \left[\tan \theta\right]_0^{\pi/4} + \left[\theta\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + \pi/4$$

$$I = \left[\frac{\tan^5 \theta}{5}\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan^4 \theta \, . \, d\theta$$

$$= \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3} - 1 + \pi/4\right)$$

$$I = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$$

www.ikeou.lk

ii) $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)^{1/2}\ (2-x)^{3/2}} = \int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)^{1/2}\ (2-x)}$

x	θ
0	0
1	$\pi/6$

$x = 2\sin\theta$ என பிரதியிடுக.

$dx = 2\cos\theta\ .\ d\theta$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)^{1/2}\ (2-x)} = \int_0^{\pi/6} \frac{2\cos\theta}{(4-4\sin^2\theta)^{1/2}\ (2-2\sin\theta)}\ .\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \frac{1}{(1-\sin\theta)}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \frac{1+\sin\theta\ dx}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \sec^2\theta\,d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \sec\theta\ .\ \tan\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tan\theta\right]_0^{\pi/6} + \frac{1}{2}\ \sec\theta\ \Big|_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right]$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$$

b) $I = \int_1^e x^{3/2}\ln x\,dx = \left[\ln x\ \frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\ .\ \frac{x^{5/2}}{5/2}\,dx$

$$= \frac{2}{5}\left[x^{5/2}\ \ln x\right]_1^e - \frac{2}{5}\int_1^e x^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{5}\left[e^{5/2}\ln e - 0\right] - \frac{2}{5}\left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_1^e$$

$$= \frac{2}{5}e^{5/2} - \frac{4}{25}e^{5/2} + \frac{4}{25}$$

$$= \frac{6}{25}e^{5/2} + \frac{4}{25}$$

www.ikedu.lk

c) i) $I = \int_0^1 x^2 . e^{2x+3}\, dx$

$= \left[x^2 . \frac{e^{2x+3}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \left(\frac{e^{2x+3}}{2} \right) dx$

$= \frac{1}{2} e^5 - \left[x . \frac{e^{2x+3}}{2} \right]_0^1 - \int \frac{e^{2x+3}}{2}\, dx \Big\}$

$= \frac{1}{2} e^5 - \frac{e^5}{2} + \left[\frac{e^{2x+3}}{4} \right]_0^1$

$= \frac{1}{4} \left(e^5 - e^3 \right)$

$= \frac{1}{4} e^3 \left(e^2 - 1 \right)$

ii) $I = \int_1^8 \frac{dx}{1 + x^{1/3}}$, $u = x^{1/3}$

$\therefore dx = 3u^2 du$

x	y
1	1
8	2

$I = \int_1^2 \frac{3u^2 du}{1+u} = \int_1^2 \left[3u - 3 + \frac{3}{1+u} \right] du$

$= \int_1^2 3u\, du - 3 \int_1^2 du + 3 \int_1^2 \frac{1}{1+u} du$

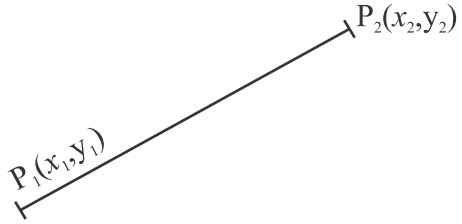
$= \left[\frac{3u^2}{2} \right]_1^2 - \left[3u \right]_1^2 + \left[3 \ln |1+u| \right]_1^2$

$= \frac{3}{2} + 3 \ln \left(\frac{3}{2} \right)$

www.ikedu.lk

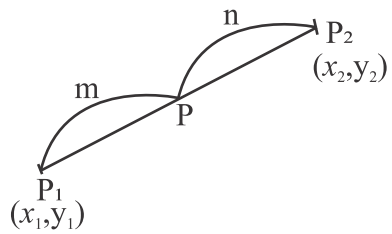
நேர்கோடு

* $P_1(x_1 , y_1)$, $P_2(x_2 , y_2)$ எனும் இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நீளம்.



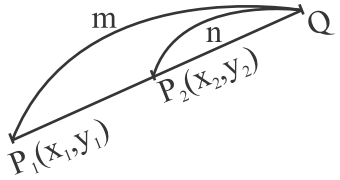
$$P_1P_2 = \sqrt{(c_1 - c_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

* $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ எனும் இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை m:n எனும் விகிதத்தில்
(a) உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆள்கூறு.



$$P\left(\frac{mc_2 + nc_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

(b) வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆள்கூறு.



$$Q\left(\frac{mc_2 - nc_1}{m - n}, \frac{my_2 - ny_1}{m - n}\right)$$

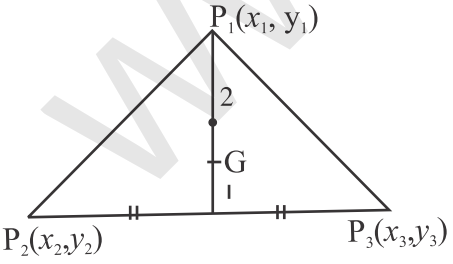
Note:

* நடுப்புள்ளி



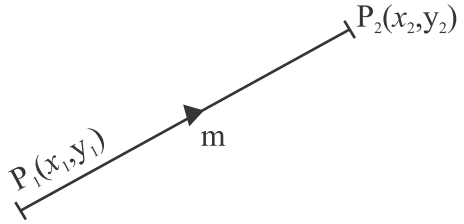
$$P\left(\frac{c_1 + c_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

* மையப்போலி



$$G\left(\frac{c_1 + c_2 + c_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

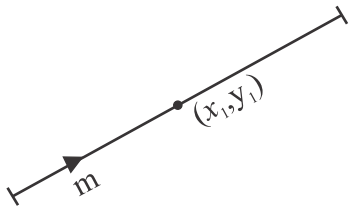
* $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் படித்திறன் m ஆனது



$$m = \frac{y_1 - y_2}{c_1 - c_2}$$

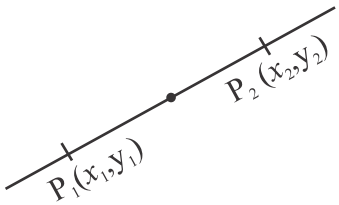
www.lkedu.lk

* படித்திறன் m ஆகவும் புள்ளி (x_1, y_1) இனூடு செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு



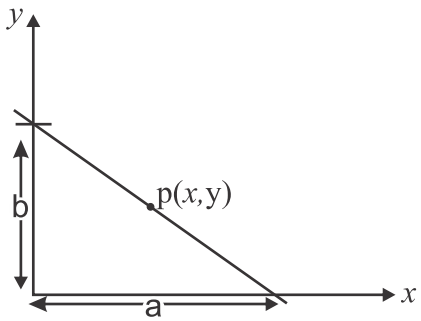
$$y - y_1 = m(c - c_1)$$

* $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு



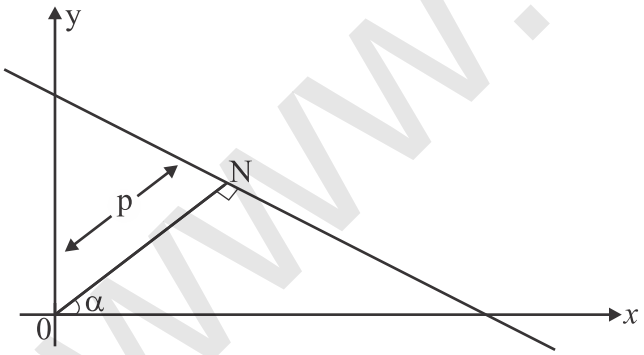
$$y - y_1 = \frac{(y_1 - y_2)(c - c_1)}{(c_1 - c_2)}$$

* x அச்சு, y அச்சு இல்முறையே a, b வெட்டுத் துண்டுகளை உடைய நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

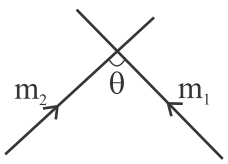


$$\frac{c}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

* உற்பத்தியில் இருந்து நேர்கோட்டிற்கான செங்குத்து தூரம் P ஆகவும் இச் செங்குத்து x அச்சுடன் நேர்த்திசையில் α கோணம் அமைக்குமாறும் உள்ள கோட்டின் சனமன்பாடு $\text{Cos}\alpha + y\text{Sin}\alpha = P$



* m_1, m_2 படித்திறறன்களையுடைய கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் θ ஆனது

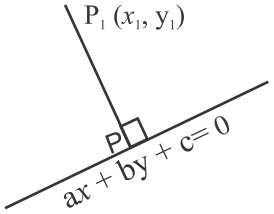


$$\tan q = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

* இக்கோடுகள் சமாந்தரம் எனின் $m_1 = m_2$
* இக்கோடுகள் செங்குத்து எனின் $m_1 . m_2 = -1$

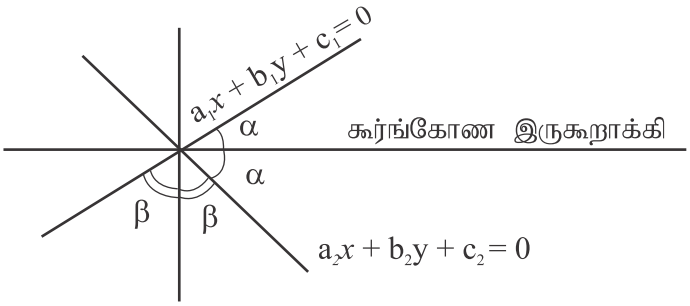
www.lkedu.lk

* $P_1(x_1, y_1)$ எனும் புள்ளியினூடு $ax + by + c = 0$ எனும் கோட்டிற்கான செங்குத்து நீளம்



$$P_1P = \frac{|ac_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

* $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ எனும் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் கோண இரு கூறாக்கியின் சமன்பாடு.



விரிகோண இருகூறாக்கி

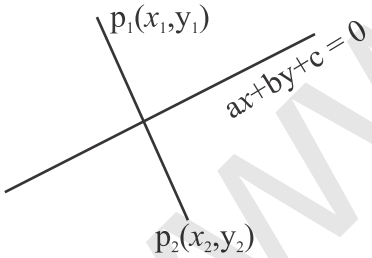
$$\frac{a_1c + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{(a_2c + b_2y + c_2)}{\sqrt{a_2^2} + b_2^2}$$

(+), (-) இனை கருதும் போது இரு இருகூறாக்கிகளும் பெறப்படும்.

$\tan\alpha < 1$ எனின் கூர்ங்கோண இருகூறாக்கி

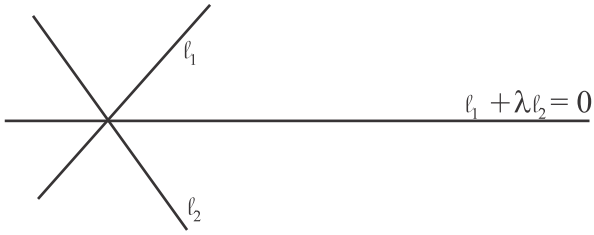
$\tan\alpha > 1$ எனின் விரிகோண இருகூறாக்கி பெறப்படும்

* $ax+by+c=0$ எனும் கோடு சார்பாக $p_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ இன் நிலை



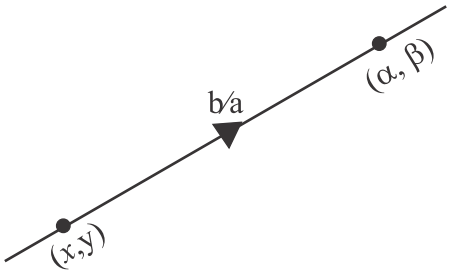
$(ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) > 0$
எனின் ஒரே பக்கத்திலும்
$(ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) < 0$
எனின் எதிர் பக்கத்திலும் அமையும்

* $\ell_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $\ell_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$, எனும் கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியினூடு செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda\ (a_2x + b_2y + c_2) = 0$



www.ikedu.lk

* $(\propto_1 \beta)$ எனும் புள்ளியினூடு செல்லும் b/a படித்திறனை உடைய கோட்டின் மீதான பரமாணச் சமன்பாடு



$$\frac{y-b}{x-a}=\frac{b}{a}$$

$$\frac{(c-a)}{a}=\frac{y-b}{b}=t \text{ என்க}$$

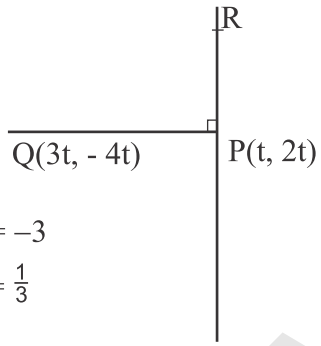
t = பரமாணம்

$$x=a+at$$
$$y=b+bt$$ பரமாணச் சமன்பாடு

$[(a+at),(b+bt]$ பரமாண ஆள்கூறு

பகுதி - I

01. P(t,2t), Q(3t, - 4t) எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. மேலும் P இனூடனான PQ இற்குச் செங்குத்தாக அமையும் கோடு x-3y+5t=0 எனக் காட்டுக.



$M_{PQ} = -3$

$M_{PR} = \frac{1}{3}$

PR $\Rightarrow y - 2t = \frac{1}{3}(x-t)$

$x-3y+5t = 0$

$$PQ \Rightarrow y-2t=\frac{2t+4t}{t-3t}(c-t)$$

$$y-2t=\frac{3t}{-t}(c-t)$$

$$(y-2t)=-3(c-t)$$

$$3c+y-5t=0$$

02. (2,3), (-1,2) ஆகிய புள்ளிகள் $2x - 3y + 7 = 0$ எனும் கோட்டின் எதிர்ப்பக்கங்களில் இருக்கின்றன எனக் காட்டுக.

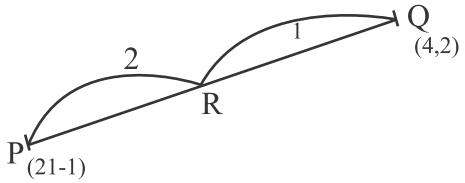
$(ax_1+by_1+c)\,(ax_2+by_2+c)$

$= (2 \times 2 - 3 \times 3 + 7) \quad (2 \times -1 - 3 \times 2 + 7)$

$= -2 < 0$

$2x-3y+7= 0$ எனும் கோட்டில் (2,3), (-1,2) ஆகிய புள்ளிகள் எதிர்ப்பக்கத்தில் உள்ளன.

03. P (2,-1), Q(4,2) எனின் PQ யை 2:1 எனும் விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆள்கூறு யாது?

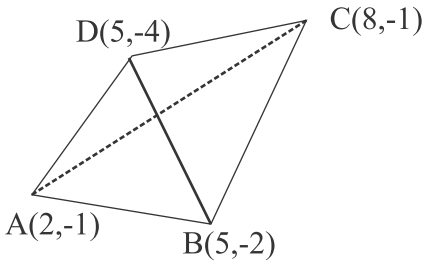


$$R=\left(\frac{2\times 4+1\times 2}{3},\frac{2\times -1+2\times 2}{3}\right)$$

$$R=\left(\frac{10}{3},1\right)$$

www.lkedu.lk

04. A (2,-1), B(5,2), C(8,-1), D(5,-4) எனும் புள்ளிகள் ஓர் சதுரத்தின் உச்சிகளில் அமையும் எனக் காட்டுக.



$AC = \sqrt{(2-8)^2+(-1+1)^2} = 6$

$BD = \sqrt{(5-5)^2+(2+4)^2} = 6$

$AC = BD$

ABCD ஓர் சதுரம்

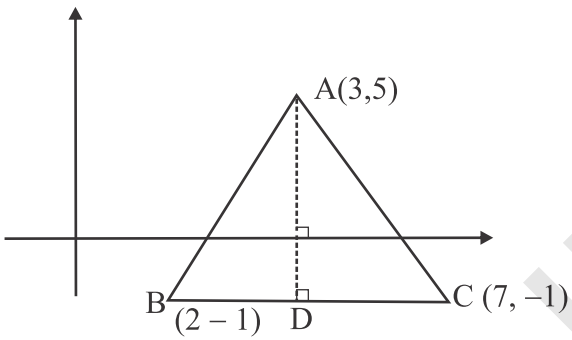
$AB = \sqrt{(2-5)^2+(-1-2)^2} = 3\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(5-8)^2+(2+1)^2} = 3\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{(8-5)^2+(-1+4)^2} = 3\sqrt{2}$

$DA = \sqrt{(5-2)^2+(-4+1)^2} = 3\sqrt{2}$

05. A ≡ (3,5), B ≡ (2,-1), C ≡ (7,-1) எனின் Δ ABC இன் பரப்பைக் காண்க.



Δ ABC பரப்பு $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 6$

$= 15$ சதுர அலகு

$BC = 7-2$

$= 5$

$AD = 5+1$

$= 6$

06. (1,2) எனும் புள்ளியினூடு செல்லும் நேர்கோடு x அச்சின் நேர்த்திசையுடன் 60° கோணத்தை ஆக்கினால் அதன் சமன்பாடு யாது?

$m = \tan 60$

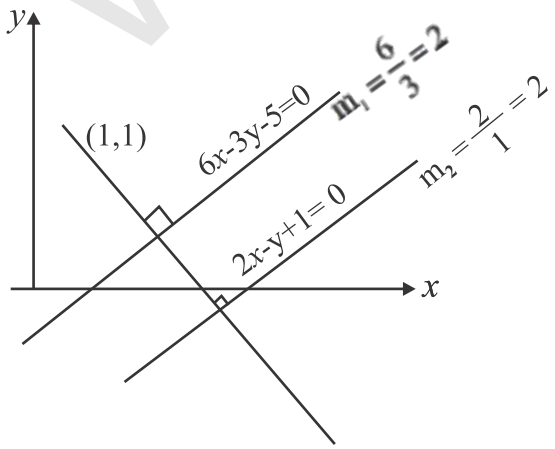
$m = \sqrt{3}$

கோட்டின் சமன்பாடு

$y-2 = \sqrt{3}(c-1)$

$\sqrt{3}c - y + (2-\sqrt{3}) = 0$

07. $6x-3y-5=0$, $2x-y+1=0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரம் எனக் காட்டி இவற்றிற்கு செங்குத்தாக (1,1) இனூடு செல்லும் கோட்டைக் காண்க.



$m_1=2$, $m_2=2$

இவை சமாந்தரம்

செங்குத்தாக செல்லும் கோடு

$y-1 = -\frac{1}{2}(c-1)$

$2y-2, = -c+1$

$c+2y-3 = 0$

www.ikedu.lk

08. $x+2y-5=0$, $2x+ay=3$ எனும் இருகோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரம் எனின் a இன் பெறுமானம் யாது?

$m_1 = -\frac{1}{2}$ $\quad m_2 = -\frac{2}{a}$

சமாந்தரம் எனின்

$m_1 = m_2$

$-\frac{1}{2} = -\frac{2}{a}$

$a = 4$

09. $2x - y+5 = 0$, $x - 3y-1 = 0$ என்ற நேர்கோடுகளுக்கிடையிலான கோண இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$\frac{2x - y+5}{\sqrt{5}} = \pm\left(\frac{x - 3y - 1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\sqrt{2}(2x - y+5) = \pm(x - 3y - 1)$$

$$(+) \Rightarrow (2\sqrt{2} - 1)x + (3 - \sqrt{2})y + (5\sqrt{2}+1) = 0$$

$$(-) \Rightarrow (2\sqrt{2}+1)x - (\sqrt{2}+3)y + (5\sqrt{2} - 1) = 0$$

10. $x+3y-1=0$, $2x+y-3=0$ எனும் நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியினூடும் (2,1) என்ற புள்ளியினூடும் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு?

$\ell_1 \Rightarrow x+3y-1=0$

$\ell_2 \Rightarrow 2x+y-3=0$

$$\ell_1 + \lambda\,\ell_2 = 0$$

$$x+3y-1+\lambda(2x+y-3) = 0$$

$$(2,1) \Rightarrow 2+3\times 1-1+\lambda(2\times 2+1-3) = 0$$

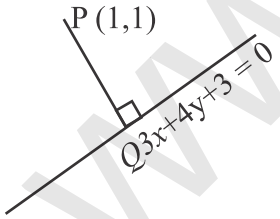
$$\lambda = -2$$

$$x+3y-1-2(2x+y-3) = 0$$

$$3x - y - 5 = 0$$

கோட்டின் சமன்பாடு $\Rightarrow 3x - y - 5 = 0$

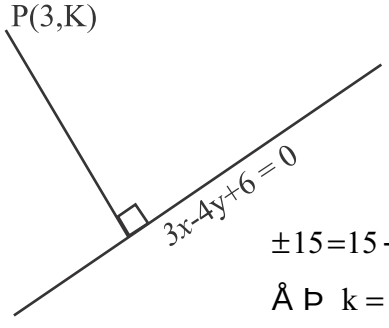
11. $3x+4y+3=0$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு (1,1) என்ற புள்ளியில் இருந்தான செங்குத்து நீளம் யாது?



$$PQ \circ \frac{|3\times 1+4\times 1+3|}{\sqrt{9+16}}$$

$$PQ = \frac{10}{5} = 2 \text{ அலகு}$$

12. (3,K) என்ற புள்ளியிலிருந்து $3x - 4y+6 = 0$ என்ற கோட்டிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் நீளம் 3 அலகு எனின் K இனைக் காண்க.



$$3 = \frac{|3\times 3 - 4\times k+6|}{\sqrt{9+16}}$$

$$3 = \left|\frac{15 - 4k}{5}\right|$$

$\pm 15 = 15 - 4k$

$\text{Å} \Rightarrow k = 0$ or $\quad \odot \Rightarrow k = \frac{15}{2}$

www.lkedu.lk

13. நேர்கோடொன்று x,y அச்சுக்களை முறையே (3,0), (0,2) எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$\frac{c}{a}+\frac{y}{b}=1$

$\frac{c}{3}+\frac{y}{2}=1$

$2c+3y=6$

$2c+3y-6=0$

14. (2,-3) எனும் புள்ளிக்கூடாக சென்று $4x - y+7=0$ எனும் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக்காண்க.

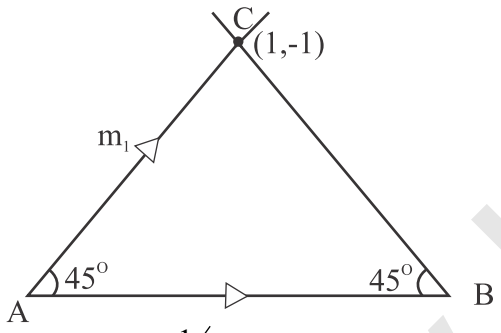
$4c - y+7=0$ // $\Rightarrow 4c - y+c=0$ என்க.

$(2,-3) \Rightarrow 4 \times 2 - (-3)+c=0$

$c=-11$

கோட்டின் சமன்பாடு $\Rightarrow 4x-y-11=0$

15. $x +2y-2 = 0$ எனும் நேர் கோட்டுடன் 45^o ஐ ஆக்கிக் கொண்டு (1,-1) எனும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் இரு நேர்கோடுகளினது சமன்பாடுகளைக் காண்க.



$m_2=-\frac{1}{2}$

$c+2y-2=0$

$\tan 45=\left|\frac{m_1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+m_1\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|$

$1=\pm\frac{2m_1+1}{2-m_1}$

$\therefore \Rightarrow m_1=\frac{1}{3}$

$\ominus \Rightarrow m_1=-3$

இரு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$m_1=\frac{1}{3}$

$y-(-1)=\frac{1}{3}(c-1)$

$c-3y-4=0$

$m=-3$

$y-(-1)=-3(c-1)$

$3c+y-2=0$

www.lkedu.lk

16. A (k, 2 -k) , B(-k+1, 2k), C(-4-k, 6-2k) ஆகிய புள்ளிகள் நேர்கோடொன்றில் இருப்பின் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

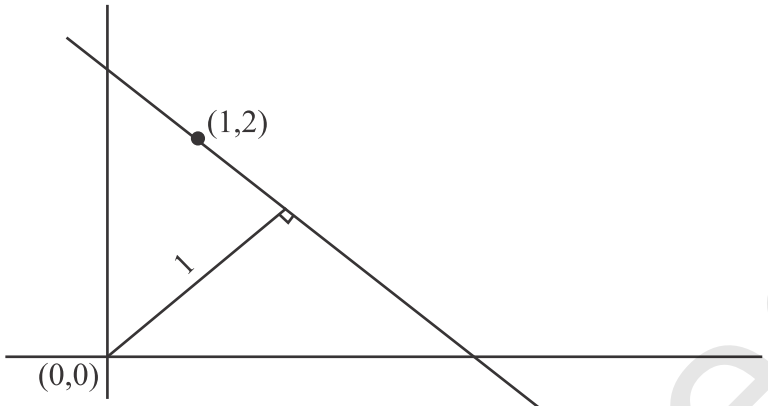
$M_{AB} = M_{BC}$

$$\frac{3k - 2}{-2k+1} = \frac{4k - 6}{5}$$

$$8k^2 - k - 4 = 0$$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{129}}{16}$$

17. (1,2) என்ற புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதும் உற்பத்தியில் இருந்து 1 அலகு தூரத்தில் உள்ள சமன்பாட்டைக் காண்க.



$$Y - 2 = m(c - 1)$$

$$mc - y + 2 - m = 0$$

$$\frac{|m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$m^2 + 1 = (m - 2)^2$$

$$-4m = -3$$

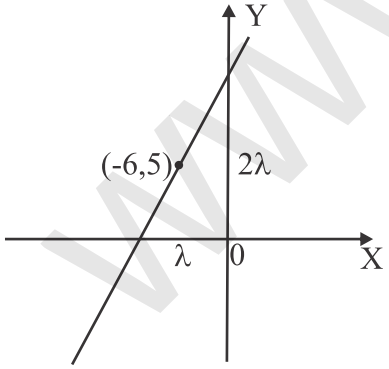
$$m = \frac{3}{4}$$

கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - 2 = \frac{3}{4}(c - 1)$$

$$3c - 4y + 5 = 0$$

18. OX அச்சுமீது ஆக்கும் வெட்டுத்துண்டின் இரு மடங்கு அளவான வெட்டுத்துண்டை OY அச்சுமீது ஆக்குவதோடு (- 6,5) என்ற புள்ளிக்கூடாகவும் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



$$\frac{c}{l} + \frac{y}{2l} = 1$$

(- 6,5) இனூடு செல்வதால்

$$\frac{-6}{l} + \frac{5}{2l} = 1$$

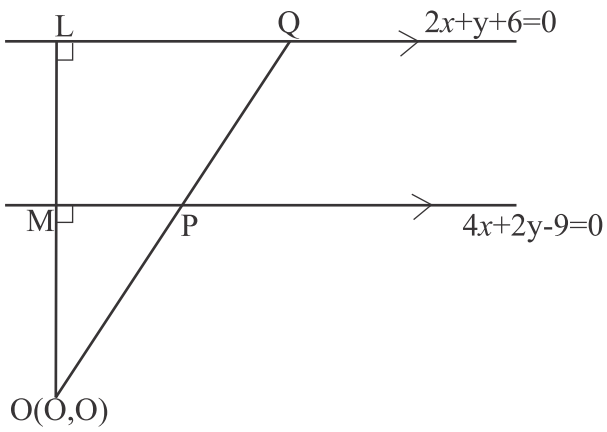
$$l = -\frac{7}{2}$$

கோட்டின் சமன்பாடு

$$2c + y + 7 = 0$$

www.lkedu.lk

19. உற்பத்தி O விலிருந்து வரையப்படும் நேர்கோடானது $4x+2y-9=0$, $2x+y+6=0$ ஆகிய நேர்கோடுகளை முறையே P,Q இல் வெட்டுகிறது. OP: OQ = 3:4 எனக் காட்டுக.



$$OL = \frac{|6|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$OM = \frac{|9|}{\sqrt{16+4}} = \frac{9}{2\sqrt{5}}$$

$LQ \,//\, MP$

$$\frac{OM}{OL} = \frac{OP}{OQ}$$

$$\frac{9}{2\sqrt{5}} \times \frac{6}{} = \frac{OP}{OQ}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{OP}{OQ}$$

$$OP : OQ = 3 : 4$$

20. $P\equiv(a^2,2a)$, $Q\equiv(b^2,2b)$ ஆகிய புள்ளிகளினூடு செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு $a \neq b$ இது (1,0) எனும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுமாயின் $ab = -1$ எனக் காட்டுக.

$$y - 2a = \frac{2a - 2b}{a^2 - b^2}(c - a^2)$$

$$y - 2a = \frac{2}{a - b}(c - a^2)$$

$$(1,0) \Rightarrow 0 - 2a = \frac{2}{a+b}(1 - a^2)$$

$$\Rightarrow ab = -1$$

01. a) $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$, ஆகிய நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கூர்ங்கோணம் α *எனின்*

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1, m_2}\right|$$ எனக் காட்டுக.

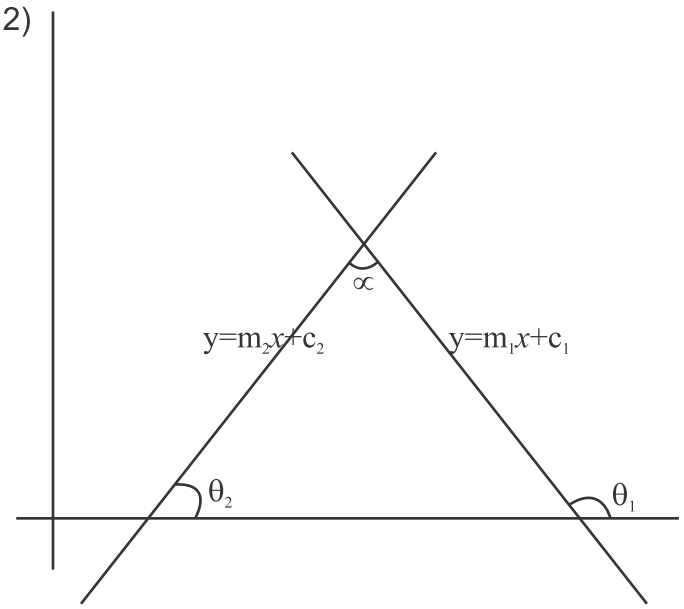
A,BC,D என்னும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே
(2,3) (1,1) (1,6) (0,1) ஆகும்.

1) AB இன் மீதுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (t+1, 2t+1) *எனும் வடிவில் எழுதப்படலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு t ஒரு பரமாணம் ஆகும்.*

2) $\hat{APD} = \hat{BPC}$ ஆகுமாறு AB ஐ உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி P இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

www.lkedu.lk

2)



$\tan\theta_1 = m_1, \tan\theta_2 = m_2$

$\alpha = \theta_1 - \theta_2$

$\tan\alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2)$

$= \dfrac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$

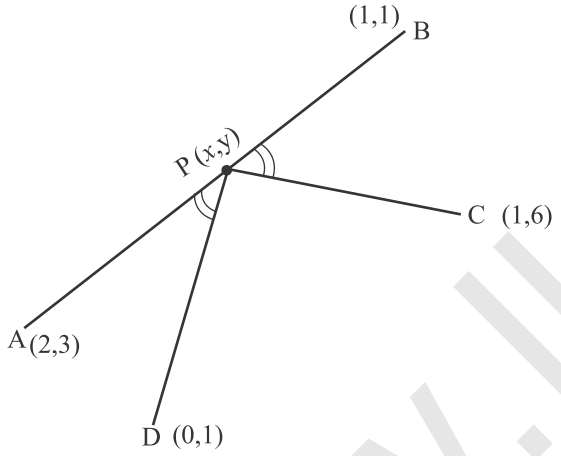
$\tan\alpha = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

α கூர்ங்கோணம்

$\tan\theta > 0$

$\tan\alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1, m_2}\right|$

1) AB மீதுள்ள புள்ளியின் ஆள்கூறு P (x,y) *என்க.*



$\dfrac{y - 1}{c - 1} = \dfrac{3 - 1}{2 - 1}$

$\dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{c - 1}{1} = t$ t *பரமாணம்*

$c = 1 + t, \quad y = 1 + 2t$

ஆள்கூறு $(t + 1, 1 + 2t)$

2)

$P^{o}\ (1 + t,\ 1 + 2t)$

$M_{PD} = \dfrac{2t}{1 + t}$

$M_{PC} = \dfrac{2t - 5}{t}$

$A\hat{P}D = B\hat{P}C$

$\tan A\hat{P}D = \tan B\hat{P}C$

$$\left|\frac{2 - \frac{2t}{1+t}}{1 + \frac{4t}{1+t}}\right| = \left|\frac{2 - \frac{(2t - 5)}{t}}{1 + 2\frac{(2t - 5)}{t}}\right|$$

$$\left|\frac{2}{5t + 1}\right| = \left|\frac{5}{5t - 10}\right|$$

www.lkedu.lk

$\oplus \quad \therefore t = -\frac{5}{3}$

$\ominus \quad \therefore t = \frac{3}{7}$

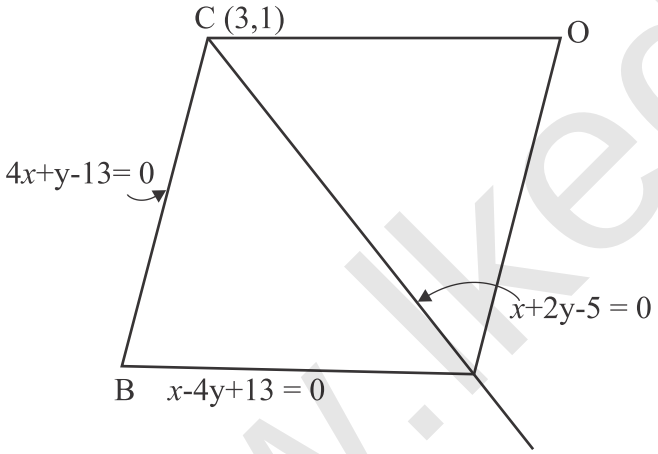
$t = -\frac{5}{3} \therefore \quad p^{o} \left(\frac{2}{3_1}, -\frac{7}{3}\right)$

உட்புறமாக பிரிப்பதால் பொருந்தாது

$t = \frac{3}{7} \therefore P^{o} \left(\frac{10}{7}, \frac{13}{7}\right)$

$\therefore$ P இன் ஆள்கூறு $\left(\frac{10}{7}, \frac{13}{7}\right)$

02. நேர்கோடு $x+2y-5=0$ ஆனது நேர்கோடு $\ell = 4x+y-13=0$ ஐயும் கோடு $\ell_1 = x-4y+13=0$ ஐயும் முறையே A,C எனும் புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகிறது. O என்பது உற்பத்தியாகவும் B என்பது ℓ இனதும் ℓ_1 இனதும் இடைவெட்டும் புள்ளியாகவும் இருப்பின் நாற்பக்கல் OABC இன் உச்சிகள் ஒரு நிலைத்த புள்ளி D இலிருந்து சம தூரத்தில் இருக்கின்றனவெனக்காட்டி D இன் ஆள்கூறைக் காண்க.



$c+2y-5=0$

$c-4y+13=0$

$\therefore y=3, c=-1$

$A(-1,3)$

$c+2y-5=0$

$4c+y-13=0$

$\therefore c=3, y=1$

$\therefore c^{o}(3,1)$

$M_{BC} = -4, M_{AB} = \frac{1}{4}$

$\therefore M_{BC} \; M_{AB} = -1$

$BC \perp AB$

மேலும் $M_{AO} = -3, M_{OC} = -\frac{1}{3}$

$\therefore OA \perp OC$

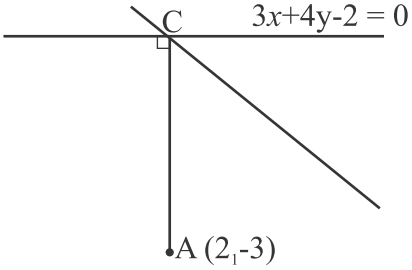
$A\hat{B}C + A\hat{O}C = 180$ ஆதலால் OABC ஒரு வட்ட நாற்பக்கலாகும். அத்துடன் AC விட்டமாகும். மையம் AC இன் நடுப்புள்ளி D எனின்

D = (1,2) ஆகும்.

உச்சிகள் D இலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளன.

www.ikedu.lk

03. புள்ளி A (2_1-3)இலிருந்து நேர்கோடு $3x+4y-2=0$ இன் மீது வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடி C இனூடாகச் செல்வதும், செங்குத்துக்கும் கொடுக்கப்பட்டள்ள நேர் கோட்டிற்கும் இடையிலான கோணங்களை இருசம கூறிடுவதுமான நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. AC ஐ ஒரு மூலை விட்டமாகவுடைய சதுரத்தின் மற்றைய உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.



AC Þ $4c - 3y + C = 0$

$(2,-3)$ Þ $4' 2 - 3' - 3 + C = 0$

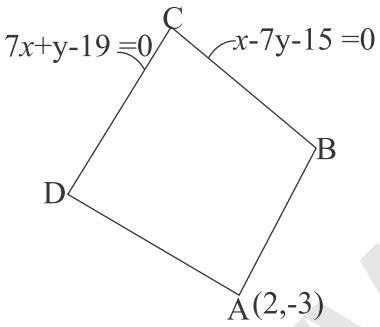
$C = -17$

AC Þ $4c - 3y - 17 = 0$

இருகூறாக்கிகள் $\dfrac{3c+4y-2}{5} = \pm\dfrac{4c-3y-17}{5}$

⊕ Þ $c - 7y - 15 = 0$

⊖ Þ $7c + y - 19 = 0$



AB Þ $7c + y - 11 = 0$

AD Þ $c - 7y - 23 = 0$

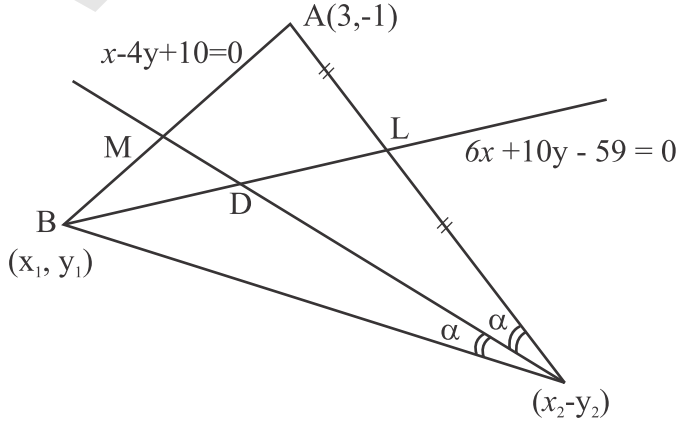
B º $\left(\frac{46}{25}, \frac{-47}{25}\right)$

D º $\left(\frac{78}{25}, \frac{-271}{25}\right)$

04. ABC என்பது A ≡ (3,-1)என அமையும் வகையில் உள்ள ஒரு முக்கோணி ஆகும். கோணம் C இன் உள்ளிரு கூறாக்கியின் சமன்பாடு x-4y+10 =0 ஆகும். உச்சி B இனூடாக இடையத்தின் சமன்பாடு 6x+10y-59 = 0 ஆகும். இவை D இல் சந்திக்கின்றன எனின்,

1) B,C இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
2) முக்கோணியின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

1)



www.kedu.lk

AC இன் நடுப்புள்ளி L ஆகும். $L \circ \left(\frac{3+c_2}{2}, \frac{1+y_2}{2}\right)$

இது $6x+10y-59=0$ இல் உள்ளது.

$$6\left(\frac{3+c_2}{2}\right)+10\left(\frac{1+y_2}{2}\right)-59=0$$

$$3c_2+5y_2=55 \quad \text{®} \quad (1)$$

C (x_2, y_2) ஆனது $x-4y+10=0$ இல் உள்ளது.

$x_2-4y_2+10=0 \rightarrow (2)$

(1) (2) $\Rightarrow x_2=10, \quad y_2=5$

$C \equiv (10, 5)$

AC இன் படித்திறன் $= \frac{5-(-1)}{10-3}=\frac{6}{7}$

CM இன் படித்திறன் $= \frac{1}{4}$

BC இன் படித்திறன் m என்க

$$\tan\alpha = \left|\frac{m-\frac{1}{4}}{1+m\frac{1}{4}}\right| = \left|\frac{\frac{6}{7}-\frac{1}{4}}{1+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{4}}\right|$$

$$\left|\frac{4m-1}{4+m}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\pm=2(4m-1)=4+m$$

$$m=\frac{6}{7}, \frac{-2}{9}$$

$M_{AC} = \frac{6}{7}$ ஆகையால் இது பொருத்தாது

BC இன் படித்திறன் $=-\frac{2}{9}$

BC இன் சமன்பாடு

$$y-5=-\frac{2}{9}(c-10)$$

$$2c+9y-65=0$$

BL, BC ஐ தீர்க்க

$$6c+10y-59=0$$

$$2c+9y-65=0$$

$$c=-\frac{7}{2}, \quad y=8 \qquad B \circ \left(-\frac{7}{2}, 8\right)$$

AB, இன் படித்திறன் $\frac{8-(-1)}{-\frac{7}{2}-3}=\frac{-18}{13}$

AB, இன் சமன்பாடு

$$y+1=\frac{-18}{13}(c-3)$$

$$18c+13y-41=0$$

AC, இன் சமன்பாடு

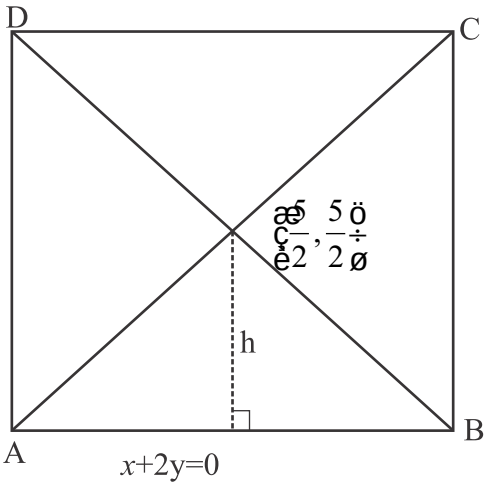
$$y+1=\frac{6}{7}(c-3)$$

$$6c-7y-25=0$$

www.lkedu.lk

05. சதுரம் ஒன்றின் ஒரு பக்கத்தின் சமன்பாடு $x+2y=0$ ஆகும். அதன் மூலை விட்டங்கள் $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ எனும் புள்ளியில் இடைவெட்டுகின்றன. சதுரத்தின் மற்றைய பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$A \equiv (-k, k)$, $B \equiv (2k, -k)$, $C \equiv (k, O)$ ஆகுமாறு அமையும் ΔABC இன் நிமிர்மையம் $9x - 7y = 0$ எனும் நேர்கோட்டில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.



$$h = \frac{\left|\frac{5}{2}+2\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{1+4}} = \frac{15}{2\sqrt{5}}$$

CD Þ $x+2y+\lambda=0$

$$\frac{15}{2\sqrt{5}} = \frac{\left|\frac{5}{2}+2\,\frac{5}{2}+\lambda\right|}{\sqrt{5}}$$

$$\pm\frac{15}{2} = \frac{15}{2}+\lambda$$

$\lambda = 0,\ \lambda = -15$

CD யின் சமன்பாடு

$x+2y - 15 = 0$

AD $\Rightarrow 2x - y+\mu = 0$

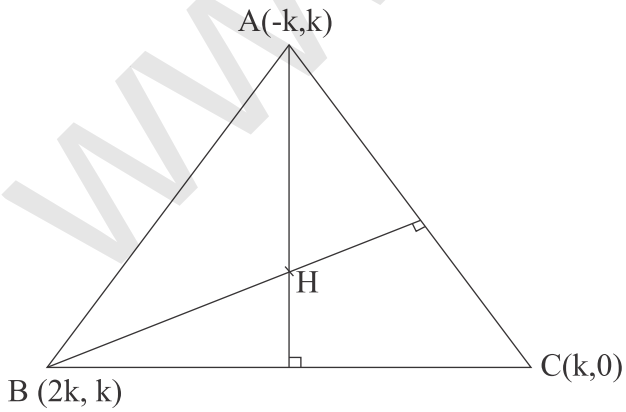
$$\frac{15}{2\sqrt{5}} = \frac{\left|2.\frac{5}{2} - \frac{5}{2}+m\right|}{\sqrt{5}}$$

$$\pm\frac{15}{2} = \frac{5}{2}+m$$

$m = 5, -10$

\ AD Þ $2x - y + 5 = 0$

BC Þ $2x - y - 10 = 0$



$M_{BC} = -1$

$M_{AC} = -1/2$

AD $\Rightarrow y-k = 1\,(x+k)$

$x - y + 2k = 0 \quad \rightarrow (1)$

BE $\Rightarrow y+k = 2(x-2k)$

$2x - y - 5k = 0 \rightarrow (2)$

(1), (2) $\Rightarrow x = 7k$

$y = 9k$

H= (7k, 9k)

H யை $9x - 7y = 0$ இல் பிரதியிட

$9\times7k - 7\times9k = 0$

∴ இந்நேர்கோட்டில் இருக்கும்

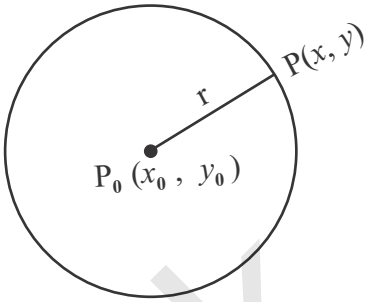
www.lkedu.lk

வட்டம்

(x_0 , y_0) ஐ மையமாகவும் ஆரை r ஐயும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு

$PP_0 = r$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$

$g = -x_0 \qquad f = -y_0 \qquad c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$ என்க.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

மையம் (x_0, y_0) Þ $(-g, -f)$

$c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$

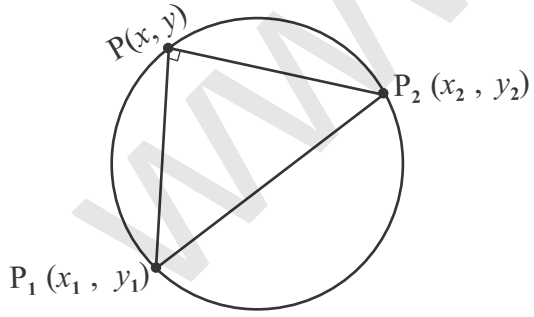
$r^2 = x_0^2 + y_0^2 - c$

$r^2 = g^2 + f^2 - c$

$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

∴ S º $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்னும் வட்டத்தின் மையம் $(-g, -f)$

ஆரை $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ என்பதால் தரப்படும்.



P_1 , P_2 ஐ விட்டத்தின் முனைகளாக உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு

மையம் $O = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

ஆரை $r = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{2}$

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ இங்கு

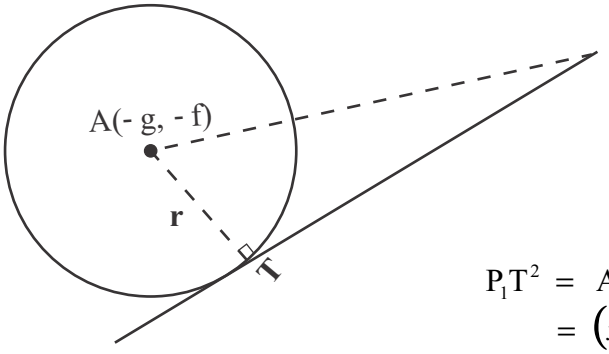
$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$

$r = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{2}$

www.ikedu.lk

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்னும் வட்டத்திற்கு $P_1\ (x_1 + y_1)$, P_2 என்னும் வெளிப்புள்ளியில் இருந்து வரையும் தொடலியின் நீளம்.



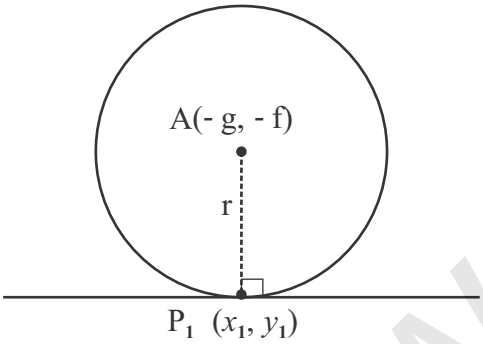
$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$\begin{aligned} P_1T^2 &= AP_1^2 - AT^2 \\ &= (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c) \\ &= y_1^2 + x_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \end{aligned}$$

$$P_1T = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$

(வட்டத்தின் சமன்பாட்டில் $(x_1 + y_1)$ என்னும் புள்ளியை பிரதியிடுதல்.

$S^o\ \ x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற் வட்டத்திற்கு வட்டத்தில் உள்ள புள்ளி $P_1\ (x_1, y_1)$ இல் வரையும் தொடலியின் சமன்பாடு.



$P_1\ (x_1, y_1)$ வட்டத்தில் இருப்பதால்

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

கோடு AP_1 இன் படித்திறன் $= \dfrac{y_1 + f}{x_1 + g}$

$\therefore$ தொடலின் சமன்பாடு $y - y_1 = -\dfrac{(x_1 + g)}{y_1 + f}(x - x_1)$

$$\begin{aligned} (y - y_1)(y_1 + f) &= -(x - x_1)(x_1 + g) \\ yy_1 + yf - y_1^2 - y_1f &= -[xx_1 + xg - x_1^2 - x_1g] \\ xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y - y_1) - (x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

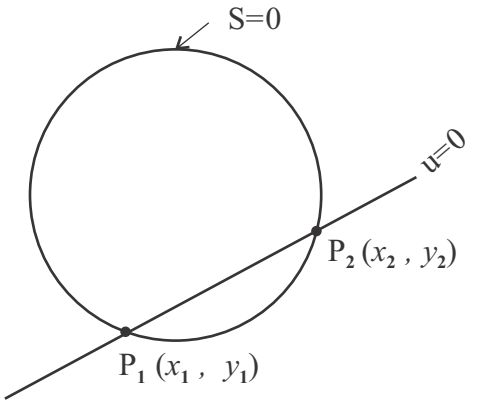
$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$x.\underline{x} + y.\underline{y} + g(x + \underline{x}) + f(y + \underline{y}) + c = 0$$

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

வட்டத்தின் சமன்பாட்டை மேற்குறித்த வடிவில் மாற்றி ஒரு x இற்கு x_1 உம் ஒரு y இற்கு y_1 உம் பிரதியிடுதல்.

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டமும் $U \equiv ax + by + e = 0$ என்ற நேர்கோடும் இடைவெட்டும் புள்ளிகளினூடு செல்லும் எல்லா வட்டங்களினதும சமன்பாட்டை $S + \lambda u = 0$ என்னும் வடிவில் எழுதலாம். இங்கு λ ஓர் மெய்ப்பரமானம் ஆகும்.



வட்டமும் நேர்கோடும் இடைவெட்டும் புள்ளிகள்
$P_1(x_1+y_1)$, P_2 (x_2+y_2) என்க.

P_1, P_2 ஆனது $S=0$, $u=0$ இல் இருப்பதால்

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad , \quad ax_1 + by_1 + e = 0 \text{ ——— (1)}$$
$$x_2^2 + y_2^2 + 2gx_1 + 2fy_2 + c = 0 \quad , \quad ax_2 + by_2 + e = 0 \text{ ——— (2)}$$

$S + \lambda u = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை கருதுக.

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda (ax + by + e) = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{g + \lambda a}{2}\right)x + 2\left(\frac{f + \lambda b}{2}\right)y + c + \lambda e = 0 \text{ ——— (*)}$$

01. இது x, y இல் ஓர் இரண்டாம்படிச் சமன்பாடாகும்.

02. x^2 குணகம் = y^2 இன் குணகம்

03. xy இன் குணகம் 0
$\therefore$ இது ஓர் வட்டத்தை குறிக்கும்.

$P_1(x_1, y_1)$ ஐ $S + \lambda u$ என்பதில் பிரதியிட

$$\text{Þ} \quad x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c + \lambda (ax_1 + by_1 + e)$$
$$= 0 + \lambda .0$$
$$= 0$$

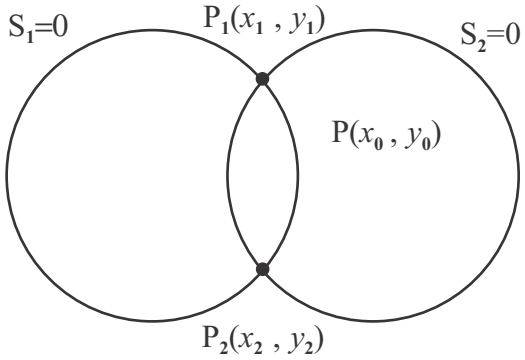
$\therefore$ P_1 ஆனது $S + \lambda u = 0$ இல் உள்ளது.

இவ்வாறே P_2 உம் $S + \lambda u = 0$ இல் உள்ளது எனக் காடடலாம்.

$\therefore$ λ இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $S = 0$, $u = o$ என்னும் வட்டமும் நேர்கோடும் இடை வெட்டும் புள்ளிகளினூடு செல்லும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டை $S + \lambda u = 0$ என எழுதலாம்.

www.ikedu.lk

$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$, $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ ஆகிய வட்டங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளிகளினூடு செல்லும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சம்மன்பாட்டை $S_1 + \lambda S_2 = 0$ என எழுதலாம். இங்கு $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ஆகவுள்ள மெய்ப்பரமானமாகும்.



வட்டங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளிகள் P_1 , P_2 என்க.

P_1, P_2 என்பன $S_1=0$, $S_2=0$ இல் இருப்பதால்

$x_1^2 + y_1^2 + 2g_1x_1 + 2f_1y_1 + c_1 = 0$, $x_1^2 + y_1^2 + 2g_2x_1 + 2f_2y_1 + c_2 = 0$ ——— (1)
$x_2^2 + y_2^2 + 2g_1x_2 + 2f_1y_2 + c_1 = 0$, $x_2^2 + y_2^2 + 2g_2x_2 + 2f_2y_2 + c_2 = 0$ ——— (2)

$S_1 + \lambda S_2 = 0$ என்னும் சமன்பாடடை கருதுக. $(\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 + \lambda (x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2) = 0$
$(1 + \lambda)x^2 + (1 + \lambda)y^2 + 2(g_1 + \lambda g_2)x + 2(f_1 + \lambda f_2)y + c_1 + \lambda c_2 = 0$
$S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 =$

01. இது x, y இல் ஓர் இரண்டாம்படிச் சமன்பாடாகும்.

02. x^2 குணகம் = y^2 இன் குணகம்

03. xy இன் குணகம் 0 ஆகம்.

எனவே இச் சமன்பாடு ஓர் வட்டத்தை குறிக்கும்.

$P_1 (x_1, y_1)$ ஐ $S_1 + \lambda S_2$ இல் பிரதியிட

$\Rightarrow$ $x_1^2 + y_1^2 + 2g_1x + 2f_1y_1 + c_1 + \lambda (x_1^2 + y_1^2 + 2g_2x_1 + 2f_2y_1 + c_2)$
$= 0 + \lambda 0 = 0$ (by ——— (1))
$\therefore$ $P_1 (x_1, y_1)$ ஆனது $S_1 + \lambda S_2$ இல் இருக்கும்.

இவ்வாறே $P_2 (x_2, y_2)$ ஆனது $S_1 + \lambda S_2$ இல் உள்ளது எனக் காட்டலாம்.
எனவே $S_1=0$, $S_2=0$ என்பன இடைவெட்டும் புள்ளிகளினூடு செல்லும் எல்லா வட்டங்களையும் $S_1 + \lambda S_2 = 0$ என்னும் பொதுச் சமன்பாட்டால் குறிக்கலாம். இங்கு $\lambda \in (\mathbb{R} - \{-1\}) \cup \mathbb{R}$

$l = -1$ எனின்

$S_1 + l\, S_2 = 0$

$\Rightarrow$ $S_1 - S_2 = 0$ ஆகும்.

$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 - (x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2) = 0$

$S_1 - S_2 = 2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0$

இது x, y இல் முதலாம்படிச் சமன்பாடாகும்.

எனவே ஓர் நேர்நோட்டைக் குறிக்கும்.

P_1, P_2 என்பன $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ இல் இருப்பதால்

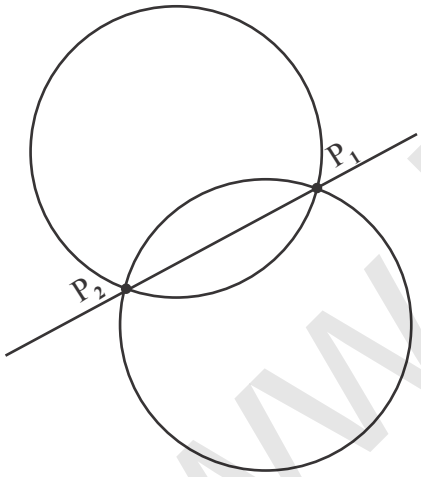
$x_1^2 + y_1^2 + 2g_1x_1 + 2f_1y_1 + c_1 = 0$, $x_1^2 + y_1^2 + 2g_2x_1 + 2f_2y_1 + c_2 = 0$ (1)

$x_2^2 + y_2^2 + 2g_1x_2 + 2f_1y_2 + c_1 = 0$, $x_2^2 + y_2^2 + 2g_2x_2 + 2f_2y_2 + c_2 = 0$ (2)

(1) $\Rightarrow$ $2(g_1 - g_2)x_1 + 2(f_1 - f_2)y_1 + c_1 - c_2 = 0$

(2) $\Rightarrow$ $2(g_1 - g_2)x_2 + 2(f_1 - f_2)y_2 + c_1 - c_2 = 0$

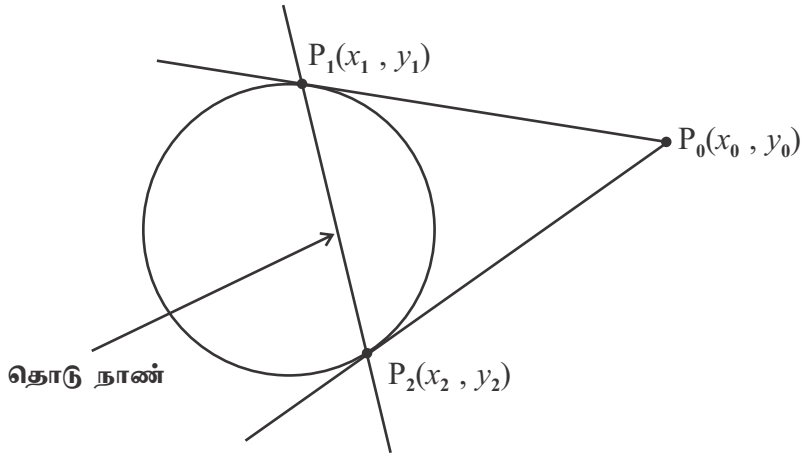
$\therefore$ P_1 , P_2 என்பன $S_1 - S_2 = 0$ என்னும் கோட்டில் இருக்கும்.



$\therefore$ $S_1 - S_2 = 0$ என்பது $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ என்பன இடைவெட்டும் புள்ளியினூடு செல்லும் பொது நாணைக் குறிக்கும்.

www.lkedu.lk

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்னும் வட்டத்திற்கு $P_0(x_0, y_0)$ என்னும் வெளிப்புள்ளியில் இருந்து வரையும் தொடலிகளின் தொடுநாணின் சமன்பாடு.



தொடலிகள் $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளில் வட்டத்தை தொடுகிறது என்க.

P_1 இல் தொடலியின் சமன்பாடு $\quad xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

P_2 இல் தொடலியின் சமன்பாடு $\quad xx_2 + yy_2 + g(x + x_2) + f(y + y_2) + c = 0$

இத் தொடலிகள் $P_0(x_0, y_0)$ இனூடு செல்வதால்

$$\left.\begin{aligned} x_0x_1 + y_0y_1 + g(x_0 + x_1) + f(y_0 + y_1) + c = 0 \\ x_0x_2 + y_0y_2 + g(x_0 + x_2) + f(y_0 + y_2) + c = 0 \end{aligned}\right\} \text{ ———— } (1)$$

$xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைக் கருதுக.

இது x, y இல் முதலாம்படிச் சமன்பாடாகும்.
எனவே இது ஓர் நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

(1) இல் இருந்து இந்நேர்கோடு P_1 , P_2 என்னும் புள்ளிகளினூடு செல்லும்.

$\therefore$ தொடுநாணின் $\quad xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$\underline{xx} + \underline{y.y} + g(x + \underline{x}) + f(y + \underline{y}) + c = 0$$

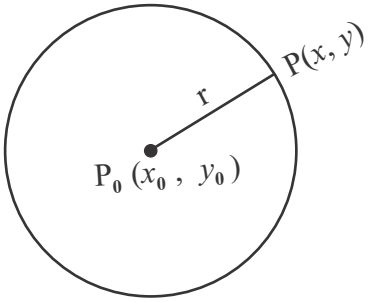
$$xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$$

www.ikedu.lk

01. $P_0(x_0 , y_0)$ என்னும் புள்ளியை மையமாகவும் ஆரை r ஆகவும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$P_0P^2 = r^2$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$



02. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பது வட்டம் ஒன்றின் பொதுவான சமன்பாடாகும்.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$(x + g)^2 + (y + f)^2 = g^2 + f^2 - c$

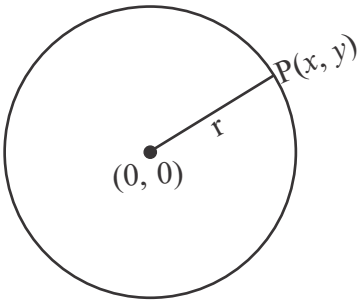
$(x - (-g))^2 + (y - (-f))^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right)^2$

வட்டத்தின் மையம் $(-g, -f)$

வட்டத்தின் ஆரை $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

03. உற்பத்தியை மையமாகவும் ஆரை r ஆகவும் உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 = r^2$



04. $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ என்னும் x, y இல் உள்ள இரண்டாம்படிச் சமன்பாடு ஓர் வட்டத்தை குறிப்பதற்கு

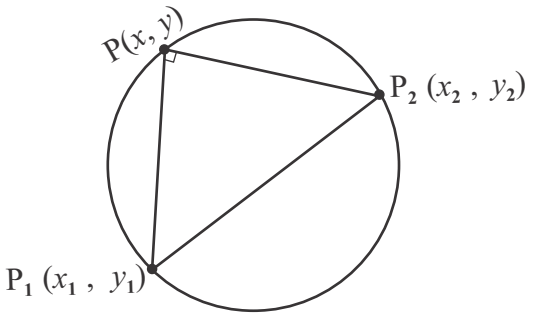
1) x^2 குணகம் $= y^2$ குணகம் ஆக வேண்டும் (ie $a = b$)

2) xy இன் குணகம் பூச்சியம் ஆதல் வேண்டும். (ie $c = 0$)

www.lkedu.lk

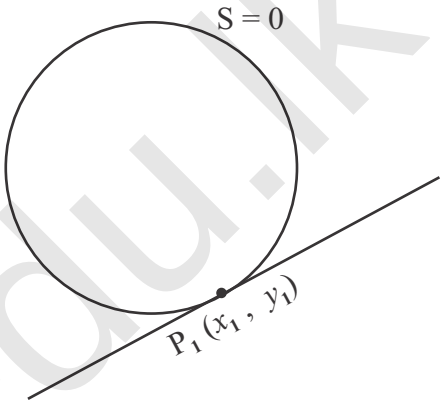
05. $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளை விட்டத்தின் முனைகளாக கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$



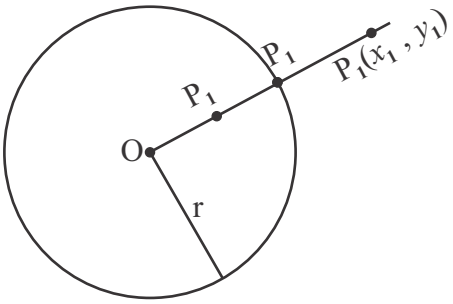
06. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியில் உள்ள புள்ளி $P_1(x_1, y_1)$ இல் தொடலியின் சமன்பாடு.

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$



07. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்னும் வட்டம் குறித்து $P_1(x_1, y_1)$ இன் நிலை

$OP_1 > r$ எனின் P_1 வெளியே இருக்கும்.
$OP_1 = r$ எனின் P_1 பரிதியில் இருக்கும்.
$OP_1 < r$ எனின் P_1 வட்டத்தின் உள்ளே இருக்கும்.

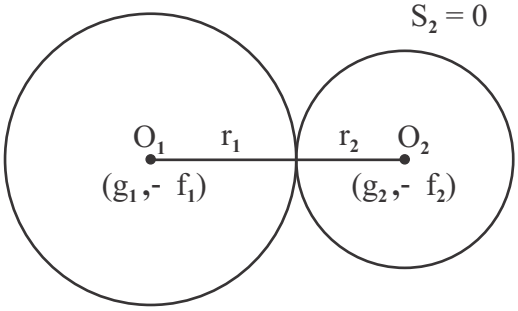


$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + C \gtrless O$
என்பதற்கேற்ப P_1 ஆனது வெளியே,
பரிதியில், உள்ளே இருக்கும்.

08. இரு வட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று வெளிப்புறமாக தொடுதல்.

$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$
$S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$

$O_1O_2 = r_1 + r_2$
O_1 , O_2 மையங்கள்
r_1 , r_2 ஆரைகள்

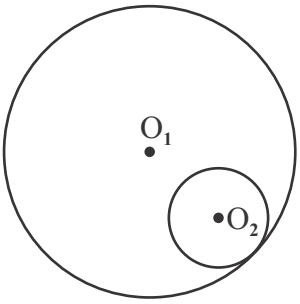


$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$

www.lkedu.lk

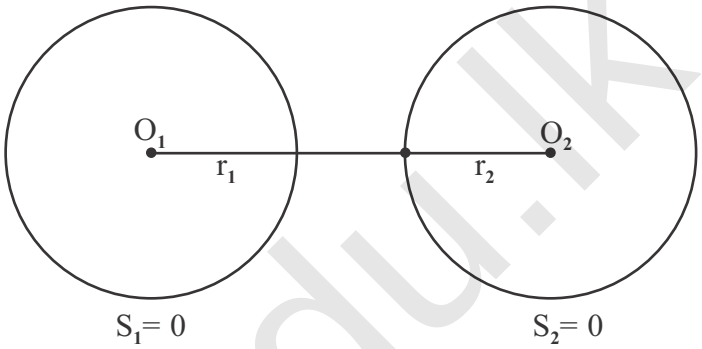
09. இரு வட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று உட்புறமாக தொடுதல்.

$O_1O_2 = |r_1 - r_2|$

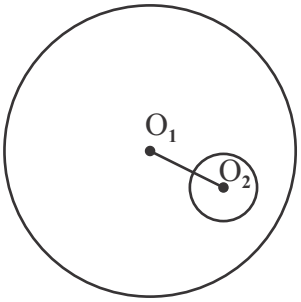


10. இரு வட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டாதிருத்தல்.

$O_1O_1 > r_1 + r_2$



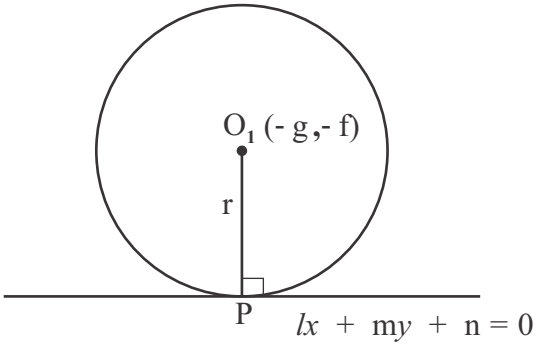
$O_1O_2 < |r_1 - r_2|$



11. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்னும் வட்டமும் $U \equiv lx + my + n = 0$ என்ற நேர்கோடும் ஒன்றை ஒன்று தொடும் எனின்,

ஆரை = செங்குத்து தூரம் O_1P

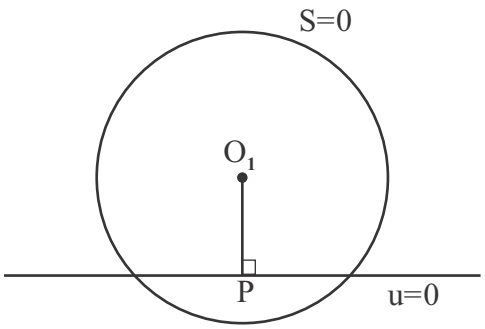
$$\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \frac{|gl - fm + n|}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$



www.lkedu.lk

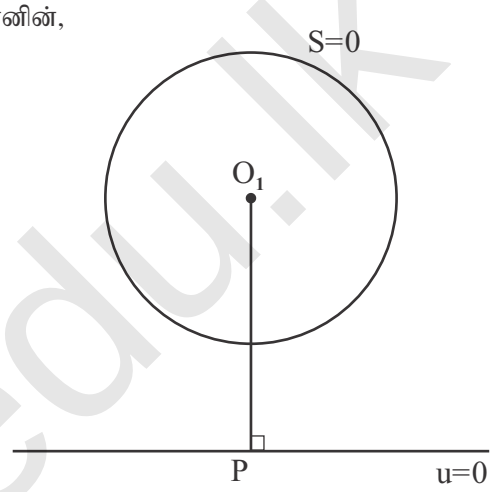
12. வட்டமும் நேர்கோடும் ஒன்றை ஒன்று இடைவெட்டும் எனின்,

$O_1 P < r$

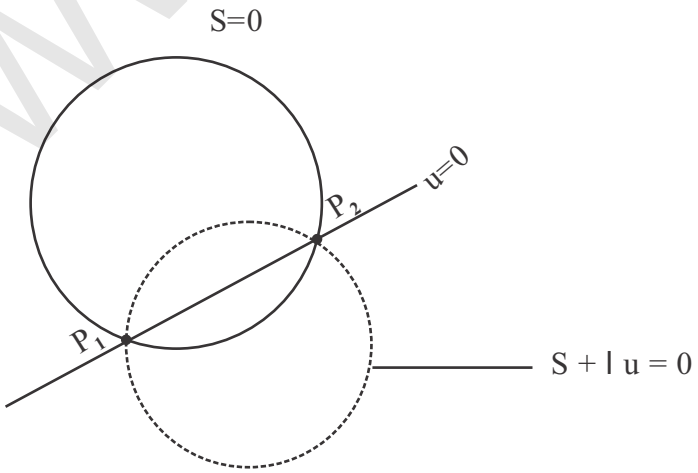


13. வட்டமும் நேர்கோடும் ஒன்றை ஒன்று சந்திக்காது எனின்,

$O_1 P > r$

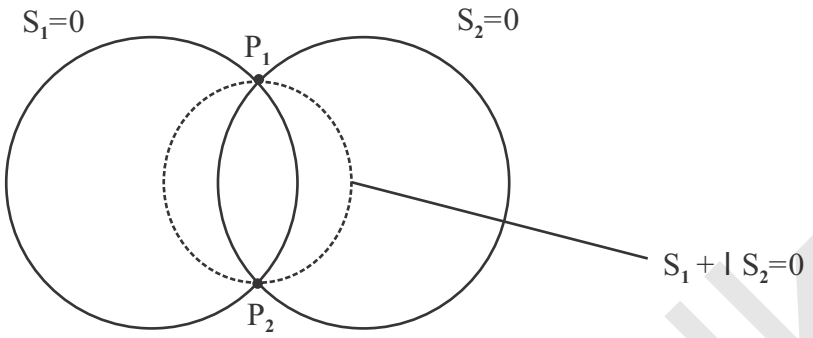


14. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ என்ற வட்டமும் $U \equiv lx + my + n = 0$ என்ற நேர்கோடும் இடைவெட்டும் புள்ளிகளினூடு செல்லும் வட்டங்களின் பொதுச் சமன்பாடு $S + lu = 0$ என எழுதலாம். இங்கு l மெய்ப்பரமானம் ஆகும்.

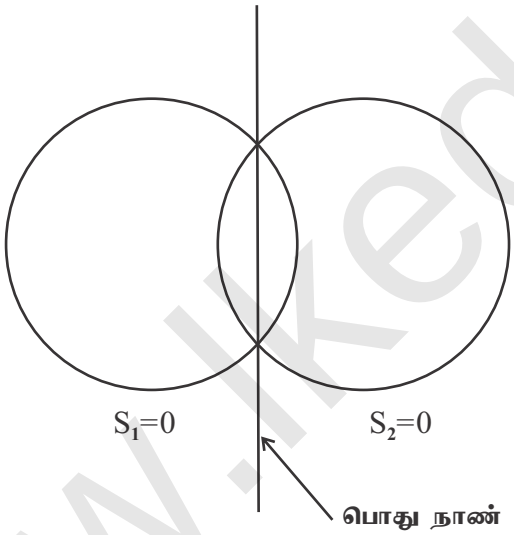


www.lkedu.lk

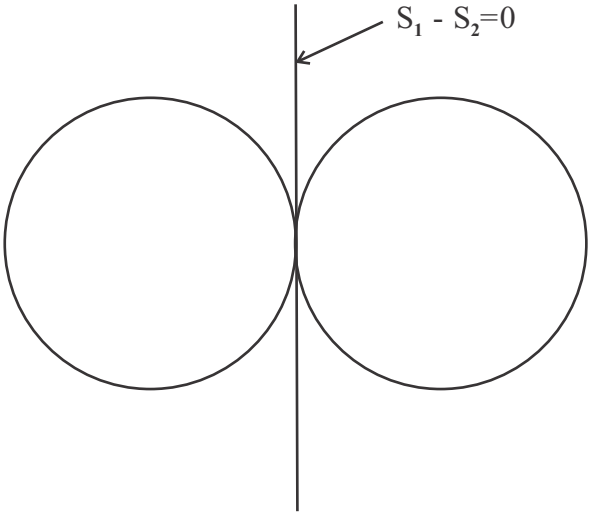
15. $S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$, S_2 ° $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ என்னும் வட்டங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளிகளினூடு செல்லும் வட்டங்களின் சமன்பாட்டை $S_1 + l S_2 = 0$ என எழுதலாம். இங்கு l மெய்ப்பரமானம் ஆகும். ($l \neq -1$)



16. $S_1 - S_2 = 0$ என்பது இருவட்டங்களினதும் பொதுநாணின் சமன்பாட்டைக் குறிக்கும்.

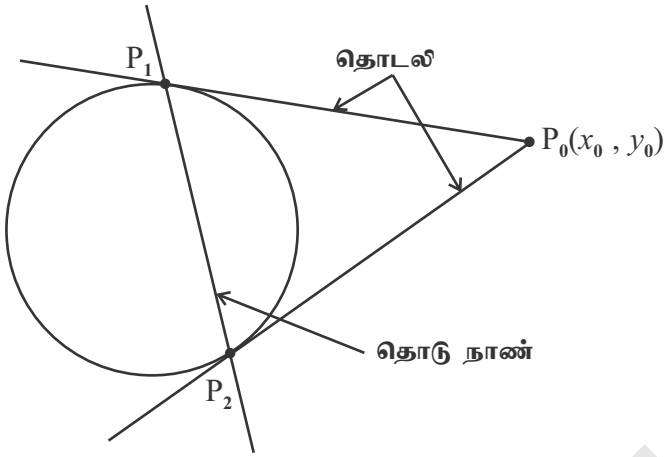


வட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று தொடும் எனின், $S_1 - S_2 = 0$ என்பது பொதுத் தொடலியைக் குறிக்கும்.



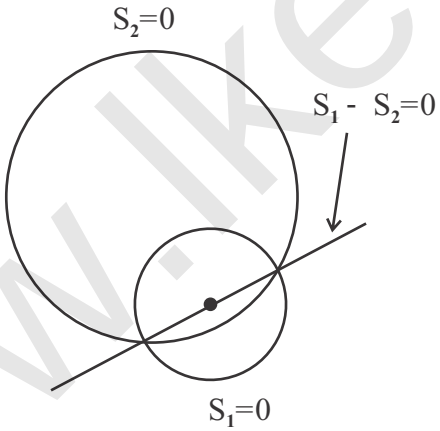
தொடு நாணின் சமன்பாடு

$xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$



17. பரிதியை இருகூறிடும் வட்டம்

$S_1 = 0$ இன் பரிதியை $S_2 = 0$ இருகூறிடும் எனின், பொதுநாண் $S_1 - S_2 = 0$ என்பது $S_1 = 0$ இன் விட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.



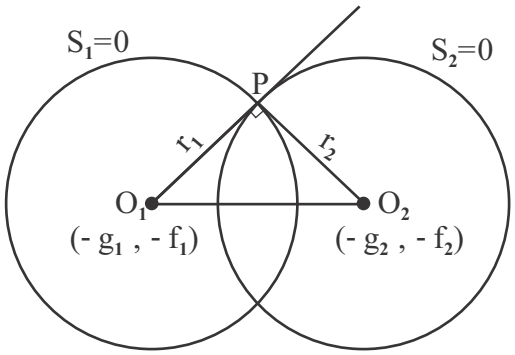
18. நிமிர்கோண வட்டங்கள்

$O_1O_2^{\,2} = O_1P^2 + O_2P^2$

$(g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2 = r_1^{\,2} + r_2^{\,2}$

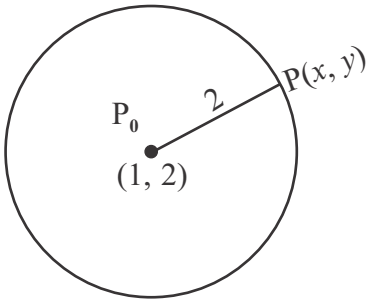
$= g_1^{\,2} + f_1^{\,2} - c_1 + g_2^{\,2} + f_2^{\,2} - c_2$

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$$



www.lkedu.lk

01. P_0 (1 , 2) என்னும் புள்ளியை மையமாகவும் 2 அலகு ஆரையாகவும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



$P_0P^2 = 2^2$

$(y - 2)^2 + (x - 1)^2 = 4$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

02. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ என்னும் வட்டத்தின் மையம், ஆரை என்பவற்றைக் காண்க.

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

$(x - 2)^2 + (y+3)^2 = 3 + 4 + 9 = 16$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$

மையம் (2, - 3) , ஆரை = 4 அலகு

03. A (1, 1) . B (2, - 1) . C (3, 2) என்னும் புள்ளிகளினூடு செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்க.

(1, 1) Þ $1 + 1 + 2g + 2f + c = 0$ $2g + 2f + c = -2$ ——— (1)

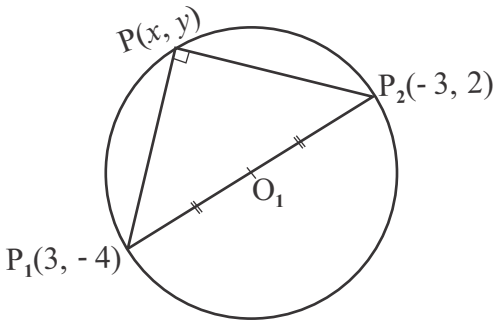
(2, - 1) Þ $4 + 1 + 4g - 2f + c = 0$ $4g - 2f + c = -5$ ——— (2)

(3, 2) Þ $9 + 4 + 6g + 4f + c = 0$ $6g + 4f + c = -13$ ——— (3)

(1), (2), (3) Þ $g = -\frac{5}{2}$, $f = -\frac{1}{2}$, $c = 4$

$x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$

04. P_1 (3 , - 4) , P_2 (- 3 , 2) என்னும் புள்ளிகளை விட்டத்தின் முனைகளாக உடைய வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



$\frac{y - 2}{x + 3} \times \frac{y + 4}{x - 3} = -1$

$(x + 3)(x - 3) + (y - 2)(y + 4) = 0$

$x^2 + y^2 + 2y - 17 = 0$

Or

மையம் (0, - 1)

ஆரை $= \frac{P_1P_2}{2} = \frac{\sqrt{36 + 36}}{2} = 3\sqrt{2}$

$(x - 0)^2 + (y + 1)^2 = 18$

$x^2 + y^2 + 2y - 17 = 0$

www.lkedu.lk

05. $P_0(3,4)$ என்னும் புள்ளி $x^2 + y^2 + 4x - 3y - 8 = 0$ என்னும் வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ளது எனக்காட்டி, இப்புள்ளியில் இருந்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடலியின் நீளத்தைக் காண்க.

$x^2 + y^2 + 4x - 3y - 8$.

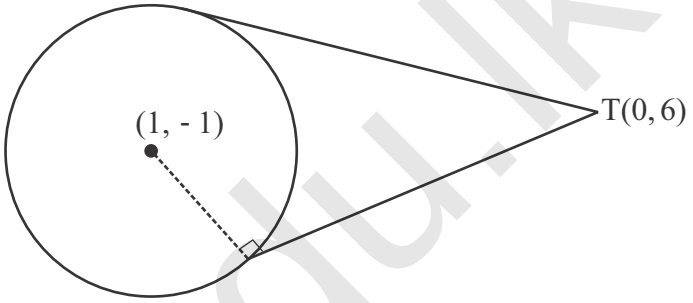
$P_0(3,4)$ Þ $= 9 + 16 + 12 - 12 - 8 > 0$

∴ $P_0(3,4)$ என்பது $x^2 + y^2 + 4x - 3y - 8 = 0$ இற்கு வெளியே உள்ளது.

தொடலின் நீளம் = $\sqrt{9 + 16 + 12 - 12 - 8} = \sqrt{17}$

06. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு $T(0, 6)$ என்ற வெளிப்புள்ளியில் இருந்து வரையும் தொடலிகளின் சமன்பாட்டையும் தொடுநாணின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

தொடலியின் படித்திறன் m என்க.



தொடலின் சமன்பாடு

$y - 6 = mx$

$mx - y + 6 = 0$

மையம் $(1, -1)$

ஆரை = $\sqrt{1 + 1 - (-23)} = 5$

வட்டத்தின் மையத்தில் இருந்து தொடலிக்கான செங்குத்து தூரம் ஆரைக்கு சமனாகும்.

$$5 = \frac{|m + 1 + 6|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$(m+7)^2 = 25(m^2+1)$

$24m^2 - 14m - 24 = 0$

$12m^2 - 7m - 12 = 0$

$(3m - 4)(4m+3) = 0$

$m = \frac{4}{3}$ அல்லது $m = -\frac{3}{4}$

∴ தொடலிகளின் சமன்பாடு $4x - 3y + 18 = 0$

$3x + 4y - 24 = 0$

தொடுநாண்

$xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$

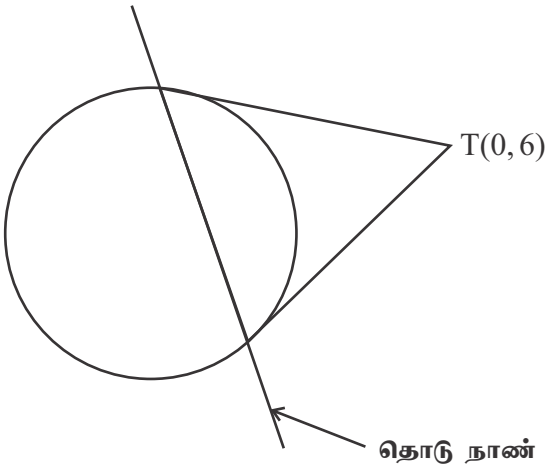
$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$

$x.x + y.y - (x + x) + (y + y) - 23 = 0$

$x(0) + y(6) - (x+0) + (y+6) - 23 = 0$

$6y - x + y + 6 - 23 = 0$

$x - 7y + 17 = 0$



www.ikeau.lk

07. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 12 = 0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன எனக்காட்டி தொடுபுள்ளியின் ஆள்கூறையும், அப்புள்ளி யினூடு செல்லும் பொதுத் தொடலியின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ மையம் $(-1, 2)$ $r_1 = \sqrt{13}$

$S_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y + 12 = 0$ மையம் $(3, -4)$ $r_2 = \sqrt{13}$

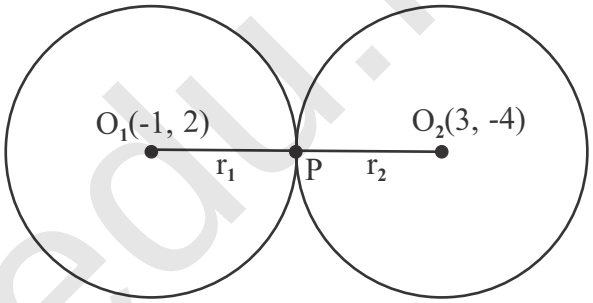
$r_1 + r_2 = 2\sqrt{13}$

மையங்களுக்கிடைப்பட்ட தூரம் $= \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$

$= 2\sqrt{13}$

$\therefore = r_1 + r_2$

$\therefore$ ஒன்றை ஒன்று வெளிப்புறமாகத் தொடும்.



$O_1P : PO_2 = 1 : 1$

$\therefore P\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2-4}{2}\right)$

$P(1, -1)$

$\therefore$ தொடுபுள்ளி $(1, -1)$

P இனூடு செல்லும் பொதுத் தொடலி $S_1 - S_2 = 0$

$8x - 12y - 20 = 0$

$2x - 3y - 5 = 0$

அல்லது

$$m_{O_1O_2} = \frac{-4-2}{3-(-1)} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

$\therefore$ தொடலியின் படித்திறன் $= \frac{2}{3}$

$$y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 1)$$

$$3y + 3 = 2x - 2$$

$$2x - 3y - 5 = 0$$

www.lkedu.lk

08. $x - y + 1 = 0$ என்ற நேர்கோட்டில் மையத்தையும் 3 அலகு ஆரையும் உடைய இருவட்டங்கள் புள்ளி (3, 7) இனூடு வரையலாம் எனக் காட்டுக. இவ்விரு வட்டங்களும் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுகின்றன எனக் காட்டுக.

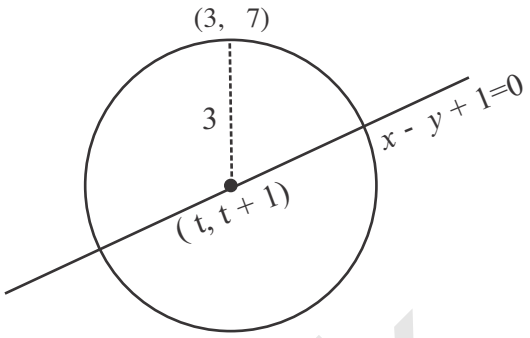
மையம் $(t, t+1)$ என்க.

$(t-3)^2 + (t-6)^2 = 3^2$

$t^2 - 9t + 18 = 0$

$(t-3)(t-6) = 0$

$t = 3, \quad t = 6$



மையம் (3, 4)

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$

$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$

மையம் (6, 7)

$(x-6)^2 + (y-7)^2 = 9$

$x^2 + y^2 - 12x - 14y + 76 = 0$

$g_1 = -3 \qquad f_1 = -4 \qquad c_1 = 16$

$g_2 = -6 \qquad f_2 = -7 \qquad c_2 = 76$

$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = 2(-3)(-6) + 2(-4)(-7) = 92$

$c_1 + c_2 = 16 + 76 = 92$

$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$

$\therefore$ நிமிர்கோணத்தில் இடைவெட்டும்.

09. $x^2 + y^2 - x + 3y - 1 = 0$ என்னும் வட்டத்தை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டி $x + 2y + 1 = 0$ என்னும் கோட்டை தொட்டுக்கொண்டு உற்பத்தியினூடாக இரு வட்டங்கள் வரையலாம் எனக் காட்டுக.

$S^o \quad x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்க.

மையம் $(-g, -f)$

$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$(0, 0) \Rightarrow \quad c = 0$ ——————— (1)

$x^2 + y^2 - x + 3y - 1 = 0$ செங்குத்தாக வெட்டுவதால்

$g_1 = -\frac{1}{2} \qquad f_1 = \frac{3}{2} \qquad c_1 = -1$

$2g \cdot (-\frac{1}{2}) + 2f(\frac{3}{2}) = -1$

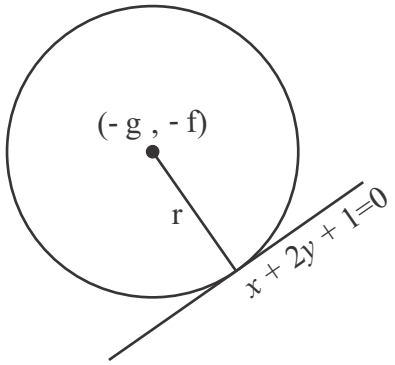
$-g + 3f = -1$

$g = 3f + 1$ ——————— (2)

www.lkedu.lk

10. $x + 2y + 1 = 0$ என்ற கோட்டை தொடுவதால்

$$\frac{|g - 2f + 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{g^2 + f^2}$$



$(g+2f - 1)^2 = 5(g^2+ f^2)$

$(5f)^2 = 5(3f + 1)^2 + f^2)$

$5f^2+ 6f + 1 = 0$

$(5f + 1)(f+1) = 0$

$f= -\frac{1}{5}$ or $f = -1$

$g = \frac{2}{5}$ $g = -2$

$x^2 + y^2 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y = 0$ ⇒ $5x^2 + 5y^2 + 4x - 2y = 0$

$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 7= 0$ என்ற வட்டமும் $2x - 4y - 3 = 0$ என்ற நேர்கோடும் இடைவெட்டும் புள்ளிகளினூடு செல்வதும் $(-3, -1)$ என்ற புள்ளியினூடு செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

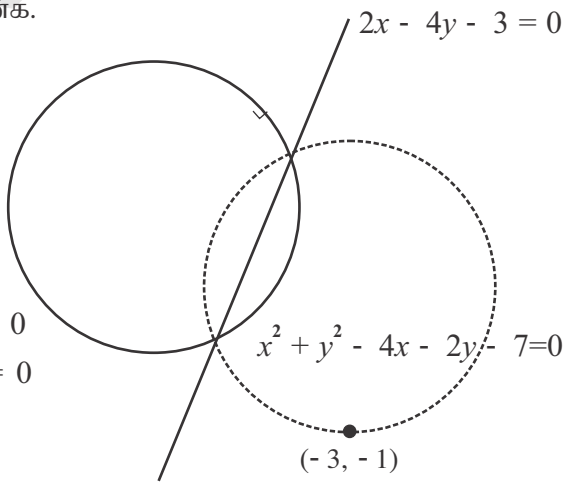
வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 7 + \lambda(2x - 4y - 3) = 0$ என்க.

$(-3, -1)$ இனூடு செல்வதால்

$9+1+12+2- 7 + \lambda(-6+4- 3)= 0$

$\lambda = \frac{17}{5}$



$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 7 + \frac{17}{5}(2x - 4y - 3) = 0$

$5(x^2 + y^2) + 14x - 78y - 86 = 0$

www.lkedu.lk

11. $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$ என்ற வட்டமும் $x + y - 1 = 0$ என்ற நேர்கோடும் P, Q என்னும் புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றன. PQ ஐ விட்டமாக உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?

$x^2 + y^2 + 2x - 8 + \lambda (x + y - 1) = 0$ என்க.

$x^2 + y^2 + (2 + \lambda) x + \lambda y - 8 - \lambda = 0$

மையம் $\left(-\frac{(2+\lambda)}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$

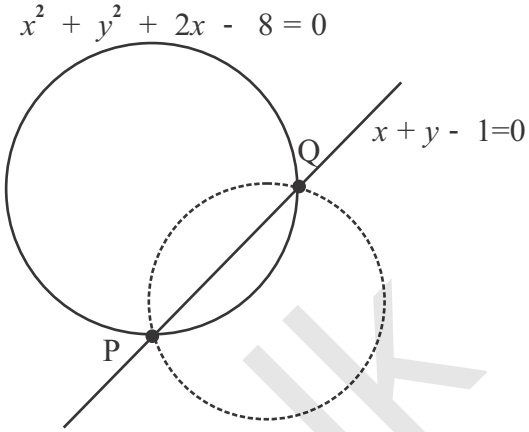
மையம் PQ இல் இருக்கும் ($x + y - 1 = 0$ இல் மையம் இருக்கும்)

$$-\frac{(2+\lambda)}{2} - \frac{\lambda}{2} - 1 = 0$$

$$\lambda = -2$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 8 - 2(x + y - 1) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 6 = 0$$



12. $x^2 + y^2 - 9 = 0$ என்ற வட்டமும் $x - y + 2 = 0$ என்ற கோடும் இடைவெட்டும் புள்ளிகளினூடு செல்வதும் $x - y - 1 = 0$ என்ற கோட்டை தொடுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 - 9 + \lambda (x - y + 2) = 0$ என்க.

$x^2 + y^2 + \lambda x - \lambda y - 9 + 2\lambda = 0$

மையம் $\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$

ஆரை $= r = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} - 2\lambda + 9} = \sqrt{\frac{\lambda^2 - 4\lambda + 18}{2}}$

மையத்தில் இருந்து வரையும் ^ தூரம் ஆரைக்குச் சமனாகும்.

$$\left|\frac{-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} - 1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\frac{\lambda^2 - 4\lambda + 18}{2}}$$

$$\frac{(\lambda + 1)^2}{2} = \frac{\lambda^2 - 4\lambda + 18}{2}$$

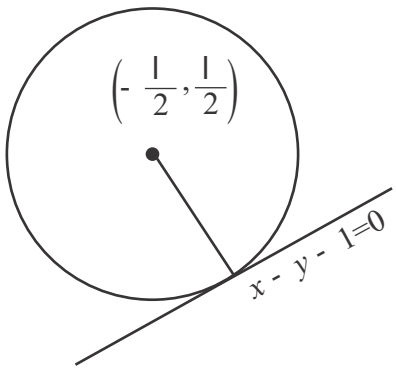
$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 18$$

$$6\lambda = 17$$

$$\lambda = \frac{17}{6}$$

$$x^2 + y^2 - 9 + \frac{17}{6}(x - y + 2) = 0$$

$$6(x^2 + y^2) + 17x - 17y - 20 = 0$$



www.lkedu.lk

13. $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 3 + \lambda (x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1) = 0$ என்னும் இடைவெட்டும் புள்ளி களினூடு செல்வதும் $(-1, 2)$ என்னும் புள்ளியினூடு செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வட்டத்தின் சமன்பாட்டை,

$x^2 + y^2 + 8x + 4y + 3 + \lambda (x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1) = 0$ என்க.

$(-1, 2)$ இனூடு செல்வதால்

$$1 + 4 - 8 + 8 + 3 + \lambda (1 + 4 - 2 - 8 + 1) = 0$$
$$8 + \lambda (-4) = 0$$
$$\lambda = 2$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 4y + 3 + 2(x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1) = 0$$
$$3x^2 + 3y^2 + 12x - 4y + 5 = 0$$

14. $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $2x^2 + 2y^2 - 3x + y - 3 = 0$ என்ற வட்டங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளியினூடு செல்வதும் $x + y - 1 = 0$ என்ற கோட்டில் மையத்தை உடையதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$2x^2 + 2y^2 - 3x + y - 3 + \lambda (x^2 + y^2 - 4) = 0$ என்க.

$$(2 + \lambda)x^2 + (2 + \lambda)y^2 - 3x + y - 3 - 4\lambda = 0$$

மையம் $\left(\frac{3}{2(2 + \lambda)}, - \frac{1}{2(2 + \lambda)} \right)$

மையம் $x + y - 1 = 0$ என்ற கோட்டில் இருப்பதால்

$$\frac{3}{2(2 + \lambda)} - \frac{1}{2(2 + \lambda)} - 1 = 0$$

$$3 - 1 - 2(2 + \lambda) = 0$$
$$2(2 + \lambda) = 2$$
$$2 + \lambda = 1$$
$$\lambda = -1$$

$$2x^2 + 2y^2 - 3x + y - 3 - (x^2 + y^2 - 4) = 0$$
$$x^2 + y^2 - 3x + y + 1 = 0$$

www.lkedu.lk

15. $(2, 0)$ என்னும் புள்ளிகளினூடு சென்று $x^2 + y^2 = 1$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இருசமகூறிட்டு $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ என்னும் வட்டத்தை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்க.

$(2, 0)$ Þ $4 + 0 + 4g + c = 0$ Þ $4g + c = -4$ ——————— (1)

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ என்பவற்றின் பொது நாண் $x^2 + y^2 - 1 = 0$ இன் விட்டமாகும்.

பொது நாண் Þ $2gx + 2fy + c + 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ இன் மையம் $(0, 0)$ இப் பொது நாணில் அமையும்

Þ $0 + 0 + c + 1 = 0$

$c = -1$ ——————— (2)

(1) Þ $4g - 1 = -4$

$4g = -3$

$g = -\frac{3}{4}$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ என்பன நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுவதால்

$g_1 = 0$ $f_1 = -2$ $c_1 = -5$

$2gg_1 + 2ff_1 = c + c_1$

$0 + 2f(-2) = -1 - 5$

$4f = 6$

$f = \frac{3}{2}$

$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 3y + (-1) = 0$

$2x^2 + 2y^2 - 3x + 6y - 2 = 0$

www.lkedu.lk

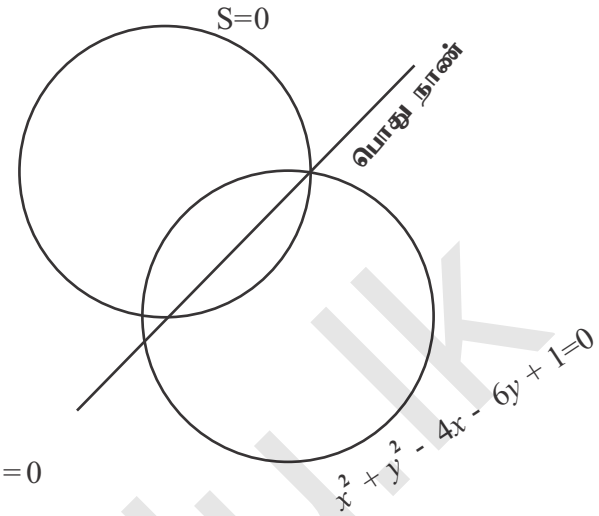
16. (- 1, 2) என்னும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் S என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$ என்னும் வட்டம் இருசமகூறிடுகிறது. S இன் மையம் $x^2 + y^2 - x - 5y + 3 = 0$ என்னும் வட்டத்தில் கிடக்கும் எனக் காட்டுக.

$S^o \quad x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்க.

(- 1, 2) இனூடு செல்வதால்

$1 + 4 - 2g + 4f + c = 0$

$- 2g + 4f + c = - 5$ ——— (1)



பொது நாண் $(2g + 4)x + (2f + 6)y + c - 1 = 0$

பரிதியை இருகூறிடுவதால் மையம் (- g, - f) பொது நாணில் இருக்க.

$2(g + 2)(- g) + 2(f + 3)(- f) + c - 1 = 0$

$- 2g^2 - 2f^2 - 4g - 6f + c - 1 = 0$

$- 2g^2 - 2f^2 - 4g - 6f - 5 - 4f + 2g - 1 = 0$

$- 2g^2 - 2f^2 - 2g - 10f - 6 = 0$

$g^2 + f^2 + g + 5f + 3 = 0$

$- g = x \qquad - f = y$

$x^2 + g^2 - x - 5y + 3 = 0$

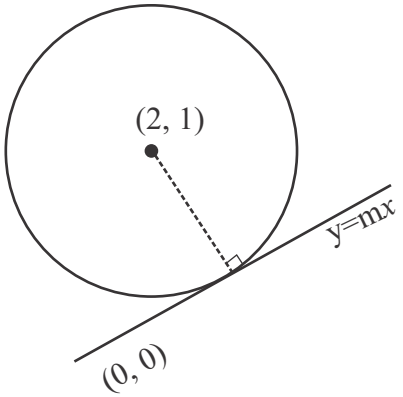
17. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம், ஆரை என்பவற்றைக் காண்க.

உற்பத்தியில் இருந்து தொடலியின் சமன்பாட்டை காண்க. $5x + 12y = 35$ என்பது இவ்வட்டத்தின் ஓர் தொடலி எனக் காட்டுக.

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1^2$

மையம் (2, 1) ஆரை = 1



www.lkedu.lk

தொடலியின் சமன்பாடு $y = mx$ என்க.

$$\frac{|2m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = -1$$

$$(2m - 1)^2 = m^2 + 1$$
$$3m^2 - 4m = 0$$
$$m(3m - 4) = 0$$

$m = 0$ அல்லது $m = \frac{4}{3}$

$\therefore$ தொடலியின் சமன்பாடு

$y = 0$, $\qquad 3y = 4x$

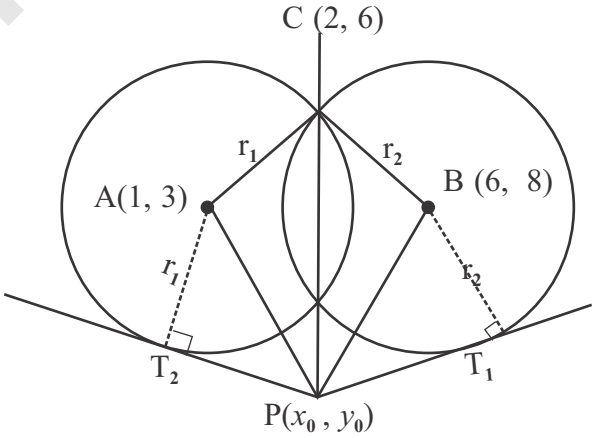
$5x + 12y - 35 = 0$ என்பதற்கு $(2, 1)$ இல் இருந்து ^ தூரம்

$$d = \frac{|10 + 12 - 35|}{13} = 1 = \text{ஆரை}$$

$\therefore 5x + 12y - 35 = 0$ ஓர் தொடலியாகும்.

18. இரு வட்டங்களின் மையங்கள் $A(1, 3)$, $B(6, 8)$ ஆகும். இவ்விரு வட்டங்களும் $C(2, 6)$, D ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. இவ்வட்டங்களின் சமன்பாட்டைக் காண்க. நேர்கோடு CD இன் சமன்பாட்டை காண்க. P இல் இருந்து ஒவ்வொரு வட்டத்திற்கும் வரைந்த தொடலியின் நீளம் சமன் எனின், P ஆனது CD இன் மீது இருக்கும் எனக் காட்டுக.

$r_1^2 = (2 - 1)^2 + (6 - 3)^2 = 10$
$r_2^2 = (6 - 2)^2 + (8 - 6)^2 = 20$



வட்டங்களின் சமன்பாடு

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ ⇒ $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$
$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 20$ ⇒ $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 80 = 0$

CD ⇒ $10x + 10y - 80 = 0$
$x + y - 8 = 0$

$P(x_0 , y_0)$ என்க.

www.lkedu.lk

$PT_1 = PT_2$

$PT_1^2 = PT_2^2$

$PB^2 - BT_1^2 = PA^2 - AT_2^2$

$(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 3)^2 - 10 = (x_0 - 6)^2 + (y_0 - 8)^2 - 20$

$-2x_0 - 6y_0 = -12x_0 - 16y_0 + 80$

$10x_0 + 10y_0 - 80 = 0$

$x_0 + y_0 - 8 = 0$

$\therefore$ P ஆனது CD இல் இருக்கும்.

19. $x - 5 = 0$ என்னும் கோடு l இன் எல்லாப் பெறுமானங்களிற்கும் $x^2 + y^2 - (6 + l)x - 6y + (5l - 11) = 0$ என்னும் வட்டத்தை ஒரே புள்ளிகளில் வெட்டு கிறது எனக் காட்டுக. இப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$x^2 + y^2 - (6 + l)x - 6y + (5l - 11) = 0$

$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 11 - l(x - 5) = 0$

l இன் எல்லாப் பெறுமானதத்திற்கும்

$S = x^2 + y^2 - 6x - 6y - 11 = 0$, $U = x - 5 = 0$ என்பன ஒரே புள்ளியில் வெட்டுகின்றன.

$x = 5$

Þ $25 + y^2 - 30 - 6y - 11 = 0$

$y^2 - 6y - 16 = 0$

$(y - 8)(y + 2) = 0$

$y = 8$ அல்லது -2

வெட்டும் புள்ளிகள் $(5, 8), (5, -2)$

20. A, B என்பன $x - y = 0$ என்னும் கோட்டில் உள்ள இரு புள்ளிகளாகும்.

$S = x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$ என்னும் வட்டத்திற்கு A, B இல் இருந்து வரைந்த தொடலியின் நீளம் 4 அலகு எனின், A, B இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. புள்ளிகள் A, B இனூடு செல்கின்ற எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

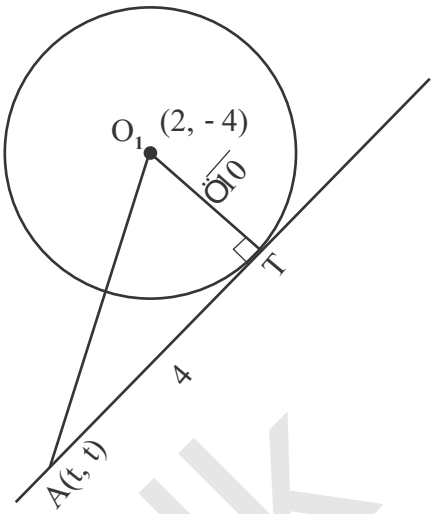
புள்ளிகள் A, B இனூடு சென்று $S = 0$ இன் பரிதியை இருகூறாக்குகின்ற வட்டத்தின் சமன்பாடு $3x^2 + 3y^2 - 4x + 16y - 18 = 0$ எனக் காட்டுக.

www.lkedu.lk

$S = x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$

மையம் $(2, -4)$

$r = \sqrt{10}$ ——————— (1)



பைதகரஸ் தேற்றம்

$(t-2)^2 + (t+4)^2 = 16 + 10$

$T^2 + 2t - 3 = 0$

$(t+3)(t-1) = 0$

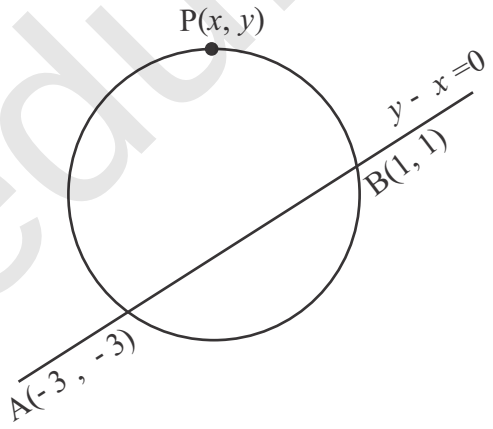
$t = -3$ அல்லது 1

$\therefore A(-3, -3)$, $B(1, 1)$

AB ஐ விட்டமாக உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு

$(y+3)(y-1) + (x+3)(x-1) = 0$

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0$



A, B இனூடு செல்லும் வட்டங்களின் பொதுச் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 + \lambda(y - x) = 0$ ——————— (2) என எழுதலாம்.

λ = மெய்ப்பரமானம்

பொது நாண் $\Rightarrow$ $6x - 6y - 16 + \lambda(y - x) = 0$

(1) $\otimes$ (2) $\Rightarrow$

$S = 0$ இன் பரிதியை இருகூறாக்குவதால்

$(2, -4)$ $\Rightarrow$ $12 + 24 - 16 + \lambda(-6) = 0$

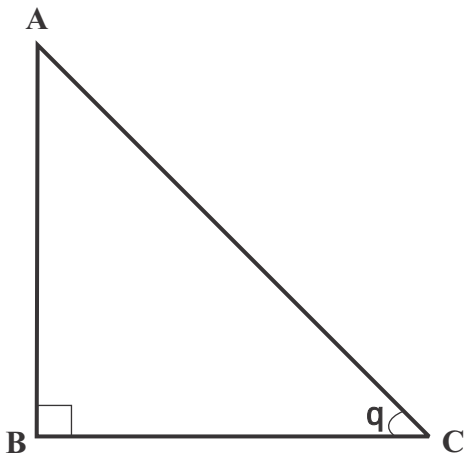
$$\lambda = \frac{10}{3}$$

$\therefore$ (2) $\Rightarrow$ $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 + \frac{10}{3}(y - x) = 0$

$3(x^2 + y^2) - 4x + 16y - 4 = 0$

திரிகோணகணிதம்

01.



$$\text{Sin}\,q = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Cos}\,q = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan q = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan q = \frac{\text{Sin}\,q}{\text{Cos}\,q}$$

$$\frac{1}{\text{Sin}\,q} = \text{Co sec}\,q$$

$$\frac{1}{\text{Cos}\,q} = \text{Sec}\,q$$

$$\frac{1}{\tan q} = \text{Cot}\,q$$

02. $\text{Sin}^2 q + \text{Cos}^2 q = 1$

$1 + \tan^2 q = \text{Sec}^2 q$

$1 + \text{Cot}^2 q = \text{Co sec}^2 q$

03. $\text{Sin}(A+B) = \text{Sin}\,A\,\text{Cos}\,B + \text{Cos}\,A\,\text{Sin}\,B$

$\text{Sin}(A-B) = \text{Sin}\,A\,\text{Cos}\,B - \text{Cos}\,A\,\text{Sin}\,B$

$\text{Cos}(A+B) = \text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,B - \text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B$

$\text{Cos}(A-B) = \text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,B + \text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

04. $$\text{Sin}\,C + \text{Sin}\,D = 2\,\text{Sin}\,\frac{(C+D)}{2}.\,\text{Cos}\,\frac{(C-D)}{2}$$

$$\text{Sin}\,C - \text{Sin}\,D = 2\,\text{Cos}\,\frac{(C+D)}{2}.\,\text{Sin}\,\frac{(C-D)}{2}$$

$$\text{Cos}\,C + \text{Cos}\,D = 2\,\text{Cos}\,\frac{(C+D)}{2}.\,\text{Cos}\,\frac{(C-D)}{2}$$

$$\text{Cos}\,C - \text{Cos}\,D = 2\,\text{Sin}\,\frac{(C+D)}{2}.\,\text{Sin}\,\frac{(D-C)}{2}$$

05. $2\,\text{Sin}\,A\,\text{Cos}\,B = \text{Sin}(A+B) + \text{Sins}(A-B)$

$2\,\text{Cos}\,A\,\text{Sin}\,B = \text{Sin}(A+B) - \text{Sin}(A-B)$

$2\,\text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,B = \text{Cos}(A+B) + \text{Cos}(A-B)$

$2\,\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B = \text{Cos}(A-B) - \text{Cos}(A+B)$

www.lkedu.lk

மடங்குக் கோணங்கள்

06. $\text{Sin } 2A = 2\text{Sin } A \text{ Cos } A$

$$\text{Sin } 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\text{Cos } 2A = \text{Cos}^2 A - \text{Sin}^2 A$$
$$= 2\text{Cos}^2 A - 1$$
$$= 1 - 2\text{Sin}^2 A$$
$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

07. $\text{Sin } 3A = 3\text{Sin } A - 4\text{Sin}^3 A$

$\text{Cos } 3A = 4\text{Cos}^3 A - 3\text{Cos} A$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^2 A}{1-3\tan^2 A}$$

பொதுத் தீர்வுகள்

08. $\text{Sin } q = \text{Sin } a$ ஆயின்

$q = np + (-1)^n a$, $n \hat{I}$ Z

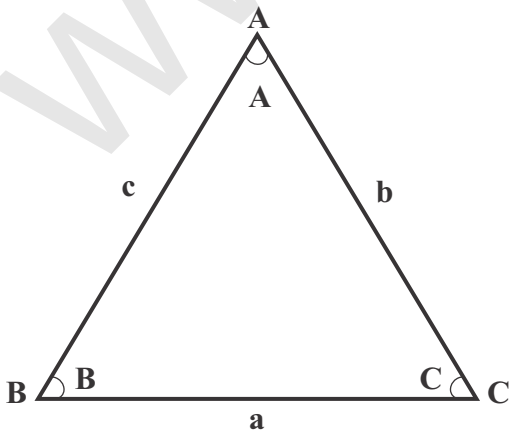
$\text{Cos } q = \text{Cos } a$ ஆயின்

$q = 2np \pm a$, $n \hat{I}$ Z

$\tan q = \tan a$ ஆயின்

$q = np + a$, $n \hat{I}$ Z

09. யாதாயினும் ஓர் முக்கோணிக்கு வழமையான குறியீடுகளுடன்



Sin விதி

$$\frac{\text{Sin } A}{a} = \frac{\text{Sin } B}{b} = \frac{\text{Sin } C}{a}$$

Cos விதி

$$\text{Cos } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{Cos } B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\text{Cos } C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

www.lkedu.lk

01. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ எனவும் $90^0 < \theta < 180^0$ ஆகவும் தரப்படும் போது

i) $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ எனவும் ii) $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ எனவும் காட்டுக.

i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$

$= 1 - \frac{16}{25}$

$\sin^2\theta = \frac{9}{25}$

$\sin^2\theta = \pm\frac{3}{5}$

$\boxed{\sin\theta = \frac{3}{5}}$. $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ பொருந்தாது.

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{9}{10}} = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$

$= \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$45^0 < \frac{\theta}{2} < 90^0$

$\therefore \boxed{\sin\frac{\theta}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}}$

ii) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$

$\boxed{\tan\theta = -\frac{3}{4}}$

www.lkedu.lk

02. $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ இற்கு $\cos x = -\cos 2x - \sin 2x + \sin x + 1$ தீர்க்க.

$(\cos x - \sin x) = 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x$

$\cos x - \sin x = 2\sin x (\sin x - \cos x)$

$(\cos x - \sin x)(1 + 2\sin x) = 0$

$\cos x - \sin x = 0$

$\cos x = \sin x$

$\tan x = 1 \quad (\cos x \neq 0)$

$x = n\pi + \frac{\pi}{4} : n \in Z$

$n = 0 \quad x = \frac{\pi}{4}$

$n = 1 \quad x = \frac{5\pi}{4}$ பொருந்தாது.

or

$2\sin x = -1$

$\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

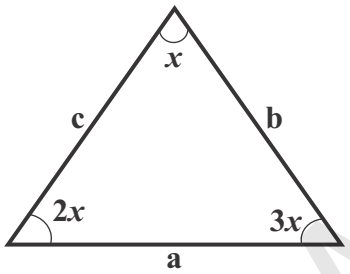
$x = n\pi + (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) : n \in Z$

$n = 0 : - \quad x = \frac{-\pi}{6}$

$n = 1 : - \quad x = \frac{7\pi}{6}$ பொருந்தாது.

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ இற்குரிய தீர்வுகள் $\left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right\}$

03. ΔABC இல் கோணங்கள் 1 : 2 : 3 எனும் விகிதத்தில் அமைந்திருப்பின் அதே ஒழுங்கில் பக்கங்கள் முறையே $1 : \sqrt{3} : 2$ எனும் விகிதத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.



$x + 2x + 3x = 180^0$

$6x = 180^0$

$x = 30^0$

$2x = 60^0$

$3x = 90^0$

Using Sin rul

$$\frac{\sin 30}{a} = \frac{\sin 60}{b} = \frac{\sin 90}{c}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{a} = \frac{1}{c} \qquad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{b} = \frac{1}{c}$$

$c = 2a \qquad c\sqrt{3} = 2b$

$2a\sqrt{3} = 2b$

$\sqrt{3}\,a = b$

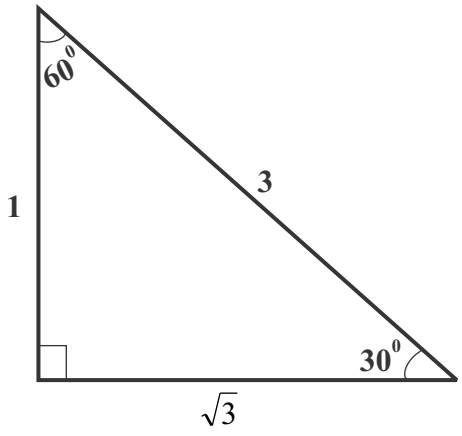
$a : b : c$

$= a : \sqrt{3}\,a : 2a$

$= 1 : \sqrt{3} : 2$

மேலுள்ள முடிவைப் பயன்படுத்தி $\cos 15^0$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

www.lkedu.lk



$\text{Cos}\,30^0 = \sqrt{3}/2$

$2\text{Cos}^2 15^0 - 1 = \sqrt{3}/2$

$\text{Cos}^2 15^0 = \dfrac{1+\sqrt{3}/2}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

$\text{Cos}15^0 = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\text{Cos}15^0 > 0$

$\text{Cos}15^0 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)2/2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

04. $\text{Cos}^4 \pi/8 + \text{Cos}^4 3\pi/8 + \text{Cos}^4 5\pi/8 + \text{Cos}^4 7\pi/8 = 3/2$ என நிறுவுக.

$$= \left(\frac{1+\text{Cos}\,\pi/4}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\text{Cos}\,3\pi/4}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\text{Cos}\,5\pi/4}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\text{Cos}\,7\pi/4}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1+1/\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-1/\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\text{Cos}\,3\pi/4}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\text{Cos}\,\pi/4}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= 2\left(\frac{1+2\sqrt{2}+2}{8}\right) + 2\left(\frac{1-2\sqrt{2}+2}{8}\right)$$

$= 1/4\,[6]$

$= 3/2$

05. $\text{Cos}\,x \,.\, \text{Cos}\,2x + \dfrac{(\text{Sin}\,2x)^2}{2\text{Cos}\,x} = \text{Cos}\,x$ என நிறுவுக.

$\text{L.H.S} = \text{Cos}\,x \,.\, \text{Cos}\,2x + \dfrac{(2\text{Sin}\,x \,.\, \text{Cos}\,x)^2}{2\text{Cos}\,x}$

$= \text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,2x + 2\text{Sin}^2 x \,.\, \text{Cos}\,x$

$= \text{Cos}\,x\,(2\text{Cos}^2 x - 1 + 2\text{Sin}^2 x)$

$= \text{Cos}\,x\,[2\,(\text{Cos}^2 x + \text{Sin}^2 x) - 1]$

$= \text{Cos}\,x\,[2 - 1]$

$= \text{Cos}\,x$

$= \text{R.H.S}$

06. $\tan 53^0 = a,\ \tan 31^0 = b$ எனின் $\text{Sin}\, 22^0 = \dfrac{a - b}{\sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{b^2 + 1}}$ எனக் காட்டுக.

$\text{Sin}\, 22^0 = \text{Sin}\,(53^0 - 31^0)$

$= \text{Sin}\, 53^0\ \text{Cos}\, 31^0 - \text{Cos}\, 53^0 . \text{Sin}\, 31^0$

$= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{b^2+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}}$

$= \dfrac{a - b}{\sqrt{a^2+1}\ .\ \sqrt{b^2+1}}$

07. $\sqrt{3}\ \text{Cos}\, x + \text{Sin}\, x$ ஐ $R\,\text{Sin}\,(x + a)$ எனும் வடிவத்தில் காட்டுக.

இங்கு $R > 0$, $0 < a < \pi/2$ ஆகும். இதிலிருந்து $\sqrt{3}\ \text{Cos}\, 2x + \text{Sin}\, 2x + 1 = 0$ இனைத் தீர்க்குக.

$2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{Cos}\, x - \dfrac{1}{2}\text{Sin}\, x\right) = 2\left(\text{Sin}\, \dfrac{\pi}{3}\text{Cos}\, x + \text{Cos}\, \dfrac{\pi}{3} . \text{Sin}\, x\right)$

$= 2\left(\text{Sin}\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)\right)$

$R = 2, \qquad a = \dfrac{\pi}{3}$

$\sqrt{3}\ \text{Cos}\, 2x + \text{Sin}\, 2x = -1$

$2\ \text{Sin}\left(\dfrac{\pi}{3} + 2x\right) = -1$

$\text{Sin}\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} = \text{Sin}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$2x + \dfrac{\pi}{3} = n\pi + (-1)^n\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) : n \in Z$

$x = \dfrac{1}{2}\left\{n\pi + (-1)^n\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) - \dfrac{\pi}{3}\right\}$

www.lkedu.lk

08. $x = \sin\theta$, $2\sin\theta - \cos\theta = 2$ எனவும் தரப்படின், $\theta \neq \pi/2$ இற்கு $\sqrt{1-x^2} = 2(x-1)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $\tan\theta$ இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு $\tan 2\theta = -\frac{24}{7}$ எனக்காட்டுக.

$2\sin\theta - \cos\theta = 2$ ——————— (1)

$2x - \sqrt{1-\sin^2\theta} = 2$

$2x - \sqrt{1-x^2} = 2$

$\sqrt{1-x^2} = 2(x-1)$

$(1-x^2) = 4(x-1)^2$

$1-x^2 = 4x^2 - 8x + 4$

$5x^2 - 8x + 3 = 0$

$x = 1$ or $x = \frac{3}{5}$

$\sin\theta = 1$

$\theta = \pi/2$

பொருந்தாது.

$\sin\theta = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = 2 \times \frac{3}{5} - 2$ (by(1))

$\cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\tan\theta = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\times\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$

$= \frac{-6/4}{7/16}$

$\tan 2\theta = \frac{-24}{7}$

09. $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}(2)$ ஐ தீர்க்குக.

$a + b = \alpha$

$\tan(a+b) = \tan\alpha$

$\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = \tan\alpha$

$\frac{x+1+x-1}{1-(x^2-1)} = 2$

$2x = 2(2-x^2)$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = -2$ or $x = 1$

$x = -2$ எனின் L.H.S < 0 R.H.S $= \tan^{-1}(2) > 0$

$\therefore x = -2$ பொருந்தாது $\therefore$ தீர்வு $x = 1$

www.lkedu.lk

12. $t = \tan \theta/2$ ஐப் பயன்படுத்தி $\sin\theta + 2\cos\theta = 1$ எனும் சமன்பாட்டின் $\tan \theta/2 = -\frac{1}{3}$ or 1 எனக் காட்டுக.

$$\frac{2\tan \theta/2}{1+\tan^2 \theta/2} + \frac{2\left(1-\tan^2 \theta/2\right)}{1+\tan^2 \theta/2} = 1$$

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2\left(1-t^2\right)}{1+t^2} = 1$$

$$2t + 2 - 2t^2 = 1 + t^2$$

$$3t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$(3t+1)(t-1) = 0$$

$$t = \frac{-1}{3} \quad \text{or} \quad t = 1$$

$$\therefore \tan\theta = -\frac{1}{3} \quad \text{or} \quad \tan\theta = 1$$

13. i) $0 < \theta, \phi < 180^0$ ஆக இருக்கும் போது $\tan(\theta - \phi) = 3$ எனவும் $\tan\theta + \tan\phi = 1$ எனவும் இருப்பின் θ, ϕ இன் சாத்தியமான பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$\frac{\tan\theta - \tan\phi}{1+\tan\theta.\tan\phi} = 3$$

$$\tan\theta - \tan\phi = 3(1+\tan\theta.\tan\phi)$$

ceÎ , $\tan\theta - \tan\phi = k$, $\tan\phi.\tan\theta = m$

$$k = 3(1+m) \quad (1)$$

$$\frac{\tan\theta - \tan\phi}{1+\tan\theta.\tan\phi} = 3$$

$$(3(1+m))^2 + 4m = 1$$

$$9 + 18m + 9m^2 + 4m = 1$$

$$9m^2 + 22m + 8 = 0$$

$$9m^2 + 18m + 4m + 8 = 0$$

$$9m(m+2) + 4(m+2) = 0$$

$$m = -2 \quad \text{or} \quad m = -\frac{4}{9}$$

$\tan\theta - \tan\phi = -3$ ü
$\tan\theta + \tan\phi = 1$ ý
þ

$$2\tan\theta = -2$$

$$\tan\theta = -1$$

$$\boxed{\theta = 3\frac{\pi}{4}}$$

$$\tan(\pi - \phi) = 1$$

$$\pi - \phi = \pi/4$$

$$\phi = 3\pi/4$$

$$2\tan\phi = 4$$

$$\tan\phi = 2$$

$$\phi = \tan^{-1}(2)$$

$$(\tan\theta + \tan\phi)^2 = 1^2$$

$$(\tan\theta - \tan\phi)^2 + 4\tan\phi\tan\theta = 1$$

$$k^2 + 4m = 1$$

$m = -2$ எனின்

$$k = 3(1-2) = -3$$

$m = -4/9$ Þ

$$k = 3\left(1 - -\frac{4}{9}\right) = 3 \times \frac{5}{9}$$

$$= 5/3$$

$$k = 5/3$$

$\tan\theta - \tan\phi = 5/3$ ü
$\tan\theta + \tan\phi = 1$ ý
þ

$$2\tan\theta = \frac{8}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{4}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$2\tan\phi = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\tan\phi = -\frac{1}{3} = -0.3 < -1$$

$$\phi = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

www.ikedu.lk

10. $\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta$ என்பதை $r\cos(\theta - \alpha)$ இல் வடிவத்தில் காட்டுக. இங்கு $r > 0$, $0 < \alpha < 90^0$ இதிலிருந்து $f(\theta) = \dfrac{1}{3 + \cos 2\theta + \sqrt{2}\sin 2\theta}$ இன் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானம் காண்க.

$$\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\theta\right) = \sqrt{3}\,(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta)$$

$$= \sqrt{3}\cos(\theta - \alpha)$$

$$r = \sqrt{3},\ \alpha = \cos^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)$$

$f(\theta) = \dfrac{1}{3 + \cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta}$ இனது உயர்வு, இழிவுக்கு

$= \dfrac{1}{3 + \sqrt{3}\cos(2\theta - \alpha)}$ ஆகும்.

$$f(\theta)\max = \frac{1}{3 - \sqrt{3}}$$

$$f(\theta)\min = \frac{1}{3 + \sqrt{3}}$$

11. $\sin(60^0 + \theta) = \cos(\theta - 60^0)$ ஆகுமாறு θ இன் ஒரு பெறுமானத்தைக் காண்க. இதிலிருந்து $1 + \sin(120 - 2\theta) = 2\cos^2(\theta - 30)$ இற்குரிய θ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$\sin 60.\cos\theta + \cos 60\sin\theta = \cos\theta\cos 60 + \sin\theta.\sin 60$

$$\sqrt{3}/2\cos\theta + \sin\theta/2 = \cos\theta/2 + \sqrt{3}/2\sin\theta$$

$$(\sqrt{3} - 1)\cos\theta = (\sqrt{3} - 1)\sin\theta$$

$$\tan\theta = 1\ (\cos\theta \neq 0)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(180 - 60 + 2\theta) = 2\cos^2(\theta - 30^0) - 1$$

$\theta \to 2\theta$ $\quad \sin(60 + 2\theta) = \cos(2\theta - 60^0)$

$$2\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \pi/8$$

www.lkedu.lk

ii) $\tan^{-1}(a) + \tan^{-1}(b) = \tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து

$\tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{7}{24}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

$a + b = r \qquad \tan a = a, \quad \tan b = b, \quad \tan r = \frac{a+b}{1-ab}$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = \frac{a + b}{1 - ab}$$

$$\therefore a + b = \tan^{-1}\left(\frac{a + b}{1 - ab}\right) = r$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{11} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{7}{24}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{48 + 77}{11 \times 24 - 14}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{125}{250}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

iii) ΔABC இல் சைன் விதியைப் பயன்படுத்தி $\frac{\sqrt{\sin A} - \sqrt{\sin B}}{\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B}} = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{a - b}$

எனக் காட்டுக.

சைன் விதிப்படி $\sin A = ak$, $\sin B = bk$, $\sin C = ck$

$$= \frac{\left(\sqrt{\sin A} - \sqrt{\sin B}\right)^2}{\left(\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B}\right)\left(\sqrt{\sin A} - \sqrt{\sin B}\right)}$$

$$= \frac{\sin A + \sin B - 2\sqrt{\sin A} \times \sqrt{\sin B}}{\sin A - \sin B}$$

$$= \frac{ak + bk - 2\sqrt{akbk}}{ak - bk}$$

$$= \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{a - b}$$

www.lkedu.lk

14. i) $8\cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 3\theta - 1 = \frac{\sin 7\theta}{\sin\theta}$ என நிறுவுக. இங்கு θ இனது 0 or π இன் நிறையெண் மடங்கு அல்ல.

$$LHS = 8\underbrace{\cos\theta \sin\theta}\ \cos 2\theta\cos 3\theta - \sin\theta$$
$$= 4\sin 2\theta \cdot \cos 2\theta\cos 3\theta - \sin\theta$$
$$= 2\sin 4\theta \cos 3\theta - \sin\theta$$
$$= \sin 7\theta + \sin\theta - \sin\theta$$
$$= \sin 7\theta$$
$$= RHS$$

இதிலிருந்து $\cos\theta\cos 2\theta \cdot \cos 3\theta = {}^{1}\!/_{4}$ இன் தீர்வுகளை 0^0 இற்கும் 180^0 இற்குமிடையே காண்க.

$$\frac{1}{8}\left(\frac{\sin 7\theta}{\sin\theta} + 1\right) = \frac{1}{4}$$
$$\frac{\sin 7\theta}{\sin\theta} + 1 = 2$$
$$\sin 7\theta = \sin\theta$$
$$\sin 7\theta = \sin\theta$$
$$7\theta = n\pi + (-1)^n \theta : n \in Z$$

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$7\theta = \theta$	$7\theta = \pi - \theta$	$7\theta = 2\pi + \theta$	$7\theta = 3\pi - \theta$	$7\theta = 4\pi + \theta$
$6\theta = 0$	$8\theta = \pi$	$6\theta = 2\pi$	$8\theta = 3\pi$	$6\theta = 4\pi$
$\theta = 0$	$\theta = {}^{\pi}\!/_{8}$	$\theta = {}^{\pi}\!/_{3}$	$\theta = {}^{3\pi}\!/_{8}$	$\theta = \frac{2\pi}{3}$

$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
$7\theta = 5\pi - \theta$	$7\theta = 6\pi + \theta$	$7\theta = 7\pi - \theta$
$8\theta = 5\pi$	$6\theta = 6\pi$	$8\theta = 7\pi$
$\theta = {}^{5\pi}\!/_{8}$	$\theta = \pi$	$\theta = \frac{7\pi}{8}$

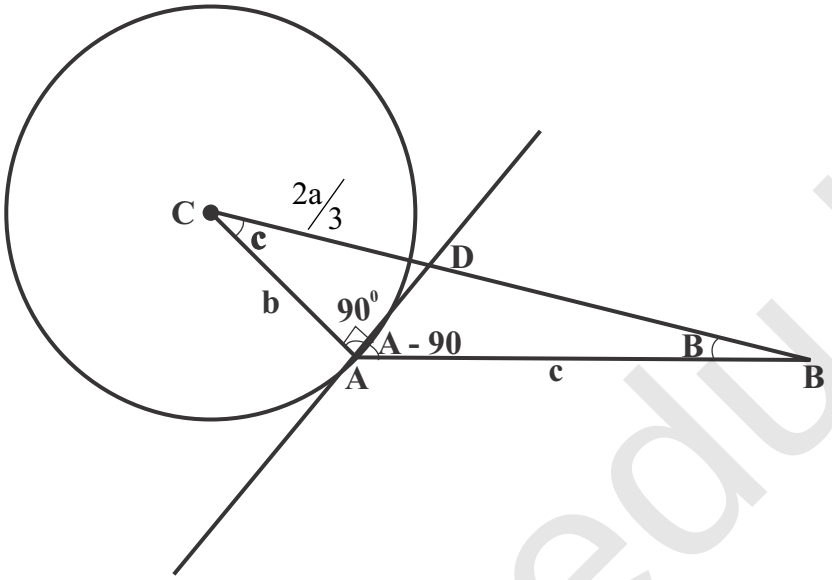
$(0 , 180)$ ற்குள் தீர்வுகளாக $\left\{\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}$

www.ikedu.lk

ii) முக்கோணி ஒன்றிற்கான கோசைன் விதியைக் கூறுக.

கோணம் A ஆனது விரிகோணமாகவுள்ள முக்கோணியைக் கருதுக.

C ஐ மையமாகவும் Aயினூடு செல்வதுமான வட்டத்திற்கு A இல் வரையப்பட்ட தொடலி யானது D இல் BC யைச் சந்திக்கின்றது. CD = 2DB எனின், தொடலின் அறிவையும் வழக்கமான குறியீடுகளில் $AC^2 = b^2 (9 Sec^2 c - 8)$ எனக்காட்டுக.



$$\frac{CD}{DB} = 2$$

$$\frac{DB}{CD} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{DB}{CD} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{a}{CD} = \frac{3}{2}$$

$$CD = \frac{2a}{3}$$

$$Cos\,C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3b}{2a}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 3b^2$$

$$a^2 - c^2 = 2b^2$$

$$a^2 = c^2 + 2b^2$$

D ACD இல்

$$Cos\,C = \frac{b}{2a/3}$$

$$Cos\,C = \frac{3b}{2a}$$

$$a = \frac{3b}{2} Sec\ C \quad \text{——————} \quad (1)$$

$$a^2 = \frac{9b^2}{4} Sec^2 C$$

$$c^2 + 2b^2 = \frac{9b^2}{4} Sec^2 C$$

$$4c^2 + 8b^2 = 9b^2 Sec^2 C$$

$$4c^2 = b^2 \left(9 Sec^2 C - 8 \right)$$

www.lkedu.lk

iii) $\text{Cos}^{-1}\left(\frac{63}{65}\right) + 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = \text{Sin}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ என நிறுவுக.

α β γ Sin r

$a + 2b = r$

$\text{Sin}(a + 2b) = \text{Sin } r$

$$\text{Sin}a\ \text{Cos}\ 2b + \text{Cos}a\ \text{Sin}\,2b = \sqrt{1 - \frac{63^2}{65^2}}\left(\frac{1 - 1/5^2}{1 + 1/5^2}\right) + \frac{63}{65}\left(\frac{2 \cdot 1/5}{1 + 1/5^2}\right)$$

$$= \frac{16}{65} \cdot \frac{24}{26} + \frac{63}{65} \cdot \frac{10}{26}$$

$$= \frac{1014}{1690}$$

$$= 3/5$$

$$= \text{Sin } r$$

15. a) ΔABC இல் $\text{Sin}^2A + \text{Sin}^2(A - B) - 2\text{Sin}A\ \text{Cos}B.\ \text{Sin}(A - B) = \text{Sin}^2 B$ என நிறுவுக.

$$\text{LHS} = \text{Sin}^2A + \text{Sin}(A - B)\{\text{Sin}(A - B) - 2\text{Sin}A\,\text{Cos}B\}$$

$$= \text{Sin}^2A + \text{Sin}(A - B)\{\text{Sin}A\,\text{Cos}B - \text{Cos}A\,\text{Sin}B - 2\text{Sin}A\,\text{Cos}B\}$$

$$= \text{Sin}^2A - \text{Sin}(A - B)\text{Sin}(A + B)$$

$$= \text{Sin}^2A - \frac{1}{2}[\text{Cos}2B - \text{Cos}2A]$$

$$= \text{Sin}^2A - \frac{1}{2}[1 - 2\text{Sin}^2B - 1 + 2\text{Sin}^2A]$$

$$= \text{Sin}^2B$$

$$= \text{RHS}$$

b) ΔABC இல் $a : b : c = 4 : 5 : 6$ ஆகும் எனின்,

$\text{Cos}A + \text{Cos}B + \text{Cos}C = \frac{23}{16}$ எனக் காட்டுக.

Using Sin rule $\frac{a}{\text{Sin}A} = \frac{b}{\text{Sin}B} = \frac{c}{\text{Sin}C}$ $\qquad \frac{\text{Sin}A}{4} = \frac{\text{Sin}B}{5} = \frac{\text{Sin}C}{6} = k$

$\frac{a}{4k} = \frac{b}{5k} = \frac{c}{6k}$ $\therefore = \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = t$ என்க.

$$\text{Cos}A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(5t)^2 + (6t)^2 - (4t)^2}{2.5t \cdot 6t} = \frac{45t^2}{60t^2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Cos}B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{16t^2 + 36t^2 - 25t^2}{2.4t \cdot 6t} = \frac{27t^2}{48t^2} = 9/16$$

$$\text{Cos}C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{16t^2 + 25t^2 - 36t^2}{2.4t \cdot 5t} = \frac{5t^2}{40t^2} = 1/8$$

$$\text{Cos}A + \text{Cos}B + \text{Cos}C = \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{1}{8} = \frac{23}{16}$$

www.ikedu.lk

c) $\tan x = \sqrt{\frac{4 - y}{y + 2}}$ எனக் கொள்வோம்.

i) $y = 3\text{Sin}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ எனக் காட்டுக.

ii) $[-\pi, \pi]$ இற்குள் $y = f(x)$ இனை பரும்படியாக வரைக.

$$\tan^2 x = \frac{4 - y}{y + 2} \Rightarrow \text{Sec}^2 x = \frac{4 - y}{2 + y} + 1 \Rightarrow \text{Sec}^2 x = \frac{6}{y + 2}$$

$$2\text{Cos}^2 x = \left(\frac{y + 2}{6}\right)^{-1} 2$$

$$1 + \text{Cos}\, 2x = \frac{y + 2}{3}$$

$$\text{Cos}\, 2x = \frac{y + 2}{3} - 1 = \frac{y - 1}{3}$$

$$y = 3\text{Cos}\, 2x + 1$$

$$y = 3\text{Sin}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$y\,\text{max} = 4$, $\quad \text{Sin}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\quad \pi/2$, $\quad 5\pi/2$

$$2x + \pi/2 = \pi/2 \quad \text{or} \quad 2x = 2\pi$$

$$2x = 0 \qquad x = \pi$$

$$x = 0$$

$y\,\text{min} = -2$ $\quad \text{Sin}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -1 = \text{Sin}\left(-\pi/2\right),\ \text{Sin}\left(3\pi/2\right)$

$$2x + \pi/2 = -\pi/2 \qquad 2x + \pi/2 = 3\pi/2$$

$$2x = -\pi \qquad 2x = \pi$$

$$x = -\pi/2 \qquad x = \pi/2$$

$y = 1$ ஆக

$$\text{Sin}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$2x = -\pi/2$$

$$x = -\pi/4$$

$x = 0 \Rightarrow \quad y = 3 + 1 = 4$

$x = \pi$ ஆக

$$y = 3\text{Sin}\left(5\pi/2\right) + 1$$

$$= 4$$

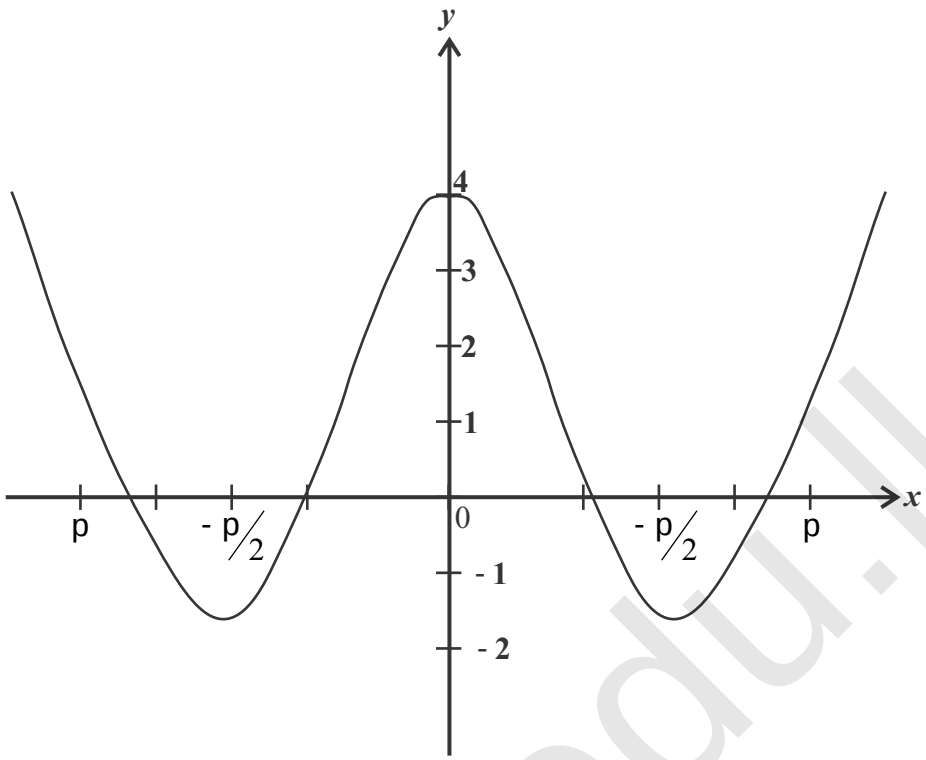
$x = -\pi$ $\quad y = 3\text{Sin}\left(-2\pi + \pi/2\right) + 1$

$$= 3\text{Sin}\left(-3\pi/2\right) + 1$$

$$= 3 + 1$$

$$= 4$$

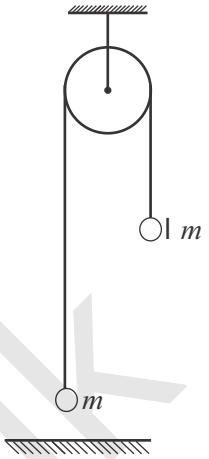
www.ikedu.lk



www.lkedu.lk

கப்பிகள்

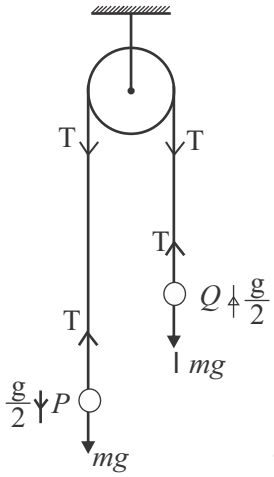
01. ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையின் இரு நுனிகளுடன் திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை p உம் திணிவு λm ஐ உடைய வேறொரு துணிக்கை Q உம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு இழை இறுக்கமாக இருக்க, இத்தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது.



துணிக்கை P ஆனது ஆர்முடுகல் $\frac{g}{2}$ உடன் கீழ்நோக்கி இயங்குகின்றது.

$\lambda = \frac{1}{3}$ எனக் காட்டுக.

துணிக்கை P ஒரு மீள்தன்மையின்றிய கிடை நிலத்தைக் கதி v உடன் மோதுகின்றது. அத்துடன் துணிக்கை Q ஒருபோதும் கப்பியை அடையாது எனின், துணிக்கை p நிலத்தில் மோதும் கணத்திலிருந்து துணிக்கை Q உயர்ந்தபட்ச உயரத்தை அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.



$F = ma$

P) $-mg - T = m\left(\frac{g}{2}\right)$ ——— (1)

Q) $-T - \lambda mg = \lambda m\left(\frac{g}{2}\right)$ ——— (2)

(1) + (2) $\Rightarrow (1-\lambda)mg = (1+\lambda)\frac{mg}{2}$

$(1-\lambda) = (1+\lambda)$

$\lambda = \frac{1}{3}$

Q அதிஉயர் உயரத்தை அடைய எடுத்த நேரம் T என்க.

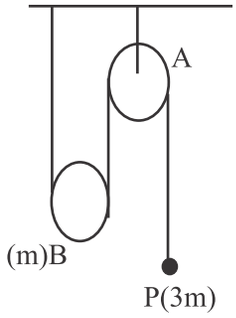
$V = U + gt$

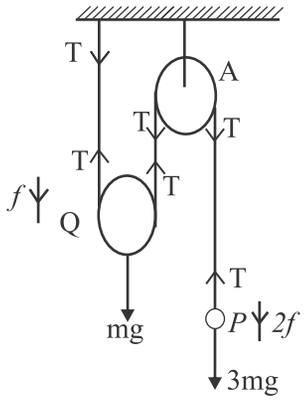
$O = V - gt$

$T = \frac{v}{g}$

www.lkedu.lk

02. உருவில் காட்டப்பட்டவாறு இலேசான நீளா இழை ஒன்று நிலைத்த புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டு அ திணிவுடைய இயங்கும் கப்பி B இன் கீழாகச் சென்று பின் நிலைத்த கப்பி A இன் மேலாகச் சென்று 3m திணிவுடைய துணிக்கை O ஐக் காவுகின்றது. இழையில் உள்ள இழுவையைக் காண்க.





$F = ma$

P) $3mg - T = 3m(2f)$ ———(1)

Q) $2T - mg = mf$ ———(2)

(1) × 2 + (2)Þ

$5mg = 12mf$

$f = \frac{5g}{13}$

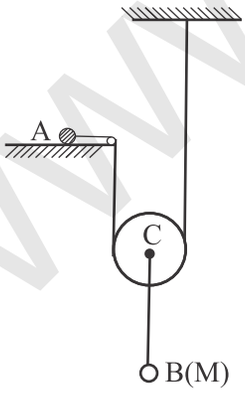
(2)Þ $2T = m\left(\frac{5g}{13}\right) + mg$

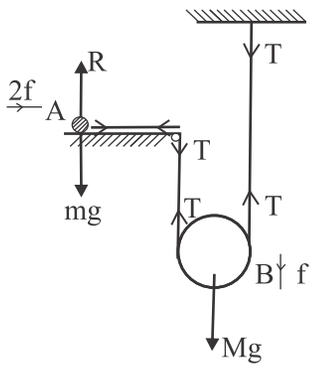
$2T = \frac{18mg}{13}$

$T = \frac{9mg}{13}$

03. (m) திணிவுடைய துணிக்கை A ஆனது, ஒப்பமான கிடை மேசையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. நீளா இழை ஒன்றின் ஒரு முனை இத்துணிக்கையுடன் இணைக்கப்பட்டு மேசையின் விளிப்பின் உள்ள ஒப்பமான கப்பி மேலாகச் சென்று பின் இயங்கும் ஒப்பமான கப்பி C இன் கீழாகச் சென்று மறுமுனை கிடையான பாவுகையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. B எனும் M திணிவுள்ள துணிக்கை C இல் இருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. தொகுதி சுயாதீனமாக புவியீர்ப்பின் கீழ் இயங்க விடப்பட்டால்,

இழையில் இழுவை $\frac{2Mmg}{4m+M}$ எனக் காட்டுக.





$F = ma$

↓ B) $Mg - 2T = Mf$ ———(1)

→ A) $T = m(2f)$ ———(2)

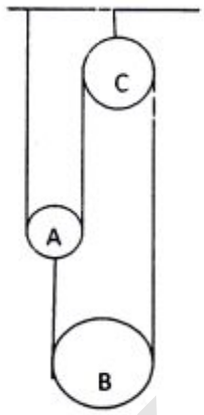
(1) + (2) × 2 Þ $Mg = (M + 4m)f$

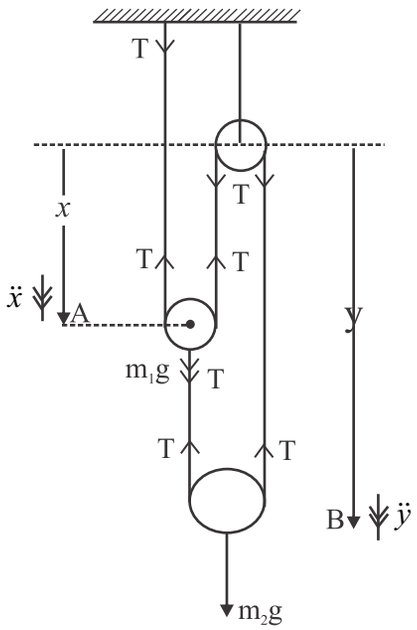
$f = \frac{Mg}{M+4m}$

(2)Þ $T = \frac{2Mmg}{M+4m}$

www.ikedu.lk

04. C நிலையான கப்பி A, B இன் திணிவுகள் முறையே m_1, m_2 ஆகும். இழையிலுள்ள $\frac{3g}{\frac{1}{m_1}+\frac{4}{m_2}}$ இழுவை எனக் காட்டுக.





$x + x + y + y - x = k$

$x + 2y = k$

$\ddot{x} + 2\ddot{y} = 0$ ——— (1)

$F = ma$

A) $\downarrow m_1g + T - 2T = m_1\ddot{x}$

$g - \frac{T}{m_1} = \ddot{x}$ ——— (2)

B) $\downarrow m_2g - 2T = m_2\ddot{y}$

$g - \frac{2T}{m_2} = \ddot{y}$ ——— (3)

(2) + (3) × 2 ⇒

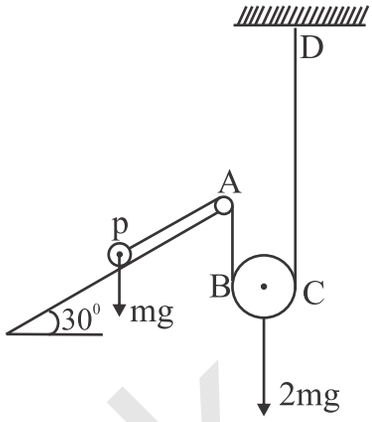
$g - \frac{T}{m_2} + 2g - \frac{4T}{m_2} = \ddot{x} + 2\ddot{y} = 0$ *(by1)*

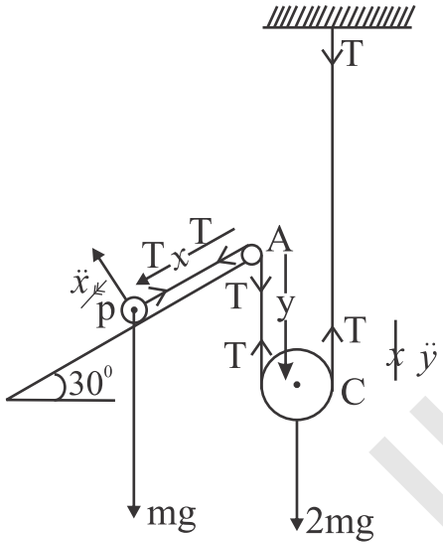
$\frac{T}{m_1} + \frac{4T}{m_2} = 3g$

$T = \frac{3g}{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_2}\right)}$

www.lkedu.lk

05. உருவில் PABCD ஆனது கிடையுடன் 30^0 இல் சாய்ந்துள்ள ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ள திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையாகும். இழை A இல் உள்ள ஒரு நிலைத்த சிறிய ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகவும் திணிவு 2m ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான கப்பிக்குக் கீழாகவும் செல்கின்றது. புள்ளி F நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. PA ஆனது ஓர் அதியுயர் சரிவுக்கோடு வழியே இருக்கும் அதே வேளை AB உம் CDஉம் நிலைக்குத்தானவை. இழை இறுக்கமாக இருக்கத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கையின் ஆர்மூடுகலின் பருமன் இயங்கத்தக்க கப்பியின் ஆர்மூடுகலின் பருமனின் இருமடங்கெனக் காட்டி, இழையின் இழுவையைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளை எழுதுக.





$x + 2y = k$ (K - மாறிலி)

$\ddot{x} + 2\ddot{y} = 0$ $\quad \ddot{y} = f$ என்க.

$\ddot{x} = -2f$ ஆகும்.

$f = ma$

p) 30^0 $\quad mg \sin 30^0 - T = m\ddot{x}$

$\frac{mg}{2} - T = m\ddot{x}$ ——— (1)

C) $\quad 2mg - 2T = 2m\ddot{y}$ ——— (2)

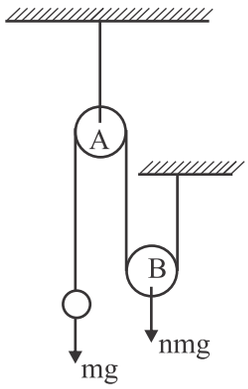
$2mg + \frac{mg}{2} - 3T = m(\ddot{x} + 2\ddot{y}) = 0$

$\frac{5mg}{2} = 3T$

$T = \frac{5mg}{6}$

www.lkedu.lk

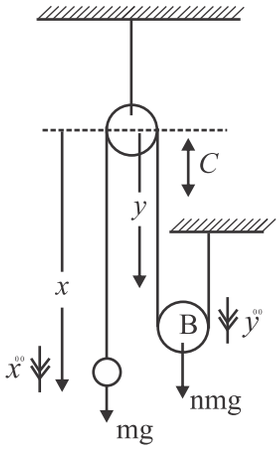
இலவச விநியோகத்திற்கு மட்டும்



06. படத்தில் காட்டியவாறு m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று இழை ஒன்றில் கட்டி இழையானது நிலைத்த கம்பி A ன் மேலாகச் சென்று இயங்கும் கப்பி B இன் கீழாகச் சென்று நிலைத்த புள்ளி ஒன்றுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இயங்கும் கப்பியின் திணிவு nm ஆகும்.

(a) இயங்கும் கம்பியின் ஆர்முடுகல்

(b) தொகுதி ஓய்வில் இருந்து விடுவிக்கப்பட்டு m துணிக்கை l தூரம் இறங்கும் கணத்தில் கப்பி B இன் வேகம் $\left(\frac{g\ell(2-n)}{4+n}\right)^{\frac{1}{2}}$ எனக் காட்டுக. இங்கு $0<n<2$ ஆகும்.



$x + y + y - C = L$

$x + 2y = L + C$

$x + 2y =$ மாறிலி

t குறித்து வகையிட

$\ddot{x} + 2\ddot{y} = 0$ ——— (1)

$f = ma$

M) $\uparrow$ $mg - T = m\ddot{x}$ ——— (2)

B) $\uparrow$ $nmg - 2T = nm\ddot{y}$ ——— (3)

$(2) \times 2 - (3) \Rightarrow$

$m(2-n)g = m(2\ddot{x} - n\ddot{y})$ (by (1))

$(2-n)g = -4\ddot{y} - n\ddot{y}$

$\ddot{y} = -\frac{(2-n)g}{(4+n)}$

(m) l தூரம் சென்ற போது (B) $\frac{l}{2}$ தூரம் செல்லும்.

$V^2 = 4^2 + 2as$

$V^2 = 0 + 2(-\ddot{y})\frac{\ell}{2}$

$V^2 = \frac{(2-n)g\ell}{(4+n)}$

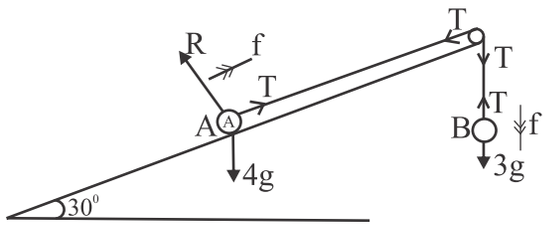
$V = \left(\frac{(2-n)g\ell}{4+n}\right)^{\frac{1}{2}}$

www.ikedu.lk

07. கிடையுடன் 30^0 யில் சாய்ந்துள்ள ஒப்பமான சாய்தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்ட 4kg திணிவுடைய A என்னும் துணிக்கையொன்று இலேசான நீள இழையொன்றினால் இணைக்கப்பட்டு அவ்விழை யானது சாய்தளத்தின் உச்சியில் உள்ள ஒப்பமான நிலைத்த கப்பியின் மேலாகச் சென்று இழையின் மறுமுனையில் 3kg திணிவுடைய B என்னும் துணிக்கையுடன் இணைக்கப்பட்டு சுயாதீனமாகத் தொங்குகிறது.

i) தொகுதியின் ஆர்முடுகல், இழையிலுள்ள இழுவை, இழையினால் கப்பியில் தொழிற்படும் விசை என்பவற்றைக் காண்க.

ii) தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்பட்டு இரண்டு செக்கன்களின் பின்னர் A யின் வேகத்தையும் அது பயணம் செய்த தூரத்தையும் காண்க.



$f = ma$

A)  $T - 4g \sin 300 = 4f$

$T - 2g = 4f$ ——— (1)

B) ↓ $3mg - T = 3f$ ——— (2)

(1) + (2) $g = 7f$

$f = \frac{g}{7}$

$T = 4\left(\frac{g}{7}\right) + 2g$

$T = \frac{18g}{7}$

கப்பியில் தொழிற்படும் விசை $\sqrt{T^2 + T^2 + 2T^2 \cos 60^0}$

$= \sqrt{3}\,T$

$= \sqrt{3}\left(\frac{18g}{7}\right)$

$= \frac{18\sqrt{3}\,g}{7}$



$S = ut + \frac{1}{2}ft^2$

$S = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{g}{7}\right)(2)^2$

$= \frac{2g}{7}$

துணிக்கை A இற்கு



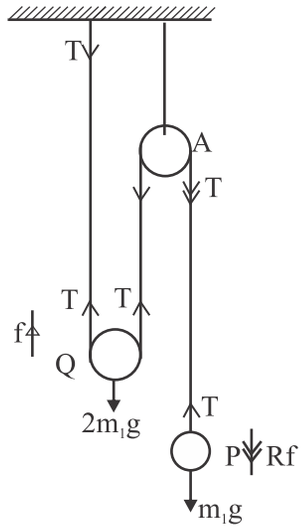
$V = U + ft$

$V = 0 + \frac{g}{7} \times 2$

$V = \frac{2g}{7}$

www.ikedu.lk

08. நிலையான கப்பி A ஆனது கிடைக் கூரையொன்றில் இருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. P எனும் துணிக்கையில் கட்டப்பட்ட இழையொன்று கப்பி A இனூடாகச் சென்று பின் அசையும் கப்பி Q இன் கீழாகச் சென்று அதே கூரையில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. P இன் திணிவுக்கும் Q இன் திணிவுக்கும் இடையிலான விகிதம் 1 : 2 ஆகவும், இழையிலுள்ள இழுவை mg ஆகவும் இருப்பின் P, Q இன் திணிவுகளைக் காண்க.
(எல்லா இழையின் பகுதிகளும் நிலைக்குத்தானவை என எடுக்க.)



$f = ma$

P) $\downarrow$ $m_1g - T = m_1(2f)$

$m_1g - mg = 2m_1f$ ——— (1)

B) $\uparrow$ $2T - 2m_1g = 2m_1f$

$2mg - 2m_1g = 2m_1f$ ——— (2)

(1) + (2) $m_1g - mg = 2mg - 2m_1g$

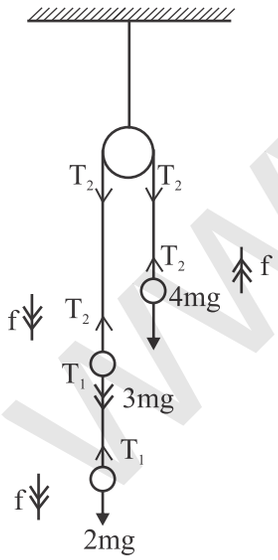
$3m_1g = 3mg$

$m_1 = m$

P இன் திணிவு = m

Q இன் திணிவு = 2m

09. படத்தில் காட்டியவாறு நிலைத்த கப்பி யு இன் மேலாகச் செல்லும் இலேசான நீளா இழையினால் 4m, 3m, 2m திணிவுடைய துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. தொகுதி ஓய்விலிருந்து இயங்கவிடப்பட்டால் துணிக்கைகளின் ஆர்முடுகல் இழைகளில் இழுவை என்பவற்றைக் காண்க.
(கப்பி உராய்வற்றது எனக் கொள்ள)



$f = ma$

2m) $\downarrow$ $2mg - T_1 = 2mf$ ——— (1)

3m) $\downarrow$ $3mg + T_1 - T_2 = 3mf$ ——— (2)

4m) $\uparrow$ $T_2 - 4mg = 4mf$ ——— (3)

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow mg = f\{2m+3m+4m\}$

$mg = 9mf$

$f = \frac{g}{9}$

(1) $\Rightarrow T_1 = 2mg - \frac{2mg}{9}$

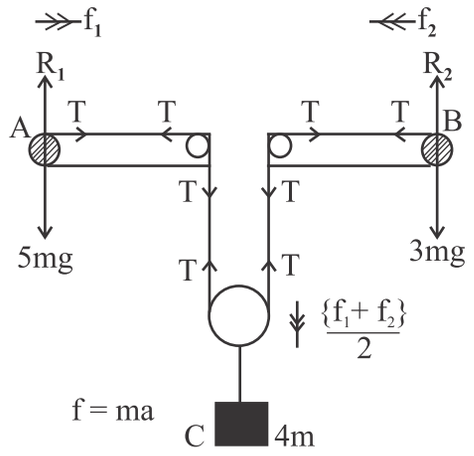
$= \frac{16mg}{9}$

(3) $\Rightarrow T_2 = 4mg + \frac{4mg}{9}$

$= \frac{40mg}{9}$

www.ikedu.lk

10. படத்திலுள்ள ஒப்பமான கிடை மேசை மீதுள்ள 5m, 3m திணிவுடைய A, B எனும் இரு துணிக்கைகள் இலேசான இழை ஒன்றினால் இணைக்கப்பட்டு இழை இலேசான ஒப்பமான இயங்கும் கப்பி C இன் கீழாக செல்கின்றது. கப்பி C இல் 4m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கப்பி C இன் ஆர்முடுகல் $\frac{8g}{23}$ எனக் காட்டுக.



A) $\rightarrow$ $T = 5mf_1$

B) $\leftarrow$ $T = 3mf_1$

C) $\downarrow$ $4mg - 2T = 4m\ \frac{\{f_1 + f_2\}}{2}$

$$4mg - 2T = \frac{4m}{2}\left\{\frac{T}{5m} + \frac{T}{3m}\right\}$$

$$4mg - 2T = 2\left\{\frac{8T}{15}\right\}$$

$$4mg = \frac{16T}{15} + 2T$$

$$4mg = \frac{46T}{15}$$

$$T = \frac{60mg}{46} = \frac{30mg}{23}$$

C இன் ஆர்முடுகல்

$$= \frac{1}{2}\left[f_1 + f_2\right]$$

$$= \frac{T}{2}\left[\frac{1}{5m} + \frac{T}{3m}\right]$$

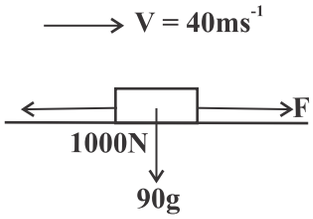
$$= \frac{30g}{23 \times 2}\left[\frac{8}{15}\right]$$

$$= \frac{8g}{23}$$

www.lkedu.lk

வேலை வலு சக்தி

1) 90Kg திணிவுள்ள கார் ஒரு கிடைத்தளத்தில் 1000N தடை விசைக்கெதிராக $40ms^{-1}$ மாறா வேகத்துடன் இயங்குகிறது. காரின் வலுவை காண்க. ($g=10ms^{-2}$) அதே கார் கிடையுடன் α சாய்வில் உள்ள ($Sin\alpha=\frac{1}{9}$) தளத்தில் அதே தடை விசைக்கெதிராக கீழ் நோக்கி $40ms^{-1}$ வேகத்துடன் சீராக இயங்குகிறது. அதன் வலுவை Kw இல் காண்க?



® $F=ma$ பிரயோகிக்க

$F-1000=90\acute{}\ 0$

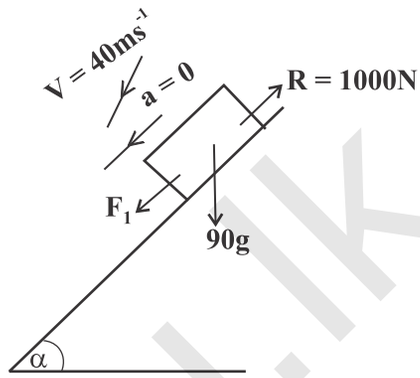
$F=1000N$

வலு $P=F.V$

$=1000\acute{}\ 40$

$=40000w$

$=40Kw$



$F=ma$ பிரயோகிக்க

$F^1+90gSin\alpha-R=90\acute{}\ 0$

$F^1=1000-90\acute{}\ 10\acute{}\ \frac{1}{9}$

$=1000-100$

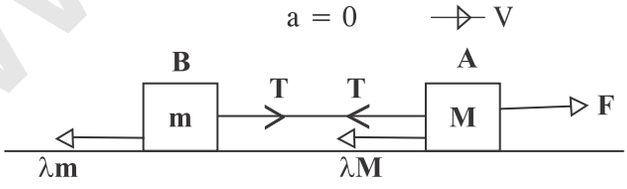
$=900N$

வலு $P^1=F^1V=900\acute{}\ 40$

$=36000W$

$=36Kw$

2) M திணிவுள்ள A எனும் கார் m திணிவுள்ள B எனும் கார் ஒன்றை கிடைப்பாதையில் $\lambda M, \lambda m$ எனும் தடை விசைகளுக்கெதிராக V எனும் மாறா வேகத்துடன் B ஐ இழுத்து செல்கிறது. காரின் வலு $\lambda(M+m)V$ என காட்டுக? இழுக்க பயன்படுத்தும் மீள்தன்மையற்ற இலேசான இழையின் இழுவையைக் காண்க.



தொகுதிக்கு → F=ma பயன்படுத்த

$F-\lambda M-\lambda m=(M+m)\acute{}\ 0$

$F=\lambda\ (M+m)$

$P=F.V=\lambda\ (M+m)V$

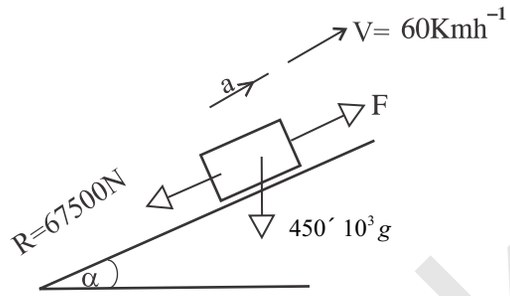
கார் B க்கு → $F=ma$ பாவிக்க

$T-\lambda m=m\acute{}\ o$

$T=\lambda m$

www.lkedu.lk

3) 450×10^3 Kg திணிவுள்ள புகையிரதம் 3000kw வலுவுடன் 70 இல் 1 ஆன பாதை வழியே மேல் நோக்கி $60Kmh^{-1}$ வேகத்துடன் செல்லும் போது ஆர்முடுகல் யாது? இங்கு தடைவிசை 67500N $(g = 9.8\, ms^{-1})$



$$V = \frac{60 \acute{} 10^3}{60 \acute{} 60}$$

$$= \frac{50}{3} ms^{-1}$$

$$3000 \acute{} 10^3 = F \acute{} \frac{50}{3}$$

$$F = 18 \acute{} 10^4 N$$

$F = ma$ பாவிக்க

$$F - 450 \acute{} 10^3 g \sin a - 67500 = 450 \acute{} 10^3 a$$

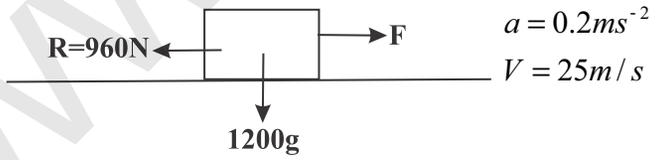
$$F - 450 \acute{} 10^3 \acute{} 9.8 \acute{} \frac{1}{70} - 67500 = 450 \acute{} 10^3 a$$

$$18 \acute{} 10^4 - 450 \acute{} 10^3 \acute{} 0.14 - 67500 = 450 \acute{} 10^3 a$$

$$180 - 45 \acute{} 1.4 - 67.5 = 450a$$

$$a = \frac{49.5}{450} = 0.11 ms^{-2}$$

4) கிடையான பாதையில் பயணம் செய்யும் கார் ஒன்றின் திணிவு 1200 Kg ஆகும். மொத்த தடை விசை 960N ஆகும். ஆர்முடுகல் $0.2ms^{-2}$ ஆக இருக்கும் போது வேகம் $25ms^{-1}$ ஆயின் எஞ்சினின் வலு 30KN எனக் காட்டுக.



® $F = ma$

$$F - 960 = 1200 \acute{} 0.2$$

$$F = 240 + 960$$

$$= 1200N$$

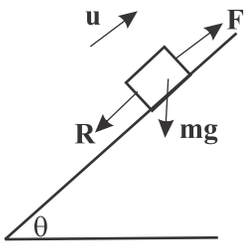
$$P = F.V = 1200 \acute{} 25 = 30000w$$

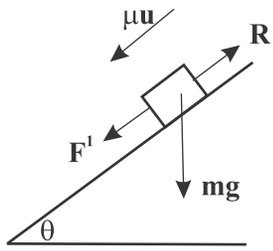
$$= 30Kw$$

www.lkedu.lk

5) கிடையுடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள வீதியில் மேல் நோக்கி m திணிவுடைய வாகனம் U எனும் சீரான வேகத்துடன் இயங்குகிறது. இயக்கத்துக்கான தடை R ஆகும். வலு H ஆகும். அதே வலுவுடன் அதே தடையுடன் அதே பாதையில் μu எனும் மாறா வேகத்துடன் கீழ் நோக்கி இயங்குமாயின்,

$R = \left(\frac{m+1}{m-1}\right) mg\,Sin\theta$ எனக் காட்டுக.





$H = F.u.$

$F = ma$ பாவிப்பின்

$F - R - mg\,Sin\theta = 0$

$R = \frac{H}{u} - mg\,Sin\theta$

$R = Rm - mmg\,Sin\theta - mg\,Sin\theta$

$mg\,Sin\theta\,(1+m) = R\,(m-1)$

$R = \frac{(1+m)\,mg\,Sin\theta}{m-1}$

$H = F.mu$

$F = ma$

$F^1 + mg\,Sin\theta = R$

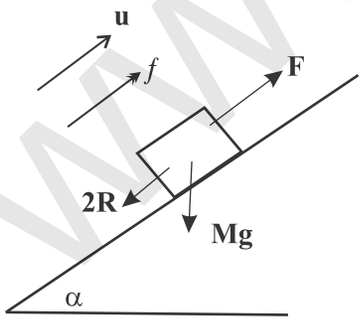
$\frac{H}{mu} + mg\,Sin\theta = R$

$\frac{H}{u} + mmg\,Sin\theta = mR$

6) MKg திணிவுடைய கார் P Kw வலுவுடன் 2R N தடை விசைக்கு எதிராக கிடையுடன் α சாய்வில் மேல் நோக்கி *um/s* வேகத்துடனும் $f\,ms^{-2}$ ஆர்முடுகலுடனும் செல்லும் போது.

$1000P = [2R + 9.8M\,Sin\alpha + Mf]u$ எனக் காட்டுக.

இங்கு $g = 9.8m/s^2$ ஆகும்.



$P' 10^3 = FU$

$F = \frac{P' 10^3}{u}$

$F = ma$ பாவிக்க

$F - 2R - Mg\,Sin\alpha = Mf$

$\frac{P' 10^3}{u} = 2R + Mg\,Sin\alpha + Mf.$

$1000P = [2R + Mg\,Sin\alpha + Mf\ )u$

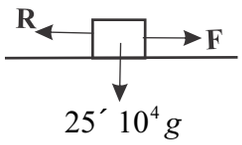
$1000P = [2R + M' 9.8\,Sin\alpha + Mf\ ]u$

www.ikedu.lk

7) வலு 500 Kw இல் தொழிற்படும் 25×10^4Kg திணிவுடைய புகையிரதம் கிடையான பாதையில் 12Km/h வேகத்துடன் $0.2\ m/s^2$ ஆர்முடுகலில் இயங்கும் போது தடை விசை யாது?

$\longrightarrow a = 0.2m/s^2$

$\longrightarrow v = 12Km/h$



$V = 12\text{Km/h}$

$= \frac{12\acute{}\ 10^3}{60\acute{}\ 60}$

$= {}^{10}\!/_{3}\ \text{m/s}$

$P = Fv$

$F = \frac{500\acute{}\ 10^3}{{}^{10}\!/_{3}}$

$= 15\acute{}\ 10^4\text{N}$

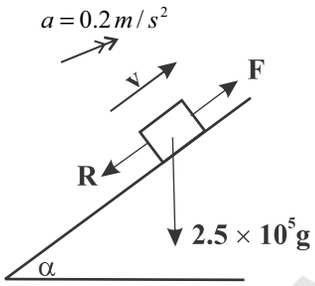
$\longrightarrow F = ma$ ஐ பயன்படுத்த

$F - R = \left(25\acute{}\ 10^4\right)\acute{}\ 0.2$

$15\acute{}\ 10^4 - R = 5\acute{}\ 10^4$

$R = 10\acute{}\ 10^4 = 10^5\ N$

8) மாறாவலு 500Kw உடன் தொழிற்படும் எஞ்சின் ஒன்று புகையிரத பாதையில் அளக்கப்படும் 196 இல் 1 ஆன சரிவு ஒன்றில் மேல் முகமாக புகையிரதத்தை இழுத்து செல்கிறது. எஞ்சின், புகையிரதத்தின் மொத்த திணிவு 2.5×10^5 kg ஆயின் அதன் கதி 24Km/h ஆகவும் ஆர்முடுகல் $0.2\ \text{m/s}^2$ ஆகும் போது மொத்த தடை விசையைக் காண்க. ($g = 9.8\ \text{m/s}^2$)



$Sin\alpha = \frac{1}{196}$

$V = 24Km/h$

$= \frac{24\acute{}\ 10^3}{60\acute{}\ 60} = \frac{20}{3}m/s$

$P = F.V$

$F = \frac{500\acute{}\ 10^3}{\frac{20}{3}}$

$= 75\acute{}\ 10^3\ N$

$F = ma$ பயன்படுத்த

$F - R - 2.5\acute{}\ 10^5\acute{}\ 9.8\text{Sin}\alpha = \left(2.5\acute{}\ 10^5\right)\acute{}\ 0.2$

$75\acute{}\ 10^3 - R - 25\acute{}\ 10^4\acute{}\ 9.8\acute{}\ \frac{1}{196} = 50\acute{}\ 10^3$

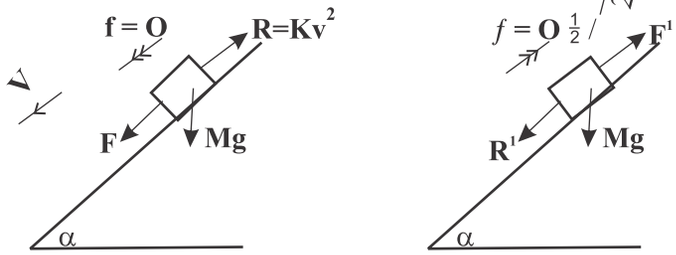
$75\acute{}\ 10^3 - R - \frac{25}{2}\acute{}\ 10^3 = 50\acute{}\ 10^3$

$R = \left(75 - 50 - \frac{25}{2}\right)10^3 = \frac{25}{2}\acute{}\ 10^3 = 12500\text{N}$

www.lkedu.lk

9) M Kg திணிவுடைய கார் H w இல் வேலை செய்கிறது. α சாய்வுள்ள சாய்தளத்தில் கீழ் நோக்கி செல்லும் உயர்கதி V m/s. அதே சாய்வில் அதே வலுவுடன் வேலை செய்யும் போது மேல் நோக்கி செல்லும் உயர்கதி $\frac{V}{2}$ m/s இயக்கத்துக்கான தடை வேகத்தின் வர்க்கத்துடன் நேர்விகித சமமாக மாறும் என கொண்டு

$\frac{Hn}{VM} = \frac{50}{7}$ எனக் காட்டுக. $(g = 10\ m/s^2)$. இங்கு $\sin\alpha = \frac{1}{n}$



$\sin\alpha = \frac{1}{n}$ $\quad R = K.V^2$

$H = F.V$

$F = \frac{H}{V}$

$E = Mg$ பாவிக்க

$F + Mg\sin\alpha - R = M \times o$

$F + Mg\left(\frac{1}{n}\right) = R$

$\frac{H}{V} + \frac{Mg}{h} = K.V^2$ ——— (R_1)

$R^1 = K\left(\frac{V}{2}\right)^2$

$= \frac{KV^2}{4}$

$F = ma$ பாவிக்க

$F^1 - Mg\sin\alpha - R^1 = o$

$\frac{H}{\frac{V}{2}} - Mg\frac{1}{n} = R^1$

$\frac{2H}{V} - \frac{Mg}{n} = K\frac{v^2}{4}$ ——— (R^2)

$\frac{(R_1)}{(R_2)}$ $\quad \frac{\frac{H}{V} + \frac{Mg}{n}}{\frac{2H}{V} - \frac{Mg}{n}} = 4$

$\frac{7H}{V} = \frac{5Mg}{n}$

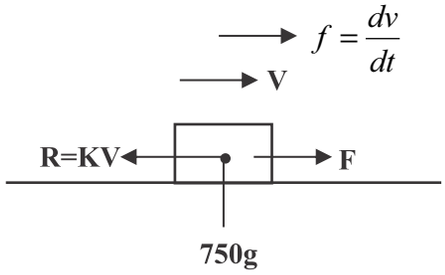
$\frac{Hn}{VM} = \frac{5g}{7} = \frac{5 \times 10}{7} = \frac{50}{7}$

10) 750Kg திணிவுடைய கார் கிடைப் பாதையில் 20Kw வலுவுடன் இயங்குகிறது. காரின் வேகம் V ஆயின் தடைவிசை Kv N ஆகம். K - ஒரு மாறிலி.

i. காரின் உயர்கதி 80 m/s ஆயின் K இன் பெறுமானம் யாது?

ii. காரின் இயக்கத்துக்கான சமன்பாடு

$\left(\frac{2v}{6400 - v^2}\right)\frac{dv}{dt} = \frac{1}{120}$ எனக் காட்டுக. (வேகம் V ஆக ஆர்முடுகல் $\frac{dv}{dt}$ ஆகும்.)



® $F = ma$ பாவிக்க

$F - R = 0$

$F = R = K.V$

$\frac{20' 10^3}{V} = K.V^2$

$20' 10^3 = K.V^2$

$K = \frac{20' 10^3}{80^2}$

$= \frac{25}{8}$

⟶ F = ma பாவிக்க

F - R = ma

$\frac{20' 10^3}{V}$ - K.V = $750\frac{dv}{dt}$

$2' 10^4$ - $KV^2 = 750\,V.\frac{dv}{dt}$

$2' 10^4 - \frac{200V^2}{64} = 750V\frac{dv}{dt}$

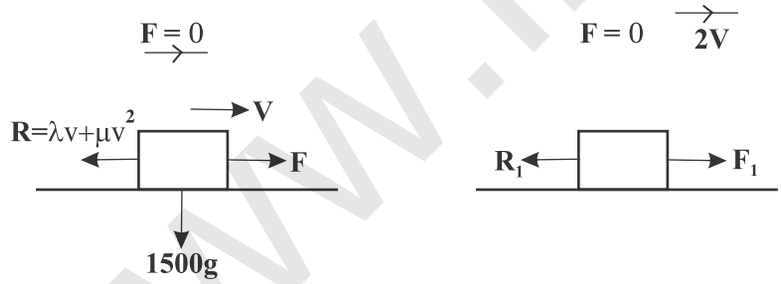
$200\left[100 - \frac{V^2}{64}\right] = 750V\frac{dv}{dt}$

$4\left[\frac{6400 - V^2}{64}\right] = 15V\frac{dv}{dt}$

$\frac{6400 - V^2}{16} = 15V\frac{dv}{dt}$

$\frac{1}{120} = \frac{2V\frac{dv}{dt}}{6400 - V^2}$

11) 1500 Kg திணிவுடைய ஒரு கார் கிடை தெருவில் um/s கதியுடன் செல்லும் போது அதற்குரிய தடை விசை ($\lambda u + \mu u^2$) N ஆகும். அது HKw வலுவில் செல்லும் போது உயர் வேகம் Vm/s ஆகும். உயர் வேகம் 2V உடன் செல்லும் போது உயர் வலு $4H\left[\frac{\lambda + 2m\nu}{\lambda + m\nu}\right]$ எனக்காட்டுக.



உயர்வலு H_1Kw என்க.

® $F = ma\,\frac{H' 10^3}{V} = F$

$F - R = 0$

$F = R$

$\frac{H' 10^3}{V} = \lambda v + mv^2$ ——— (1)

$F_1 - R_1 = 0$

$F_1 = R_1$

$\frac{H_1' 10^3}{2V} = 2\lambda V + 4mV^2$ ——— (2)

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{H_1}{2H} = \frac{2V(\lambda + 2mV)}{V(\lambda + Vm)}$

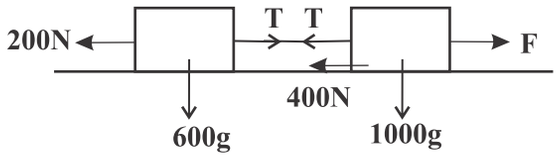
$H_1 = \frac{4H(\lambda + 2mv)}{\lambda + Vm}$

www.ikeau.lk

12) திணிவு 1000Kg உடைய கார் ஒன்று கிடை வீதி ஒன்றில் 600Kg திணிவுடைய இழுவை வண்டி ஒன்றை கயிற்றினால் கட்டப்பட்டு இழுத்து செல்கின்றது. கார், இழுவை வண்டி என்பவற்றுக்கு முறையே 400N, 200N தடை விசைகளுக்கு எதிராக 16Kw வலுவுடன் இழுத்து செல்கிறது. கதி 24Km/h ஆக இருக்கும் போது கயிற்றில் உள்ள இழுவை 875N எனக் காட்டுக.

® $a = f$

® $v = 24Km/h$



$P = F \acute{} V$

$\frac{16 \acute{} 10^3}{20/3} = F \quad F = \frac{16 \acute{} 3 \acute{} 10^3}{20}$

$= 2400N$

$V = \frac{24 \acute{} 10^3}{60 \acute{} 60} m/s$

$= \frac{20}{3}$

$= \frac{20}{3} m/s$

தொகுதிக்கு $\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \underline{F} = mg$ பாவிக்க

$F - 400 - 200 = 1600 \acute{} f$

$2400 - 600 = 1600 \acute{} f$

$f = \frac{1800}{1600} = \frac{9}{8} m/s^2$

வண்டி $\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \underline{F} = mg$ பாவிக்க

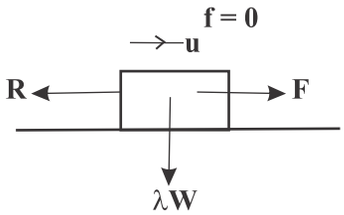
$T - 200 = 600 \acute{} 9/8$

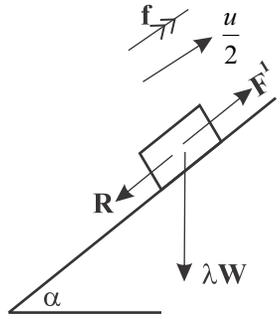
$T - 200 = 75 \acute{} 9$

$T - 200 = 675$

$T = 875N$

13) λW N நிறையுடைய ஒரு கார் λH KW உயர்வலுவில் வேலை செய்கிறது. அது RN எனும் மாறாத் தடை விசைக் கெதிராக வேலை செய்கிறது $Sin^{-1}\left(1/n\right)$ எனும் சாய்வில் வேலை செய்யும் போது $R = \frac{3l\ W}{n}$ என தரப்பட்டுள்ளது. மட்டமான பாதையில் உயர்கதி Um/s எனின் $\frac{1}{2} u\, m/s$ கதியுடன் $Sin^{-1}\left(1/n\right)$ சாய்வில் மேலே செல்லும் போது ஆர்முடுகல் $\frac{2g}{n}$ என காட்டுக. எல்லா இயக்கங்களிலும் தடைவிசை மாறவில்லை.





$\text{Sin}\,a = \frac{1}{n}$

www.lkedu.lk

® $F = ma$ பாவிக்க

$F - R = O$

$F = R$

$\frac{lH' 10^3}{u} = \frac{3lw}{n}$ ——— (1)

$F = ma$ பாவிக்க

$F^1 - R - lwSin\alpha = \left(\frac{lw}{g}\right) f$

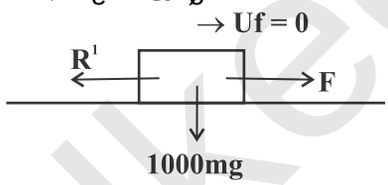
$\frac{lH' 10^3}{\frac{u}{2}} - \frac{lH' 10^3}{u} - \frac{lw}{n} = \left(\frac{lw}{g}\right) f$

$\frac{lH' 10^3}{u} - \frac{lw}{n} = \left(\frac{lw}{g}\right) f$

$\frac{3lw}{n} - \frac{lw}{n} = \left(\frac{lw}{g}\right) f$

$f = \frac{2g}{n}$ //

14) ஒரு புகையிரதம் 1000m Kg திணிவுடையது. இது கிடைத் தண்டவாளத்தில் u m/s சீர்கதியுடன் செல்லும் போது அலகு திணிவுக்கு $\frac{R}{1000} N$ தடை விசை செயற்படுகிறது. அதன் வலு யாது? இது தடைவிசை, வலு மாறாமல் உள்ள போது 1 இல் 100 சரிவுடைய பாதையில் மேல் நோக்கி சீர் கதி V m/s இல் இயங்கவல்லது எனின் $\frac{u}{v} = \left(1 + \frac{10g}{R}\right)$ எனக் காட்டுக.



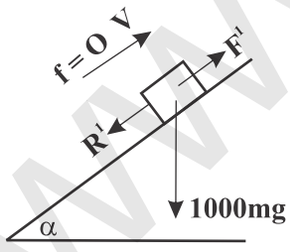
® $F = ma$ பாவிக்க.

$F - R^1 = 0$

$F = R^1 = \frac{R}{1000} \times 1000m = Rm$

∴ வலு $P = F.u$

$P = Rmu$



$Sin\alpha = \frac{1}{100}$

$F = ma$ பாவிக்க

$F^1 - R^1 - 1000mgSin\alpha = 0$

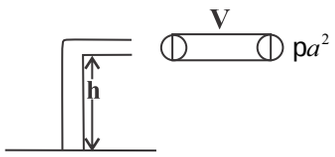
$\frac{Rmu}{V} - Rm - 1000mg \frac{1}{100} = 0$

$\frac{Rmu}{V} = Rm + 10mg$

$\frac{u}{v} = 1 + \frac{10g}{R}$

www.lkedu.lk

15) a ஆரையுடைய உருளை வடிவான குழாயைக் கொண்டுள்ள நீர் பம்பியொன்றின் மூலம், நீர் மட்டம் மாறாததாக h.m ஆழத்தில் காணப்படும் கிணறொன்றில் இருந்து தரை மட்டத்தில் நீரானது V m/s என்ற வேகத்துடன் வீசப்படுகிறது. பம்பியின் வலு $\rho a^2 v r g\left(h+\frac{v^2}{2g}\right)$ உவாற்று என காட்டுக. இங்கு ρ - நீரின் அடர்த்தியாகும்.



1 செக்கனில் வெளியேறும் நீரின் கனவளவு $= \rho a^2 V$

1 செக்கனில் வெளியேறும் நீரின் திணிவு $= \rho a^2 V r$

இயக்கசக்தி $= \frac{1}{2}(\rho a^2 V) r\ V^2$

அழுத்த சக்தி $= (\rho a^2 V) r\ gh$

∴பம்பியினால் 1 Sec னில் செய்யப்பட்ட வேலை $= \frac{1}{2}(\rho a^2 V r) V^2 + \rho a^2 v r gh$

$= \left(h+\frac{v^2}{2g}\right)\rho a^2 v r g$

பம்பியின் வலு $= \rho a^2 v r g\left(h+\frac{v^2}{2g}\right)$ உவாற்று

www.lkedu.lk

உராய்வு, சமநிலை

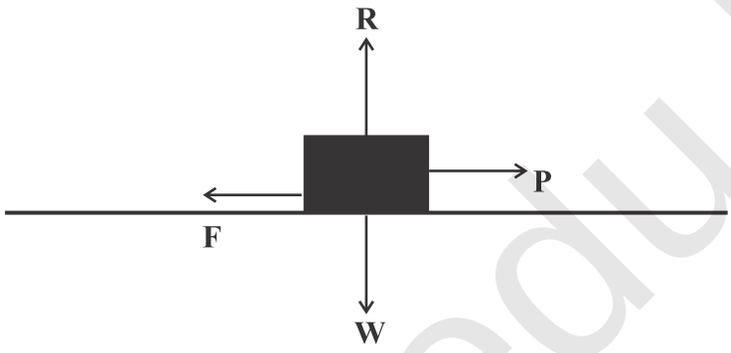
உராய்வு

01. பொருட்களின் இயக்கங்களை எதிர்க்கும் ஓர் தன்மை உராய்வு ஆகும்.

02. இது இயக்கத்தை உண்டு பண்ணும் விசையைப் போல ஓர் குறித்த பெறுமானம் வரை அதிகரித்துச் செல்லும்.

03. இவ் அதியுயர் உராய்வு எல்லை உராய்வு எனப்படும்.

எல்லைச் சமநிலையில்



$\rightarrow$ $P - F = 0$

$P = F$

$\uparrow$ $R - W = 0$

$R = W$

$$\frac{F}{R} = \frac{P}{W} = \text{மாறிலி}$$

$$\frac{F}{R} = m$$

இம்மாறிலி உராய்வுக்குணகம் எனப்படும். இது μ இனால் குறிக்கப்படும்.

குறிப்பு:

01. பொருளொன்று சமநிலையில் இருப்பின் $\frac{F}{R} \leq m$ ஆகும்.

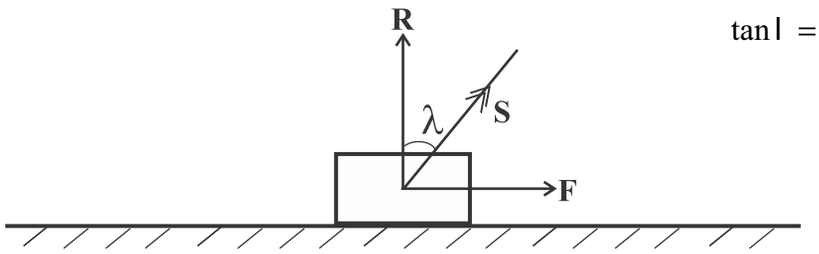
02. பொருளொன்று எல்லைச் சமநிலையில் இருப்பின் $\frac{F}{R} = m$ ஆகும்.

03. μ ஆனது பொருளின் தன்மையில் தங்கி இருக்கும்.

04. μ ஆனது தொடுகைப் பரப்பில் தங்கியிருக்க மாட்டாது.

www.lkedu.lk

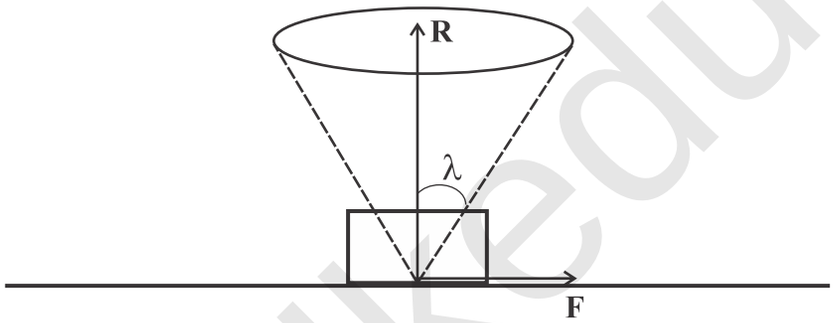
உராய்வுக் கோணம் (λ)



$$\tan l = \frac{F}{R} = m$$

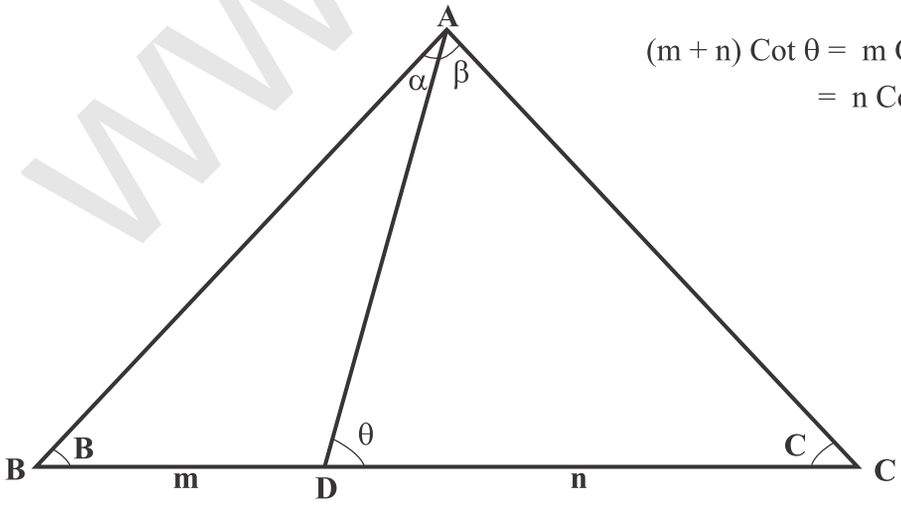
பொருளொன்று எல்லைச் சமநிலையில் இருப்பின் எல்லை உராய்வு விசையினதும் செவ்வண் மறுதாக்கத்தினதும் விளையுள், செவ்வன் மறுதாக்கத்துடன் ஆக்கும் கோணம் உராய்வுக் கோணம் என வரையறுக்கப்படும். இது λ இனால் குறிக்கப்படும்.

ஊராய்வுக் கூம்பு



பொருளொன்று எல்லைச் சமநிலையில் இருப்பின் எல்லை உராய்வு விசையினதும் செவ்வண் மறுதாக்கத்தினதும் விளையுள் செவ்வன் மறுதாக்கத்துடன் ஆக்கும் கோணத்தை அரை உச்சிக் கோணமாகவும் செவ்வன் மறுதாக்கத்தை அச்சாகவும் கொண்டு வரையப்படும் கூம்பு உராய்வுக் கூம்பு எனப்படும்.

(m + n) Cot தேற்றம்



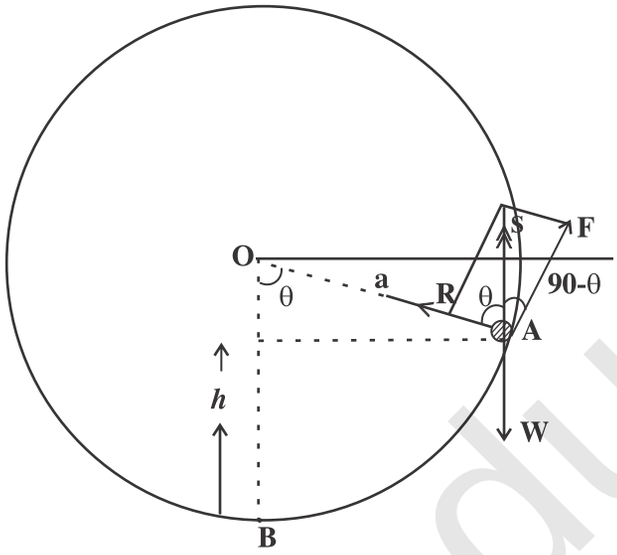
$$(m + n) \cot \theta = m \cot \alpha - n \cot \beta$$
$$= n \cot B - m \cot C$$

$$BD : DC = m : n$$

www.lkedu.lk

உராய்வு, சமநிலை

1) ஒரு கரடான பொட்கோளம் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இப்பொட் கோளத்தின் வளைபரப்பில் (உள்மேற்பரப்பு) ஒரு பாரமான துணிக்கை அக்கோளத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இருந்து $a(1 - \cos\lambda)$ உயரத்திற்கு மேல் சமநிலையில் இருக்க முடியாதெனக் காட்டுக. இங்கு λ என்பது கோளத்தின் உள் மேற்பரப்பிற்கும் துணிக்கைக்கும் இடையிலான உராய்வுக் கோணமாகும்.



துணிக்கையானது A என்ற புள்ளியில் சமநிலையில் உள்ளதென்க. A யினூடு செல்லும் கோணத்தின் ஆரை நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணம் θ என்க.

துணிக்கையின் நிறை W என்க.
கோணத்தில் தாக்கும் விசைகளாவன

1. கோணத்திற்கும், துணிக்கைக்கும் இடையிலான செவ்வன மறுதாக்கம் (R)
2. உராய்வு விசை (F)
3. அதன் நிறை (W)

துணிக்கையின் சமநிலைக்கு F இனதும் R இனதும் மறுதாக்கம் S (விளையுள் மறுதாக்கம்) W இற்கு சமனும் எதிருமாக இருத்தல் வேண்டும்.

$$\tan\theta = \left(F/R\right)$$

சமநிலைக்கு $F/R \leq \mu$

$$\tan\theta \leq \tan\lambda$$

$$\theta \leq \lambda \quad \text{——— (1)}$$

அதிதாழ் புள்ளி Bயில் இருந்து துணிக்கையின் உயரம் h

$$h = a - a\cos\theta$$

$$= a - a\cos\theta \quad \text{——— (2)}$$

$$\cos\theta = \frac{a - h}{a}$$

(1) $\Rightarrow \quad \cos\theta \geq \cos\lambda$

$$\therefore \frac{a - h}{a} \geq \cos\lambda$$

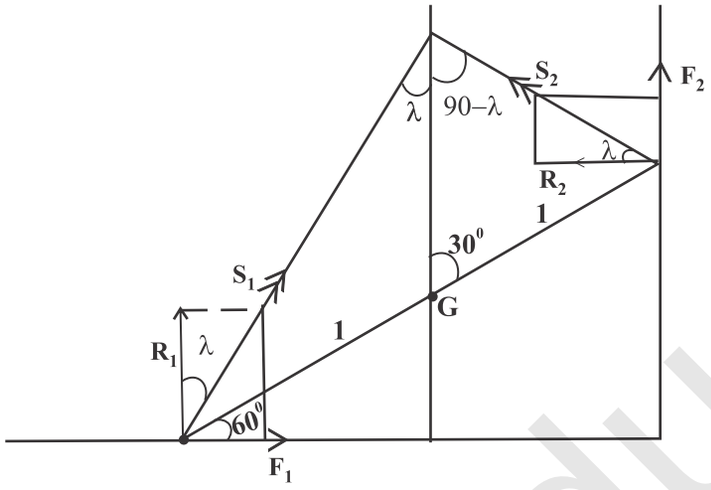
$$h \leq a(1 - \cos\lambda)$$

$$\therefore h \text{ (உயர்வு)} = a(1 - \cos\lambda)$$

∴ அதிதாழ் புள்ளியில் இருந்ததான துணிக்கையின் உயரம் a (1-cosλ) இலும் அதிகரிக்க முடியாது.

2) ஒரு சீரான கோல் AB ஆனது அதன் கீழ்முனை A கரடான தரையைத் தொடவும், மேல் முனை கரடான நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொடவும் கோலின் ஊடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமநிலையில் உள்ளது. இரு தொடுகையிலும் உள்ள உராய்வுக் குணகம் λ எனின் கோல் நழுவும் தறுவாயில் இருப்பின் நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு 30^0 எனின் $\theta = 15^0$ எனக் காட்டுக.

எல்லைச் சமனிலை



Cot விதிப்படி

$$2\,Cot 30 = Cot\theta - Cot(90 - \theta)$$

$$= Cot\theta - \tan\theta$$

$$= \frac{1 - \tan^2\theta}{\tan\theta}$$

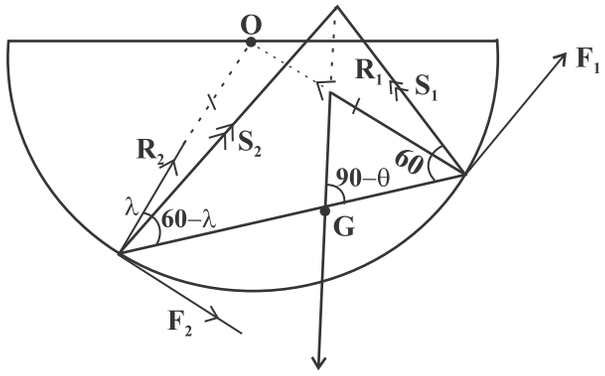
$$\frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \tan 30^0$$

$$\therefore \quad \tan 2\theta = \tan 30^0$$

$$\therefore\ 2\theta = 30^0$$

$$\therefore\ \theta = 15^0$$

3) ஒரு கரடான அரைக்கோளம் அதன் விளிம்பு கிடையாக இருக்குமாறு நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. அதன் ஆரையின் நீளத்தையுடைய சீரான கோலொன்று இக் கோளத்தினுள் முழுமையாக வைக்கப்படும் போது கோணத்தின் மையத்தினூடு செல்லும் நிலைக்குத்து தளத்தில் எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளது. கோலிற்கும் கோளத்திற்குமிடையிலான உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ சமநிலையில் கோல் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{8}{17}\right)$ எனக் காட்டுக.



www.lkedu.lk

கோல் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ என்க.

உராய்வுக் கோணம் λ என்க.

$$\therefore \tan\lambda = \frac{1}{2}$$

Cot விதியைப் பயன்படுத்த

$$2(\text{Cot}(90-\theta) = 1\,\text{Cot}(60-\lambda) - 1\text{Cot}(60+\lambda)$$

$$2\tan\theta = \frac{\text{Cos}(60-\lambda)}{\text{Sin}(60-\lambda)} - \frac{\text{Cos}(60+\lambda)}{\text{Sin}(60+\lambda)}$$

$$= \frac{\text{Sin}(60+\lambda).(\text{Cos}(60-\lambda) - \text{Sin}(60-\lambda)\text{Cos}(60+\lambda)}{\text{Sin}(60-\lambda)\text{Sin}(60+\lambda)}$$

$$= \frac{\text{Sin}\,2\lambda}{\text{Sin}(60-\lambda)\text{Sin}(60+\lambda)}$$

$$= \frac{2\text{Sin}2\lambda}{2\text{Sin}(60-\lambda)\text{Sin}(60+\lambda)}$$

$$= \frac{2\text{Sin}2\lambda}{\text{Cos}\,2\lambda - \text{Cos}\,120}$$

$$= \frac{2\text{Sin}2\lambda}{\text{Cos}\,2\lambda + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4\,\text{Sin}\,2\lambda}{2\cos 2\lambda + 1}$$

$$= \frac{4.\frac{2\tan\lambda}{1+\tan^2\lambda}}{4\frac{(1-\tan^2\lambda)}{1+\tan^2\lambda}+1}$$

$$= \frac{8\tan\lambda}{5-3\tan^2\lambda}$$

$$= \frac{8\times\frac{1}{2}}{5-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{16}{17}$$

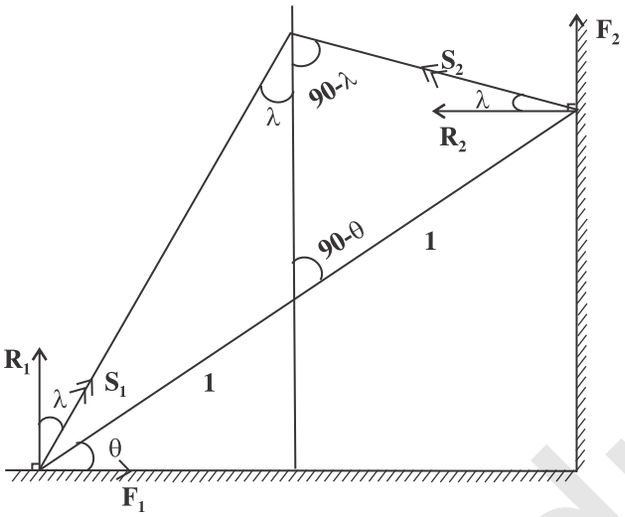
$$\tan\theta = \frac{8}{17}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{17}\right)$$

www.lkedu.lk

4) சீரான கோலொன்றின் ஒரு முனை கரடான நிலைக்குத்து சுவரையும், கீழ்முனை கரடான கிடைத் தரையையும் தொட்டுக் கொண்டிருக்க சுவரிற்கு செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஓய்விலுள்ளது. எல்லைச் சமநிலையில் கோல் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணத்தைக் காண்க. இரு முனைகளிலுமுள்ள உராய்வுக் கோணங்கள் முறையே 30^0, 30^0 ஆகும்.

எல்லைச் சமநிலை



$\lambda = 30^0$

$$2\,Cot(90-\theta) = 1\,Cot\lambda - 1\,Cot(90-\lambda)$$

$$= Cot\lambda - \tan\lambda$$

$$2\tan\theta = Cot30 - \tan 30$$

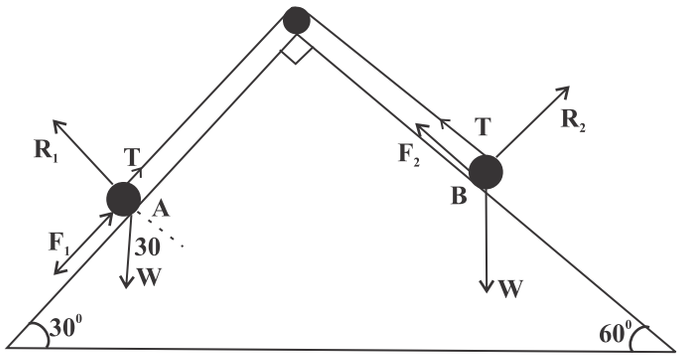
$$= \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = 30^0$$

5) படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு சம கரடான 30^0, 60^0 சாய்வுடைய சாய்தளங்களின் உச்சிகளில் பொருத்தப்பட்ட ஒப்பனை கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் இலேசான இழையின் அந்தங்களில் சம நிறைகள் இணைக்கப்பட்டு இழை இறுக்கமாக இருக்க சாய்தளங்களில் வைக்கப்படும் போது அவை எல்லைச் சமநிலையில் இருப்பின் இரு மேற்பரப்புகளிற்கும் துணிக்கைகளுக்கும் இடையிலான உராய்வுக் குணகங்கள் $2-\sqrt{3}$ ஆகுமெனக் காட்டும். சாய்தளங்களானவை நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்க.



Aயின் சமநிலைக்கு $F_1 = \mu R_1$ ——— (1)

Bயின் சமநிலை $F_2 = \mu R_2$ ——— (2)

A $R_1 = W\,Cos30^0$ ——— (3)

$T - F_1 = W\,Sin30^0$ ——— (4)

B $R_2 = W\,Cos\,60$ ——— (5)

$T + F_2 = W\,Sin\,60$ ——— (6)

$$F_2 + F_1 = W\sqrt{3}/2 - \frac{W}{2}$$

$$mWCos60 + mWCos30 = W\sqrt{3}/2 - W/2$$

$$\frac{m}{2} + \sqrt{3}\frac{m}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1/2$$

$$m(1+\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$$

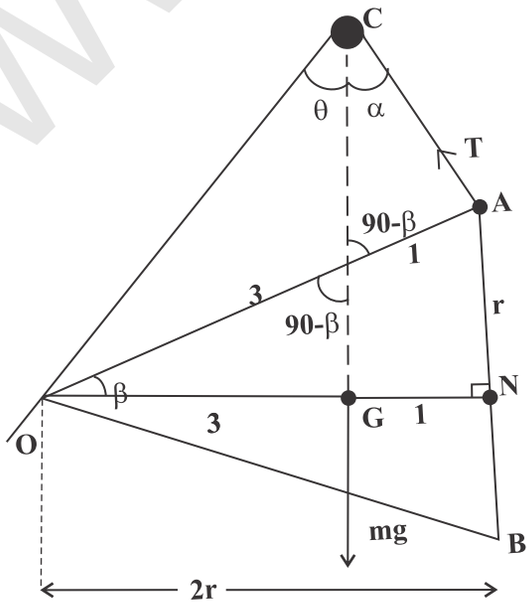
$$m = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

6) ஒரு சீரான திண்ம கூம்பு அடியினாரை r, உயரம் 2r ஐயும் திணிவு M ஐயும் உடையது. ஒரு இலேசான நீளாத இழையொன்றின் ஒரு முனை கூம்பின் உச்சிக்கும் அதன் மறுமுனை கூம்பின் வட்ட அடியிலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் இணைக்கப்பட்டு இழையானது ஒப்பமான முனையொன்றின் மேல் போடப்பட்டு அச்சு கிடையாக இருக்க படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு சமநிலையில் உள்ளது.

i. சமநிலையில் இழையின் இரு பகுதிகளும் கீழ் நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணம் 45^0 எனக்காட்டி, இழையிலுள்ள இழுவையைக் காண்க. (G கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆயின் $OG = \frac{3}{4} \times 2r$)



கூம்பின் சமநிலைக்கு $\theta = \alpha$ ——— (1)

$$4\,\text{Cot}(90 - b) = 3\,\text{Cot}q - \text{Cot}a$$
$$= 3\,\text{Cot}q - \text{Cot}q$$
$$= 2\,\text{Cot}q$$
$$\therefore\ 4\tan b = 2\,\text{Cot}q$$
$$4 \times \left(\frac{r}{2r}\right) = 2\,\text{Cot}q$$
$$2 = 2\,\text{Cot}q$$
$$\text{Co} + q = 2$$
$$q = 45^0$$

கூம்பின் சமநிலைக்கு

$$T\,\text{Cos}q + T\,\text{Cos}a = mg$$
$$T\,\text{Cos}q + T\,\text{Cos}q = mg$$
$$2T\,\text{Cos}q = mg$$
$$T = \frac{mg}{2\text{Cos}q}$$
$$= \frac{mg}{2 \times 1} \times \sqrt{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}mg}{2}$$

Note : முளையானது இழையை பிரிக்கும் வீதத்தைக் காணும்படி கேட்கப்பட்டால் உள்ளீடு கூறாக்கி, விகித சமதேற்றப்படி

$$\frac{OC}{CA} = \frac{3}{1}$$
$$OC : CA = 3 : 1$$

இழையின் நீளம் ℓ எனத் தரப்பட்டிருப்பின்

$OC = \frac{3\ell}{4}$ முளையின் இருமருங்கிலும் உள்ள இழையின் நீளங்களாகும்.

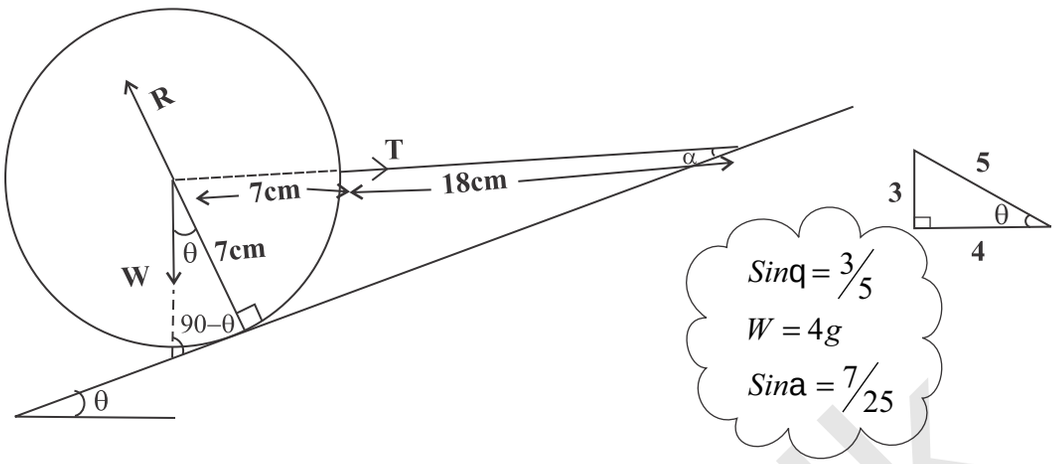
$CA = \frac{\ell}{4}$

7) ஒரு ஒப்பமான சாய்தளமொன்று கிடையுடன $\text{Sin}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ என்ற கோணத்தில் சாய்ந்தவாறு நிலைப் படுத்தப்பட்டுள்ளது. 4Kg திணிவும், 7cm ஆரையையுமுடைய திண்மக் கோளமொன்று சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட்டு, 18cm நீளமுடையதும் இலேசானதும், நீளாததாகவும் உள்ள இழையின் ஒரு முனைக் கோணத்தின் மேலேயுள்ள புள்ளிக்கும், மறுமுனை சாய்தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் இணைக் கப்பட்டு இழை இறுக்கமாக இருக்க சமநிலையில் உள்ளது.

i. இழையிலுள்ள இழுவை 25N எனவும்

ii. சாய்தளத்திற்கும் துணிக்கைக்கும் இடையிலான மறுதாக்கம் 39N ஆகுமெனவும் காட்டுக.

www.lkedu.lk



$Sin\theta = 3/5$

$W = 4g$

$Sin\alpha = 7/25$

கோணத்தின் சமநிலைக்கு சாய்தளம் வழியே துணிக்க.

$$T\cos\alpha = W\sin\theta$$

$$T = \frac{W\sin\theta}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{W \times 3/5}{24/25}$$

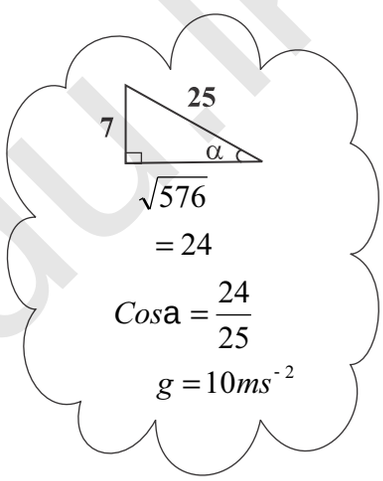
$$= \frac{15W}{24}$$

$$= \frac{5W}{8}$$

$$= 5 \times \frac{49}{8}$$

$$= 2.5g$$

$$= 25N$$



$\sqrt{576}$

$= 24$

$Cos\alpha = \frac{24}{25}$

$g = 10ms^{-2}$

$$R = W\cos\theta + T\sin\alpha$$

$$= W \times \frac{4}{5} + 25 \times \frac{7}{25}$$

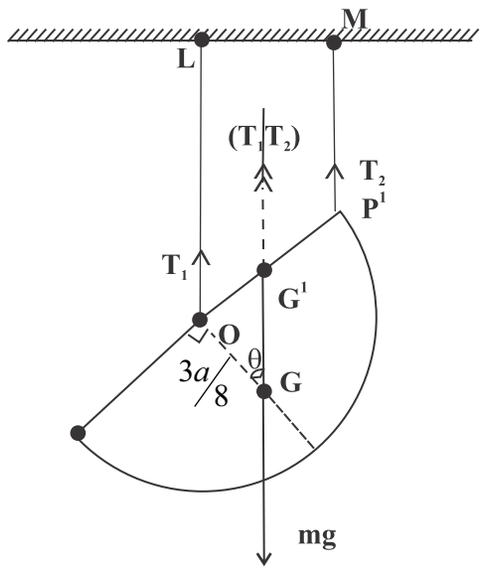
$$= \frac{16g}{5} + 7$$

$$= 32 + 7$$

$$= 39N$$

www.lkeduk

8)



M திணிவுடையதும் ஆரை ***a*** உம் உடைய சீரான திண்ம அரைக் கோளமானது வட்ட அடியின் மையம் O இற்கும் கூரைக்கும் இணைக்கப்பட்ட நீளாத இழை OL என்ற நிலைக்குத்தானது இழையினாலும், வட்ட அடியின் பகுதியில் உள்ள புள்ளி P யிற்கு இழைக்கப்பட்ட நீளாத இலேசான நிலைக்குத்து இழை PM இனாலும் சமநிலையில் பேணப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் சமச்சீரச்சு நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணம் θ . அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G $OG = {}^{3a}/_{8}$ ஒரு இழையிலுள்ள இழுவிசையானது மற்றைய இழையிலுள்ள இழுவிசையின் 3 மடங்காயின் $\tan\theta = {}^{2}/_{3}$ அல்லது $\tan\theta = 2$ எனக் காட்டுக.

கோளத்தின் சமநிலைக்கு

T_1, T_2 இன் விளையுள் $T_1 + T_2$ என்பது கோளத்தின் சமநிலைக்கு mg இன் தாக்கக்கோட்டின் வழியே தாக்க வேண்டும்.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{GP}{GO} = \frac{a - {}^{3a}/_{8}\tan\theta}{{}^{3a}/_{8}\tan\theta}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{8 - 3\tan\theta}{3\tan\theta}$$

$\frac{T_1}{T_2} = 3$ ஆயின்

$$\frac{8 - 3\tan\theta}{3\tan\theta} = 3$$

$$8 - 3\tan\theta = 9\tan\theta$$

$$12\tan\theta - 8$$

$$\tan\theta = {}^{2}/_{3} \text{ ——*}$$

அல்லது

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{3}$$

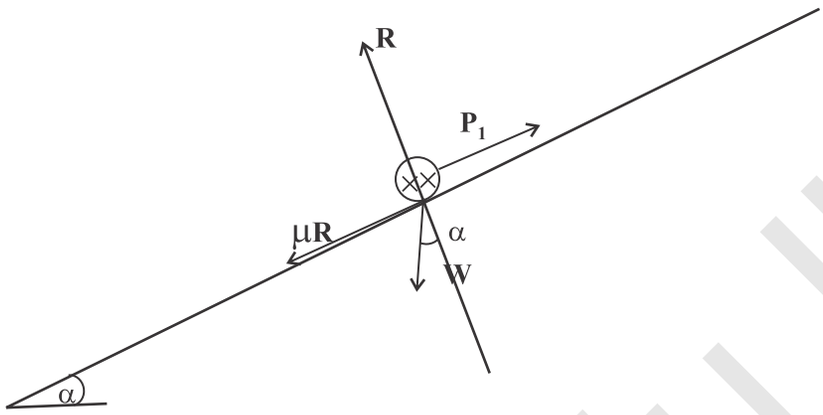
$$\frac{8 - 3\tan\theta}{3\tan\theta} = {}^{1}/_{3}$$

$$8 - 3\tan\theta = \tan\theta$$

$$\tan\theta = 2 \quad \text{———**}$$

9) W நிறையுடைய ஒரு பொருளைக் கிடையுடன் α கோணத்தில் சாய்ந்த ஒரு கரடான தளத்தின் மீது வைத்து சாய்தளத்தின் உயர்சரிவுக் கோட்டின் வழியே

i. மட்டுமட்டாக மேல் நோக்கி இயங்கச் செய்வதற்கு பிரயோகிக்க வேண்டிய மிகச் சிறிய விசையைக் காண்க. பொருளிற்கும் தளத்திற்கும் இடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும்.
மேல் நோக்கி இயங்கும் எல்லைச் சமநிலை.



$P_1 = \mu R + W\,Sin\alpha$ —— (1)

$R = W Cos\alpha$ —— (2)

$P_1 = \mu W Cos\alpha + W\,Sin\alpha$

ii. மட்டுமட்டாக கீழ் நோக்கி இயங்குவதை தடுப்பதற்கு வழங்க வேண்டிய இழிவு விசை இங்கு ($\mu < \tan\alpha$).

μ இற்கு பதிலாக -μ ஐ இட,

$P_1 \to P_2$

$P_2 = -\mu w Cos\alpha + W Sin\alpha$

$= W Sin\alpha - \mu Cos\alpha$

$= \frac{W Cos\alpha}{P_2 > O}(\tan\alpha - \mu)$

தரவின்படி

∴ மேல் நோக்கி இயங்கச் செய்வதற்கு தேவையான இழிவு விசை $= W\,Cos\alpha\,(\tan\alpha+\mu)$

கீழ்நோக்கி இயங்குவதைத் தடுப்பதற்கு வழங்க வேண்டிய இழிவு விசை $= W Cos\alpha\,(\tan\alpha - \mu)$

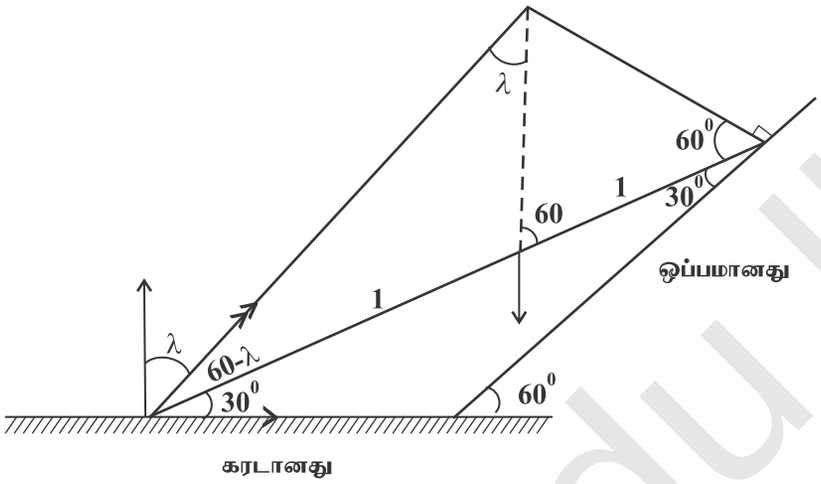
Note: பகுதி (ii) இற்கு $\tan\alpha > \mu$ எனத் தரப்படல் வேண்டும்.

www.lkedu.lk

10) ஒரு சீரான கோல் இரு தளங்களில் தொடுகையுற்று எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளது. ஒரு தளம் கிடையாகவும், மற்றைய தளம் கிடையுடன் 60^0 சாய்ந்துள்ளது. கோலானது இரு தளங்களுடனும் சம சாய்வில் சாய்ந்துள்ளது. சாய்தளத்திற்கும் கோலிற்கும் இடையிலான கோணம் 30^0 கிடைத்தளத் திற்கும் கோலிற்குமிடையிலான உராய்வுக் குணகம் $\sqrt{3}/5$ எனக் காட்டுக.

சாய்தளம் ஒப்பமானது

கிடைத்தளம் கரடானது



$$2\cot 60^0 = \cot(60^0 - \lambda) - \cot 60^0$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1+\tan 60\tan\lambda}{\tan 60 - \tan\lambda}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}\tan\lambda}{\sqrt{3} - \tan\lambda}$$

$$2\sqrt{3} - 2\tan\lambda = \sqrt{3} + 3\tan\lambda$$

$$\sqrt{3} = 5\tan\lambda$$

$$\tan\lambda = \sqrt{3}/5$$

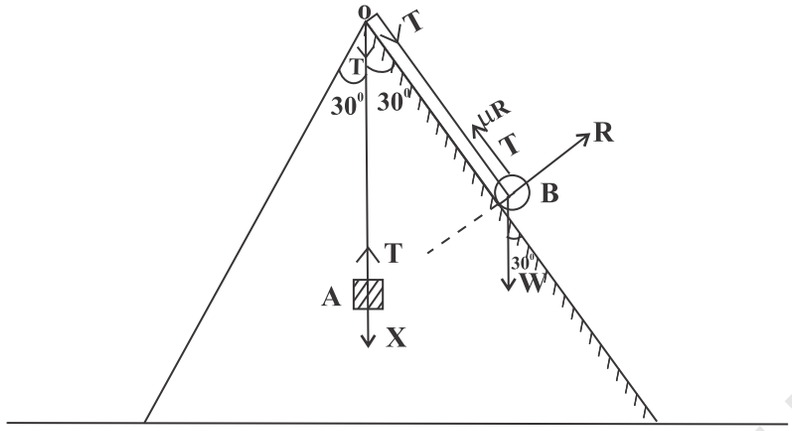
∴ உராய்வுக் குணகம் $\sqrt{3}/5$

11) அரை உச்சிக்கோணம் 30^0 ஆகவுடைய கரடான வளை மேற்பரப்பைக் கொண்ட பொட்கூம்பொன்று அதன் உச்சி மேல் முகமாகவும் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் இருக்க நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. துவாரமிடப்பட்ட அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இழுக்க அதன் உச்சியில் பொருத்தப்பட்ட ஒப்பமான சிறிய கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் இழையின் ஒரு நுனியில் W நிறையுடைய துணிக்கை இணைக் கப்பட்டு கரடான வெளி மேற்பரப்பில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கூம்பினுள் நிலைக்குத்தாக தொங்கும் மற் றைய நுனியுடன் நிறை X என்பதை இணைப்பதன் மூலம் வளை பரப்பின் மீது துணிக்கையின் கீழ் நோக்கிய இயக்கத்தை மட்டுமட்டாக தடுக்கலாமெனில் $C = \frac{3\sqrt{3}W}{8}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

(உராய்வுக்குணகம் $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ ஆகும்.)

www.ikedu.lk

கீழ்நோக்கி நகரும் தறுவாய் எல்லைச்சமநிலை



A யின் சமநிலைக்கு

$T = X$ —— (1)

B யின் சமநிலைக்கு

$R = WSin30$

$= W/2$ —— (2)

$T + \mu R = WCos\,30^0$

$X + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{W}{2} = W \cdot \sqrt{3}/2$

$X = W.\sqrt{3}/2 - \frac{W\sqrt{3}}{8}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{8} W$

∴ B யானது கீழ்நோக்கி நகரும் தறுவாயைதடுப்பதற்கு தேவையான Aயின் நிறையின் இழிவுப் பெறுமானம்

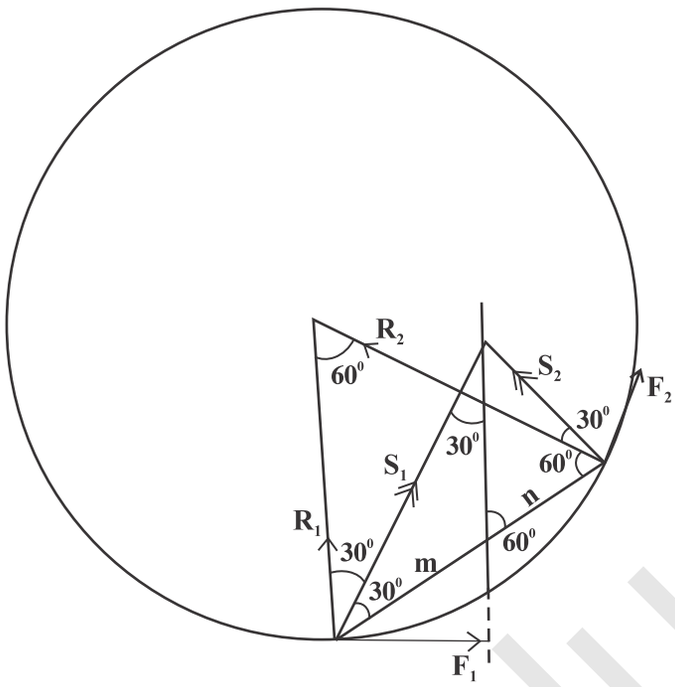
$= \frac{3\sqrt{3}}{8} W$

12) ஒரு சீரற்ற கோல் AB நிலைப்படுத்தப்பட்ட உட்பகுதி கரடான பொட்கோளத்தின் உட்பரப்பில், கோளத்தின் ஆரைக்கு சமனான நீளமுடைய கோலானது அதன் கீழ் முனையானது கோளத்தின் அதிதாழ் புள்ளியைத் தொடவும், கோளத்தின் மையத்தினூடு செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளது. கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் G.

$AG : GB = m : h$ ஆயின்

m=2n எனக் காட்டுக. (கோளத்தின் உட்பரப்பிற்கும் கோலிற்கும் இடையிலான உராய்வுக் கோணம் = 30^0)

www.lkedu.lk



$$(m+n)\,Cot60 = nCot30 - mCot90$$

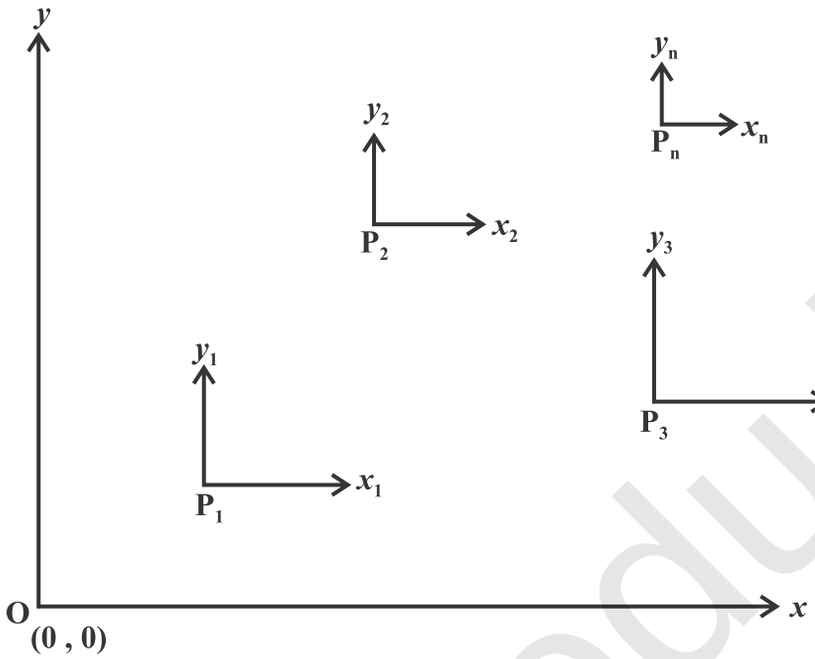
$$(m+n)\ {}^{1}\!/_{\sqrt{3}} = n'\ \sqrt{3}$$

$$m+n = 3n$$

$$m = 2n$$

www.lkedu.lk

ஒரு தளவிசைகள்

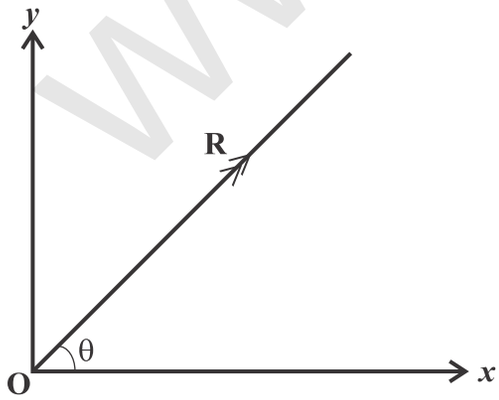


கிடை விசை ® $x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i$

நிலைக்குத்து விசை - $y = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + y_n$

$= \sum_{i=1}^{n} y_i$



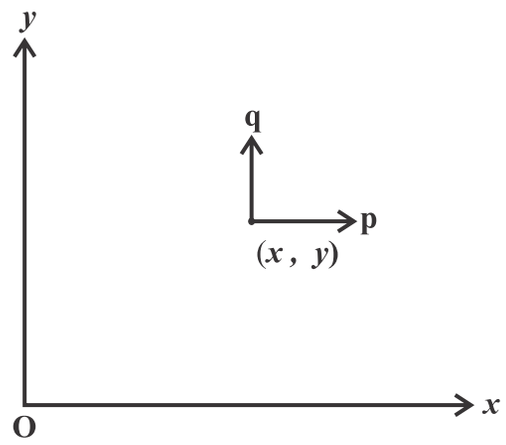
$R^2 = X^2 + Y^2$

$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

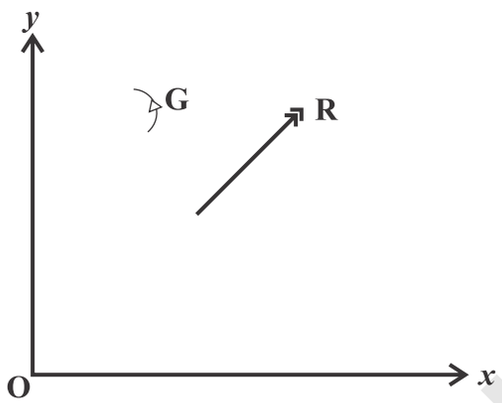
$\tan q = \frac{X}{Y}$

$q = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$

www.lkedu.lk



0 பற்றி திருப்பம் $0\curvearrowleft = qx - py$

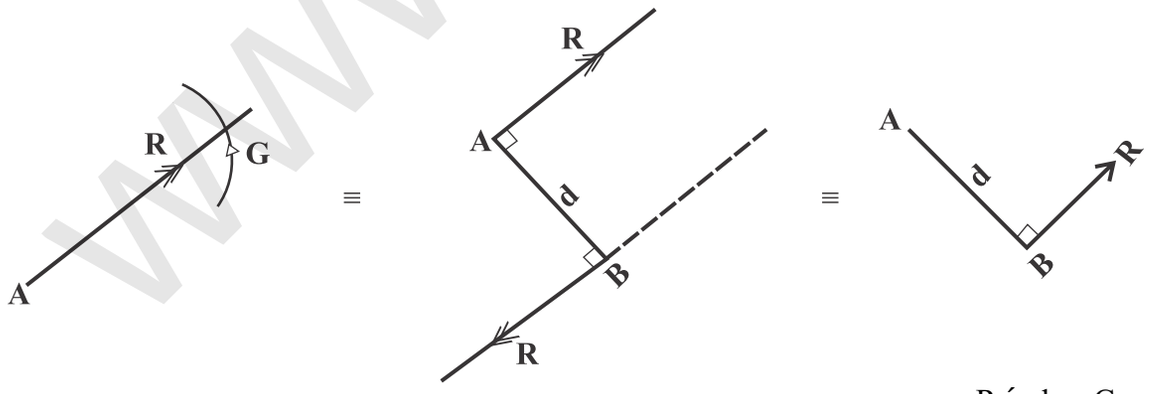


i. $R = 0$, $G = 0$ தொகுதி சமனிலையில்

ii. $R \neq 0$, $G = 0$ தொகுதி தனிவிசை

iii. $R = 0$, $G \neq 0$ தொகுதி இணை

iv. $R \neq 0$, $G \neq 0$ தொகுதி தனிவிசை



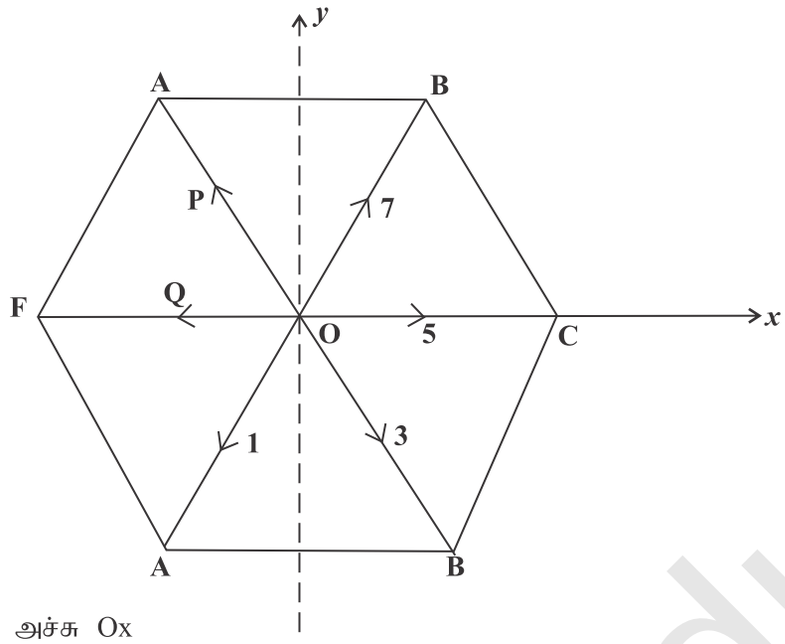
$R \times d = G$

$d = \frac{G}{R}$

ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் தனிவிசையையும் இணையையும் வேறொரு புள்ளியில் தனிவிசையாக மாத்திரம் ஒடுக்கப்படலாம்.

www.lkedu.lk

01. ஒழுங்கான அறுகோணி ABCDEF இன் மையம் O ஆகும். O இல் OA, OB, OC, OD OE, OFவழியே 1, 3, 5, 7, P_1 QN விசைகள் தாக்குகின்றன. விசைகள் சமநிலையில் இருப்பின் P,Q இன் பெறுமானங்களைக் காண்க?



கிடை அச்சு Ox

நிலைக்குத்து அச்சு oy என்க.

விசைகளை Ox, Oy வழியே பிரிக்க.

$$\text{¾¾®} \quad = 5 + 7\cos 60 - P\cos 60 - Q - 1\cos 60 + 3\cos 60^0$$

$$= 5 + \frac{7}{2} - \frac{P}{2} - - QQ - Q - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{19}{2} - \frac{P}{2} - Q$$

$$- y \quad = 7\sin 60^0 + P\sin 60^0 - 1\sin 60^0 - 3\sin 60^0$$

$$= (3 + P)\sin 60^0$$

$$= (P + 3)\sqrt{3}/2$$

விசைகள் சமநிலையில் இருப்பதால் x = 0, y = 0

$$(P + 3`)\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$P = -3$$

$$\frac{19}{2} - \frac{P}{2} - Q = 0$$

$$\frac{19}{2} + \frac{3}{2} - Q = 0$$

$$Q = 11$$

$P = -3N : 3N\ EO$ வழியே

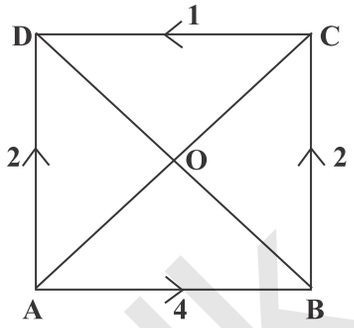
$Q = 11N$

www.lkedu.lk

02. ABCD 1m பக்கமுள்ள சதுரம் AB, BC, CD, AD வழியே 4, 2, 1, 2N விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியை

(i) A இல்

(ii) மூலை விட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி Oவில் ஒரு தனி விசையாகவும், இணையாகவும் ஒடுக்குக?



$\circledR\ X = 4 - 1 = 3N$

$-\ Y = 2 + 2 = 4$

$R = \sqrt{x^2 y^2}$

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= 5N$

$\tan a = {}^{4}\!/_{3}$

$a = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

(i) $A)\ \Delta = (2 \times 1) + (1 + 1)$

$= 3Nm$

எனவே தொகுதி A இல் 5N விசைக்கும் 3Nm திருப்பமுடைய இணைக்கும் ஒடுங்கும்.

(ii) $O) \quad = 4 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2}$

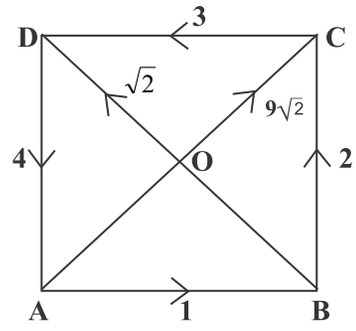
$= \frac{1}{2}(4 + 2 + 1 - 2)$

$= \frac{5}{2}\ Nm$

எனவே தொகுதி Oவில் 5N விசைக்கும் Nm திருப்பமுடைய இணைக்கும் ஒடுங்கும்.

03. ABCD ஒரு சதுரம். ஒரு பக்க நீளம் a ஆகும். 1, 2, 3, 4,$9\sqrt{2}$,$\sqrt{2}$N விசைகள் முறையே AB,BC, CD, DA, AC, BD வழியே எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு குறிப்பிடும் திசைகளில் தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுளின் பருமனையும், திசையையும் காண்க. இவ் விளையுளின் தாக்கக்கோடு AB ஐ Lஇல் சந்திக்கிறது. AL இன் நீளத்தைக் காண்க?

இவ்விசைத்தொகுதி LB, LD வழியே தாக்கும் P,Q எனும் இரு விசைகளுக்கு சமனாயின் P, Q இன் பெறுமாணங்களைக் காண்க?



AB, AD இற்கு சமாந்தரமான திசைகளில் விசைகளைப் பிரிக்க.

$\circledR\ X = 1 - 3 + 9\sqrt{2}\cos 45 - \sqrt{2}\cos 45$

$= 1 - 3 + 9 - 1$

$= 6$

$-\ Y = 2 - 4 + 9\sqrt{2}\sin 45 + \sqrt{2}\sin 45$

$= 2 - 4 + 9 + 1$

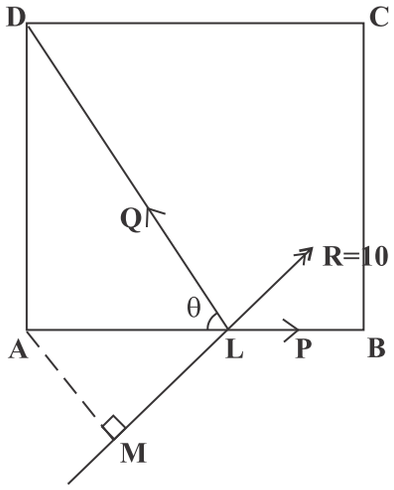
$= 8$

$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ $\qquad \tan a = {}^{8}\!/_{6}$

$= \sqrt{6^2 + 8^2}$ $\qquad = {}^{4}\!/_{3}$

$= 10N$ $\qquad a = \tan^{-1}\left({}^{4}\!/_{3}\right)$

www.lkedu.lk



விளையுள் R , AB ஐ Lஇல் சந்திக்கிறது என்க.

A பற்றி விளையுளின் திருப்பம் = A பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களில் அட்சர கணிதக் கூட்டுத் தொகை

$R.AM = 2' a + 3' a + \sqrt{2}\, a \sin 45$

$10\, AL \sin a = 2a + 3a + a$

$10\, AL' \frac{4}{5} = 6a$

$BAL = 6a$

$AL = \frac{6a}{8}$

$= \frac{3a}{4}$

$\tan q = \frac{AD}{AL}$

$= \frac{4}{3}$

® $X = P - Q\cos q = 6$

- $Y = Q \sin \theta = 8$

$= Q' \frac{4}{5} = 8$

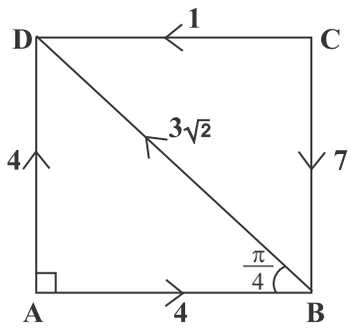
$Q = 10N$

$P - 10' \frac{3}{5} = 6$

$P = 12N$

www.lkedu.lk

04. ABCD என்பது a பக்கமுள்ள சதுரம். 4, 7, 1, 4, $3\sqrt{2}$ N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, CB, CD, AD, BD வழியே தாக்குகின்றன. விசைத்தொகுதி இணைக்கும் சமவலுவானதெனக் காட்டி இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க?



விசைத் தொகுதியை AB, AC க்கு சமாந்தரமான திசைகளில் பிரிக்க.

® $X = 4 - 1 - 3\sqrt{2}\cos 45$

$= 4 - 1 - 3$

$= 0$

- $Y = -7 + 4 + 3\sqrt{2}\sin 45$

$= -7 + 4 + 3$

$= 0$

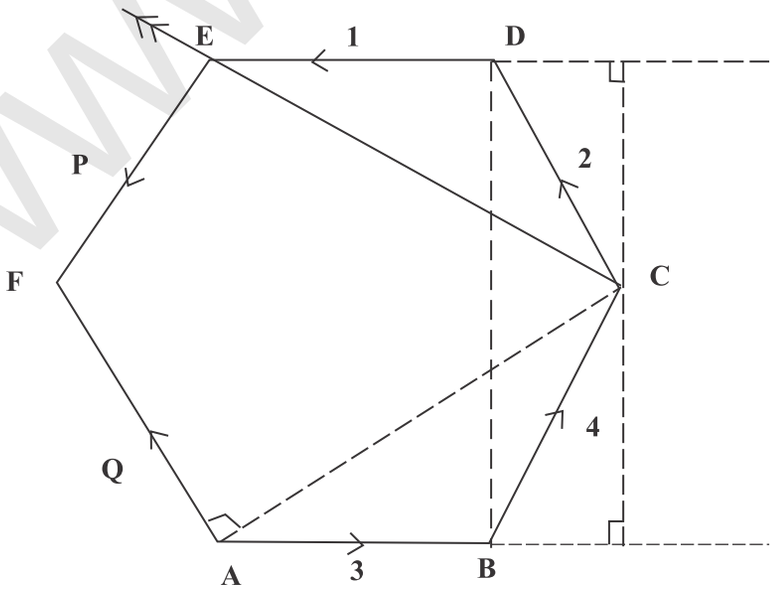
எனவே $R = 0$

$B)\quad G = 1' a - 4' a$

$= -3a$

$R = 0$ G $= 3a$ $R = 0, G \neq 0$ எனவே தொகுதி இணைக்கு சமன்.

05. ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி AB CD EF இன் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DE, EF, AF வழியே எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு குறிப்பிடும் திசைகளில் முறையே 3, 4, 2, 1, P, Q நியூற்றன் விசைகள் தாக்குகின்றன. ஆறு விசைகளினது விளையுள் CE வழியே இருப்பின் P, Q இன் பெறுமானங்களைக் காண்க?



www.lkedu.lk

விளையுள் CE வழியே இருப்பதால்

$E)=0$

$4.EC+3.EA+2\ ED\sin 60^0-Q.EF\sin 60^0=0$

$4\ 2a\sin 60+3\acute{}\ 2a\sin 60^0+2\acute{}\ a\sin 60^0-Q\acute{}\ a\sin 60^0=0$

$8+6+2-Q=0$

$Q=16N$

$C)=0$

$P\acute{}\ CE-Q\acute{}\ CA+3CB\sin 60^0+CD\sin 60^0=0$

$P\acute{}\ 2a\sin 60^0-Q\acute{}\ 2a\sin 60^0+3a\sin 60^0+1\acute{}\ a\sin 60^0=0$

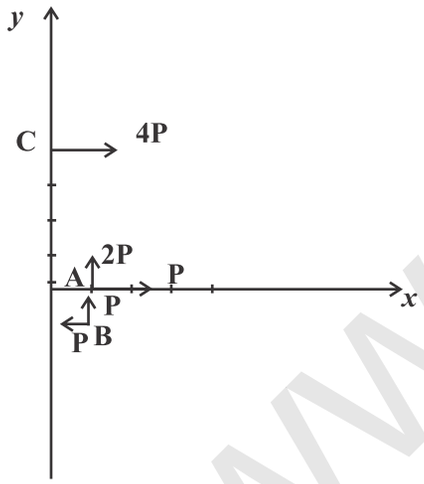
$2P-2Q+4=0$

$P=Q-2$

$=16-2$

$P=14N$

06. தெக்காட்டின் அச்சுகள் OX, OY வழியேயான அலகுக் காவிகள் முறையே i, j ஆகும். புள்ளிகள் A,B,C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே ai, $ai-aj$, aj ஆகும். புள்ளிகள் A,B,C இல் முறையே $Pi+2pj$, $-pi+pj$, $4pi$ விசைகள் தாக்குகின்றன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளையும், விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க?



விளையுள் விசை R என்க.

$R=(Pi+2Pj)+(-Pi+Pj)+4Pi$

$=(P-P+4P)i+(2P+P)j$

$=4Pi+3Pj$

$X=4P, y=3P$

விளையுள் $R=\sqrt{(4P)^2+(3P)^2}$

$=5P$

$\tan a=3/4$ $\quad a=\tan^{-1}(3/4)$

$O)\ G=2\ P.a-4P.a+P.a-P.a$

$=-2.Pa$

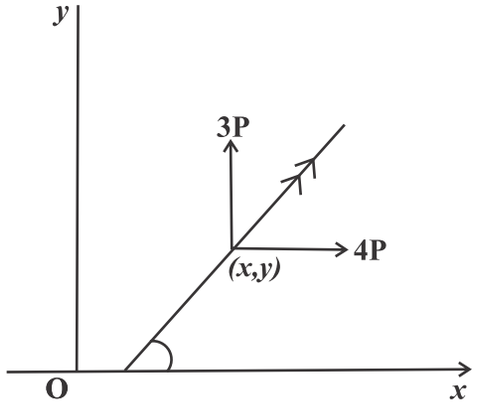
விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

O பற்றி விளையுளின் திருப்பம் = O பற்றி விசைத்தொகுதியின் திருப்பம்.

$yx-=G$

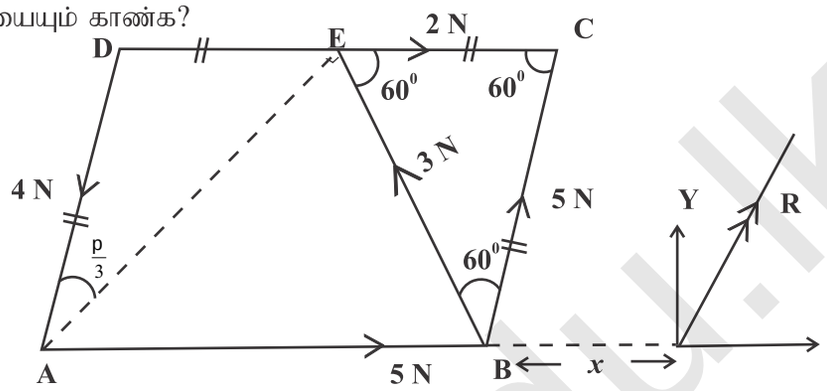
$3Px-4Py=-2Pa$

$4y-3x=2a$



07. ஓர் இணைகரம் ABCD இல் $AB = 2m, AD = 1m$ எனவும் $B\hat{A}D = \frac{p}{3}$ எனவும் கொள்வோம். மேலும் CD இன் நடுப்புள்ளி E எனவும் கொள்வோம். AB, BC, DC, DA, BE ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு முறையினாற் காட்டப்பட்ட திசைகளில் முறையே 5, 5, 2, 4, 3 நியூற்றன் பருமன்களை உடைய விசைகள் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுள் விசை $\overrightarrow{AE}$ இற்கு சமாந்தரமானதெனக் காட்டி அதன் பருமனைக் காண்க?

விளையுள் விசையின் தாக்கக்கோடு நீட்டப்பட்ட ABஐ B இலிருந்து தூரம் $\frac{3}{2}m$ இல் சந்திக்கின்றது எனவும் காட்டுக? C இனூடாக தாக்கும் ஒரு மேலதிக விசை இப்போது மேற்குறித்த விசைத் தொகுதியின் விளையுள் விசை $\overrightarrow{AE}$ வழியே இருக்கத்தக்கதாக சேர்க்கப்படுகிறது. மேலதி விசையின் பருமனையும், திசையையும் காண்க?



® $x = 5 + 5\cos 60^0 + 2 - 3\cos 60^0 - 4\cos 60^0$

$= 7 - 2\cos 60^0$

$= 7 - 2 \times \frac{1}{2}$

$= 6N$

$-y = 3\sin 60^0 - 4\sin 60^0 + 5\sin 60^0$

$= 4\sin 60^0$

$= 4 \times \sqrt{3}/2$

$= 2\sqrt{3}$

$R = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad R = 4\sqrt{3}\ N$

$= \sqrt{36 + 12}$

$= \sqrt{48}$

$\tan q = \frac{2\sqrt{3}}{6}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$

$q = p/6$

∴ விளையுள் விசை AE சமாந்தரம் ஆகும்.

www.lkedu.lk

நீட்டப்பட்ட AB ஐ விளையுள் சந்திக்கும் புள்ளி P என்க.

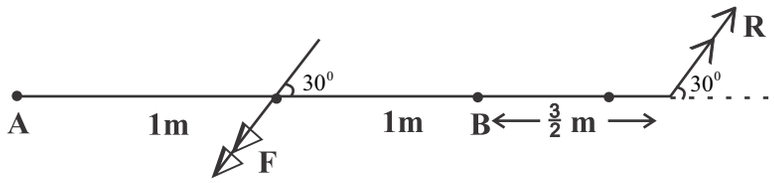
B) $yx = 4 \times 2\sin \frac{\pi}{3} - 2 \times 1\sin \frac{\pi}{3}$

$2\sqrt{3}\, x = 6\sin \frac{\pi}{3}$

$2\sqrt{3}\, x = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{3}{2}\text{m}$

R இன் தாக்க கோடு நீட்டப்பட்ட ABஐ சந்திக்கும் புள்ளி $x = \frac{3}{2} m$ Bஇல் இருந்து



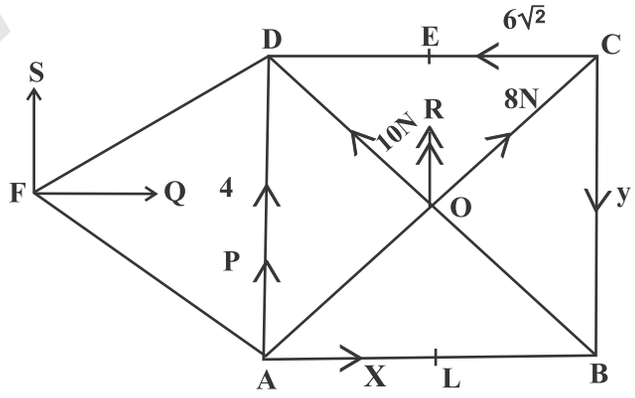
$A)$ $R\left(2+\frac{3}{2}\right)\sin 30^0 = F.1 \sin 30^0$

$4\sqrt{3} \times \frac{7}{2} = F$

$F = 14\sqrt{3}\ N$

08. ABCD ஆனது பக்கம் a மீற்றரை உடைய சதுரமெனக் கொள்வோம். AD, CD, AC, BD, AB, CB ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்து ஒழுங்கு முறையினால் காட்டப்படுகின்ற திசைகளில் முறையே 4, $6\sqrt{2}$, 8, 10, x, y நியூற்றன் பருமன் உள்ள விசைகள் முறையே தாக்குகின்றன.

இத்தொகுதி OE வழியே தாக்கும் ஒரு தனி விளையுளாக ஒடுங்குகின்றது. இங்கு O,E ஆகியன முறையே AC, CD ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகும். x,y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கண்டு விளையுளின் பருமன் 4K நியூற்றன் எனக் காட்டுக. இங்கு $K = 2 - \sqrt{2}$ F ஆனது OAFD ஒரு சதுரமாக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளியெனக் கொள்வோம். மேற்குறித்த விசைத் தொகுதிக்குச் சமவலுவானவையும் ஒன்று $\overrightarrow{AD}$ வழியே உள்ளதும் மற்றையது புள்ளி F இனூடாக உள்ளதுமான இரு விசைகளைக் காண்க? விசைகளின் தளத்தில் போக்கு ABCD யில் தாக்கும் திருப்பம் 6ka நியூற்றன் மீற்றரை உடைய ஓர் இணை தொடக்க தொகுதியுடன் சேர்க்கப்படுகிறது. புதிய தொகுதியின் விளை யுளின் தாக்கக்கோட்டினைக் காண்க?



தொகுதிக்கு $^{\circledR}$ $C = 6\sqrt{2} - \frac{10}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$

$C = 6\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0$

$C = 7\sqrt{2}\ N$

O) $X \times \frac{a}{2} - y \times \frac{a}{2} + 6\sqrt{2} \times \frac{a}{2} - 4 \times \frac{a}{2} = 0$

$y = 7\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4$

$= 13\sqrt{2} - 4N$

$^{\circledR}$ கிடைக்கூறு $7\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 8 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= . 7\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$

$= 0$

- நிலைக்குத்துக்கூறு $= 4 - y + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$

$= 4 - 13\sqrt{2} + 4 + 9\sqrt{2}$

$= 4\left(2 - \sqrt{2}\right)$

$= 4\ KN \qquad \{K = 2 - \sqrt{2}\}$

® $Q = P + S = 4\ K$

$F) \ 4K \times \sqrt{2}\ a = \frac{P \times \sqrt{2}\ a}{2}$

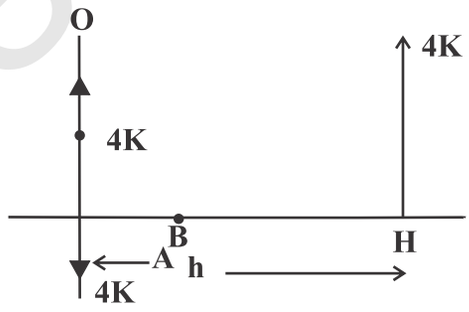
$P = 8KN, S = -4K$

F,இல் விசை $F = 4KN^{-}$

AD வழியே விசை $= 8KN -$

$\curvearrowleft O \ 4Kh = 6Ka$

$h = \frac{3a}{2} m$



புதிய தொகுதியில் விளையுளின் தாக்கக் கோடானது BC இற்கு சமாந்தரமாக நீட்டப்பட்ட AB இல் B இல் இருந்து a தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி H வழியே இருக்கும்.

09. துரம் m இலும் விசை நியூற்றன் அளக்கப்பட்ட xy - தளத்தில் உள்ள நான்கு விசைகளைக் கொண்ட ஒரு தொகுதி அருகில் தரப்பட்டுள்ளது.

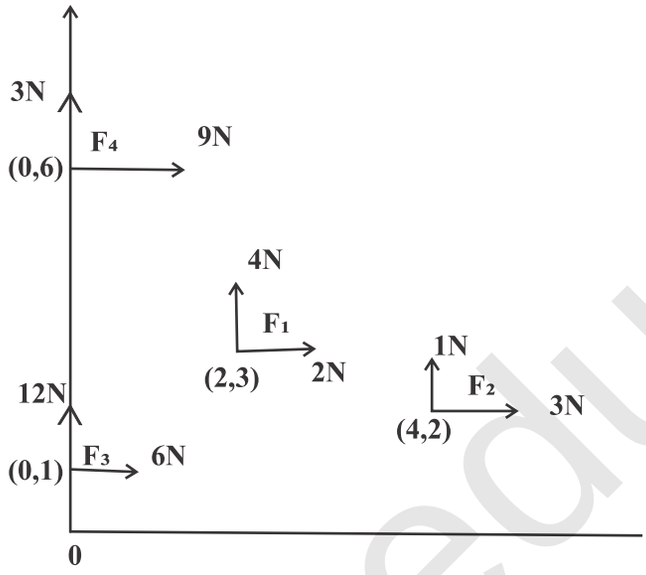
தாக்கப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் ஆள் கூறுகள்	OX, OY விசைகளில் விசைக்கூறுகள்
B(2,3)	$F_1 = (2,4)$
C(4,2)	$F_2 = (3,1)$
L(0,1)	$F_3 = (6,12)$
M(0,6)	$F_4 = (9,3)$

(i) உற்பத்தி Oவையும் A(1,1) ஐயும் பற்றி F_1, F_2 ஆகிய இரு விசைகளின் திருப்பங்களின் பூச்சிய மெனக் காட்டி இதிலிருந்து உற்பத்தி Oவைப் பற்றி F_1, F_2, F_3, F_4 ஆகிய நான்கு விசைகளைக் கொண்ட தொகுதியின் திருப்பம் G யின் பருமன் வலஞ்சுழிப் போக்கில் 60Nm எனக் காட்டுக.

www.lkedu.lk

(ii) தொகுதியின் விளையுள் R இன் கூறுகள் (x,y) ஐக் காண்க. இதிலிருந்து R இன் தாக்கக் கோடு y அச்சைச் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

(iii) இவ்விசைத் தொகுதி புள்ளி (0, -4) இல் தாக்கும் ஒரு தனி விசையினாலும் திருப்பம் G, ஐ உடைய ஓர் இணையினாலும் பிரதி வைப்புச் செய்யப்படுகின்றது. G_1 ஐ உடைய ஓர் இணை யினாலும் பிரதி வைப்புச் செயயப்படுகின்றது. G_1 இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு தனி விசையின் தாக்கக்கோடு புள்ளி $D\left(\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ இனூடாகச் செய்கின்றதெனக் காட்டுக?



புள்ளி F_1, F_2 இன் திருப்பத்திற்கு

O) $\Delta 4' 2 + 1' 4 - 2' 3 - 3' 2$

$= 8 + 4 - 6 - 6$

$= 0$

புள்ளி $A(1,1)$ பற்றி F_1, F_2 இன் திருப்பங்கள்

$4' 1 + 1' 3 - 2' 2 - 3' 1$

$= 4 + 3 - 4 - 3$

$= 0$

F_1, F_2, F_3, F_4 O பற்றி திருப்பம் $= F_3, F_4$ இற்கு O பற்றி திருப்பம்

$6' 1 + 9' 6 = 60\,\text{Nm}$

(ii) தொகுதிக்கு

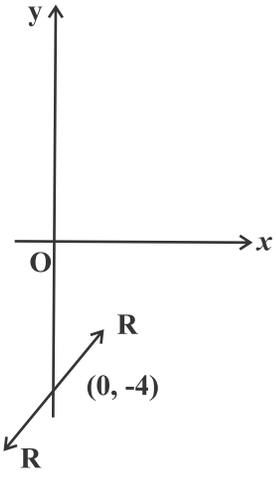
® $x = 2 + 3 + 6 + 9 = 20N$

- $y = 4 + 1 + 12 + 3 = 20N$

விளையுள் விசை (x,y) யின் தாக்கக்கோடு y அச்சை N(o,b) இல் வெட்டுகிறதென்க.

O பற்றி திருப்பம் எடுக்க

$x.b = 60 \Rightarrow b = \frac{60}{x} = \frac{60}{20} = 3$ $N \circ (0,3)$



(iii) (0, -4) இல் -R, R எனும் விசைகளை அறிமுகம் செய்க எனின் தொகுதியில் விசை R உம் திருப்பம் G உம் உடைய இணையும் ஆகும்.

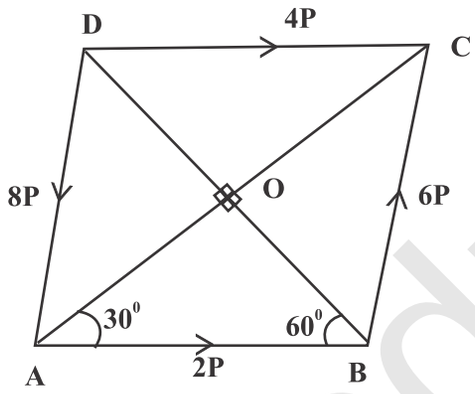
இங்கு $G_1 = x(3+4) = 140\,\text{Nm}$

(0, -4) இல் தனி விசை R இன் தாக்க கோடு $y = x - 4$

புள்ளி $D = \left(\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}\right)$

www.lkedu.lk

10. ABCD என்பது ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2l$ BD = $2l$ ஆகவும் ஒரு சாய்சதுரமெனக் கொள்வோம். சாய்சதுரத்தின் மூலை விட்டங்கள் புள்ளி O இல் சந்திக்கின்றன. 2p, 6p, 4p, 8p, 6p நியூற்றன் பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, BC, DC, DA, BD ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு முறையினால் காட்டப்படும் திசைகளில் தாக்குகின்றன. OC, $\overrightarrow{OD}$ ஆகியவற்றின் திசைகளில் விசைத் தொகுதியை துணிந்து விளையுளின் தாக்கக்கோடானது BC இற்கு சமாந்தரமெனக் காட்டுக? அத்துடன் தொகுதியின் O பற்றிய திருப்பத்தையும் காண்க? விளையுளின் தாக்கக்கோடானது நீட்டப்பட்ட ABயைப் புள்ளி Eஇல் சந்திக்குமெனின் BE = 2l எனக் காட்டுக. இப்போது $\alpha\rho, \beta\rho, \Upsilon\rho, \alpha\rho$ நியூற்றன் பருமனுள்ள மேலதிக விசைகள் முறையே EB, CE, CA, DC ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு முறையினாற் காட்டப்படும் திசைகளில் தொகுதிக்குப் புகுத்தப்படுகின்றன. முழுத் தொகுதியும் நாப்பத்தில் இருக்கு மெனின் α, β, Υ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களையும் காண்க?



ABCD ஓர் சாய்சதுரம் AB = AD = $2l$

$\overrightarrow{OC}$ வழியே விசைகளின் கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை = X

$$C = 4P\cos 30^0 - 8p\cos 30^0 + 2P\cos 30^0 + 6P\cos 30^0$$

$$= 2\sqrt{3}P$$

$\overrightarrow{OD}$ வழியே விசைகளின் கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை

$$y = 6p + 6p\cos 600 - 8p\cos 60 - 2p\cos 600 - 4p\cos 600$$

$$= 6p - 8p' \frac{1}{2}$$

$$= 2p$$

$$R^2 = (2p)^2 + \left(2\sqrt{3}P\right)^2$$

$$= \sqrt{16P^2}$$

$$R = 4P$$

$$\tan\theta = \frac{2P}{2\sqrt{3}P}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$q = p/6$$

www.lkedu.lk

∴ விளையுள் BC இற்கு சமாந்தரம் பெற்ற விசைகளின் திருப்பம்.

$$MO = 2P\left(\ell\cos 30^0\right) + 6P\left(\ell\cos 30^0\right) - 4P\left(\ell\cos 30^0\right) + 8P\left(\ell\cos 30^0\right)$$

$$= 12P\ell\,\sqrt{3}/2$$

$$= 6\sqrt{3}\,P\ell$$

O பற்றித் திருப்பம் எடுக்க.

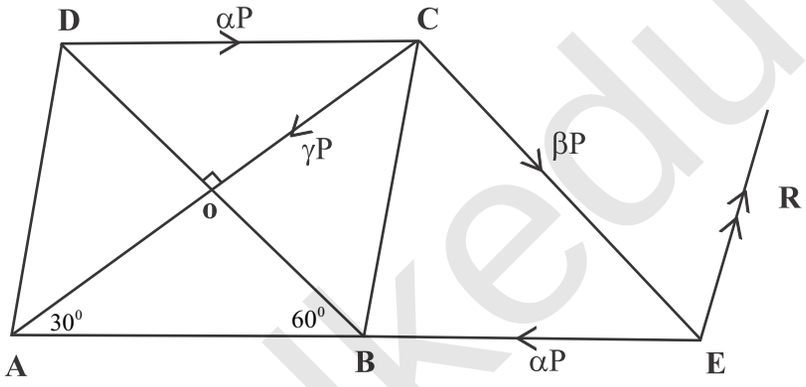
$$\nabla(o \qquad R\left(AE\sin 60^0\right) = 6\sqrt{3}\,P\ell$$

$$AE = \frac{6\sqrt{3}\,P\ell}{4P\sqrt{3}/2}$$

$$= 3\ell$$

$$BE = 3\ell - \ell$$

$$= 2\ell$$



சமநிலைக்கு

$\overrightarrow{OC}$ வழியே கூறாக்க $= 0$

OD வழியே கூறாக்க $= 0$

E பற்றி திருப்பம் எடுக்க $= 0$

$$OC \qquad x - gP = 0$$

$$2\sqrt{3}P - gP = 0$$

$$g = 2\sqrt{3}$$

$$OD \qquad y - br = 0$$

$$2r - br = 0$$

$$b = 2$$

$$(E \qquad gP(2\ell) - ar(2\ell\sin 60^0) = 0$$

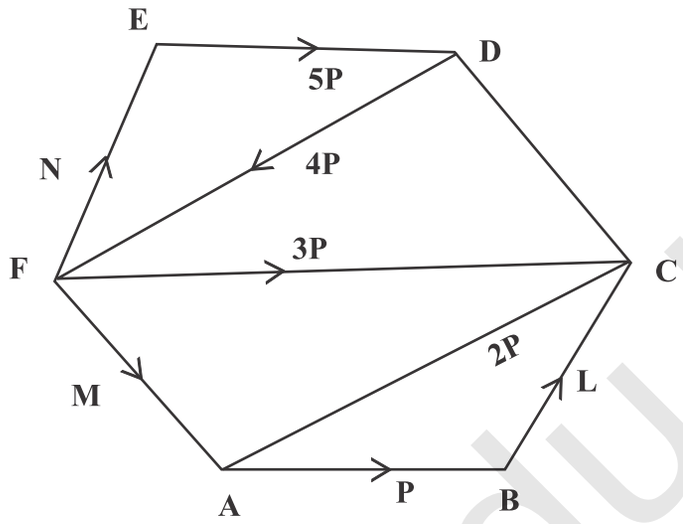
$$g = a\sqrt{3}/2$$

$$a = 4$$

www.lkedu.lk

11. A,B, C, D, E, F ஆகியன ஒரு பக்கத்தின் 20 மீற்றர் ஆகவுள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியின் இடஞ்சுழிப் போக்கில் எழுக்கப்பட்ட உச்சிகளாகும். P, 2Pl, 3P, 4P, 5P, L, M, N நியூற்றன் பருமனுள்ள விசைகள் முறையே Ab, CA, FC, ED, BC, FA, FE ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்து ஒழுங்கு முறையினால் காட்டப்படும் போக்கில் தாக்குகின்றன.

தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்குமெனின் L, M, N ஆகியவற்றை P இன் சார்பில் காண்க?



தொகுதியின் சமநிலைக்கு

® $C = 0$

$$P + L\cos 60^0 + 3P - 2P\cos 30^0 + 5P + M\cos 60^0 - 4P\cos 30^0 + N\cos 60^0 = 0$$

$$L + M + N = \frac{-9P}{\cos 60^0} + 6P\frac{\cos 30^0}{\cos 60^0}$$

$$= -18P + 6P\sqrt{3}$$

$$= 6P(\sqrt{3} - 3)$$

$- y = 0$

$$-2P\sin 30^0 - M\sin 60^0 + L\sin 60^0 + 4P\sin 30^0 = 0$$

$$L + M - M = 6P\frac{\sin 30^0}{\sin 60^0}$$

$$= 2\sqrt{3}P$$

F பற்றித் திருப்பம் எடுக்க.

$$-2P(2a) + P(2a\cos 300) + L(4a\cos 30^0) - 5P' 2a\cos 30^0 = 0$$

$$2\sqrt{3}L = 4P + 3P' \frac{\sqrt{3}}{2} = 4P + 4\sqrt{3}P$$

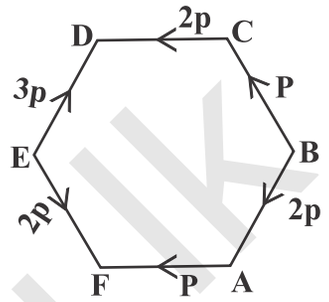
$$L = \frac{2}{\sqrt{3}}P + 2P = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3} + 3\right)P$$

$$M = \left(2\sqrt{3} - 9\right)P$$

$$N = \left(\frac{10\sqrt{3}}{3} - 11\right)P$$

www.lkedu.lk

12. 2a மீற்றர் நீளமான பக்கத்தினை கொண்ண ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி ABCDEF இன் AB, BC, CD, ED, EF, AF என்னும் பக்கங்கள் வழியே எழுத்து ஒழுங்கு முறையினால் காட்டப்படும் திசைகளில் முறையே 2P, P, 2P, 3P, 2P, P நியூற்றன் பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. தொகுதியானது $\sqrt{3}\ Pa$ நியூற்றன் மீற்றர் உள்ள ஓர் இணையுடன் AC வழியே $2\sqrt{3}\ P$ தாக்கும் நியூற்றன் என்னும் ஒரு விளையுள் விசைக்கு சமவலுவானதெனக் காட்டுக. தொகுதி ஒரு தனி விளையுள் விசைக்கு சமவலு வானதெனின், இவ்விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோட்டினதும் (தேவையெனின் நீட்டப்பட்ட) FA இனதும் வெட்டுப்புள்ளியைக் காண்க. இதிலிருந்து தொகுதியை நாப்பத்தில் வைத்திருப்பதற்குத் தொகுதியில் புகுத்தப்பட வேண்டிய தனி விசையின் பருமனையும், திசையையும் காண்க?



$\vec{X} = -\ P + \cos 60^0 - P\cos 60^0 - 2P + 3P\cos 60^0 + 2P\cos 60^0$

$= 6P\cos 60^0 - 3p = 0$

$-Y = 12\sin 60^0 + P\sin 60^0 + 3P\sin 60^0 - 2P\sin 60^0$

$= 4P\sin 60^0$

$= 4P$ Û $\sqrt{3}/2$

$= 2\sqrt{3}\ P$

$R^2 = x^2 + Y^2$

$= 0 + (2\sqrt{3}\ P)2$

$R = 2\sqrt{3}\ P$

$R^2 = x^2 + y^2$

$R = 2\sqrt{3}$ PN விளையுள் விசை AC வழியே இருக்கும்.

A பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

$G = P.2a\sin 60^0 + 2P.\ 4a\ \sin 60^0 - 3P - 4a\cos 30^0 + 2P.2a\sin 60^0$

$= Pa\sqrt{3}$ Nm

∴ தொகுதியானது பருமன் = $Pa\sqrt{3}$ Nm உள்ள ஓர் இணையுடன் AC வழியே தாக்கும் $2\sqrt{3}\ PN$ எனும் ஓர் விளையுள் விசைக்கு சமவலுவானது.

நீட்டப்பட்ட FA இல் A இலிருந்து x தூரத்தில் உள்ள புள்ளி H இல்

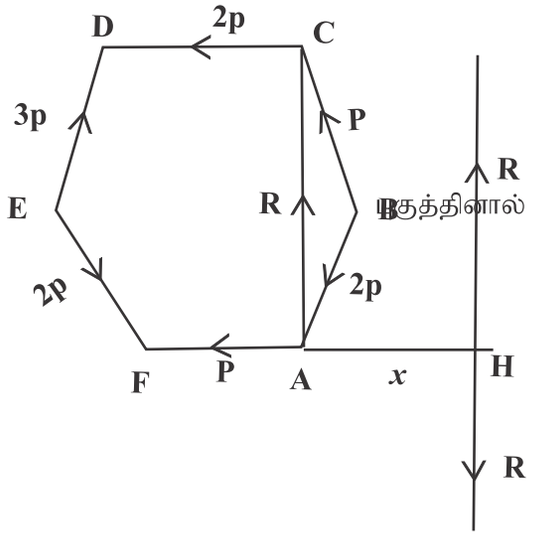
$2\sqrt{3}\ P$, $2\sqrt{3}\ P$ பருமன் உள்ள விசைகளை சமமாகவும் எதிராகவும் ACஇற்குச் சமாந்தரமாக புகுத்துக.

$2\sqrt{3}$ P, $= \sqrt{3}$ Pa

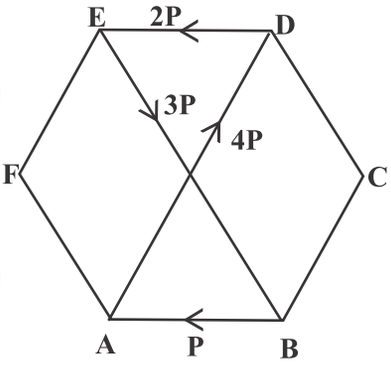
$2\sqrt{3}\ Px = \sqrt{3}\ Pa$

$= a/2$

H இல் AC இற்கு சமாந்தரமாக ஒரு தனி விசை $2\sqrt{3}\ P$ விளையுள் E விசை ஆகும். H இல் $2\sqrt{3}\ P$ விசையை CA இற்கு சமாந்தரமான திசையில் தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும்.



13. ABCDEF என்பது ஒவ்வொரு பக்கத்தினதும் நீளம் a மீற்றர் ஆன ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். BA, EB, DE, AD ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்து வரிசையினால் காட்டப்படும் திசைகளில் முறையே P, 3P, 2P, 4P நியூற்றன் விசைகள் தாக்குகின்றன. தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க. அறுகோணியின் ஓர் உச்சியைப்பற்றி திருப்பங்களை எடுப்பதன் மூலம் விளையுளின் தாக்கக் கோட்டையும் காண்க. அறுகோணியின் தளத்தில் உள்ள இணை தொகுதியுடன் சேர்க்கப்படும் போது தொகுதியை வழியே உள்ள ஒரு தனி விசையாக ஒடுங்கும் எனக்காட்டுக?



® $X = -P - 2P + \frac{1}{2}\times 3P + 4P \times \frac{1}{2}$

AB வழியே $= \frac{1}{2}P$

AE வழியே

$- \quad y = (4-3)P \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}P}{2}$

R இன் பருமன் $= \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{\frac{P^2}{4} + \frac{3}{4}P^2}$

$= P$

$\overrightarrow{AB}$ யுடன் விளையுள் R ஆக்கும் கோணம் $= \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$= \pi/3$

R ஆனது BC இற்கு சமாந்தரமாகும்.

$D) \quad 3P \times a\frac{\sqrt{3}}{2} - Pa\sqrt{3} = P\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

PX D இல் இருந்து B யிற்கான செங்குத்து தூரம்

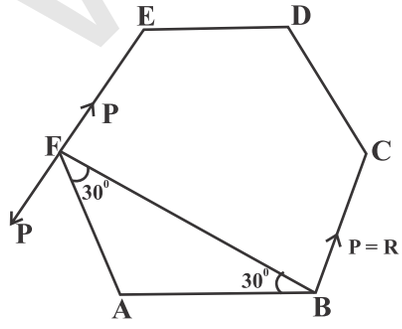
∴ விளையுள் R இன் தாக்கக்கோடு $\overrightarrow{BC}$ வழியே இருக்கும்.

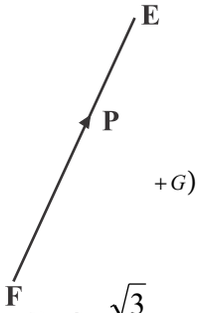
$A) \quad 2Pa\sqrt{3} - 3Pa\sqrt{3}/2 = P\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

PX தாக்கக்கோடு BC யிற்கு யுயிலிருந்தான செங்குத்து.

$B) \quad 2P.a\sqrt{3} - 4P.a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

∴ R இன் தாக்கக்கோடு BC வழியே இருக்கும்.





பிரயோகிக்கப்பட வேண்டிய இணை $= G = Px\ FB = Px\ 2a\frac{\sqrt{3}}{2}$

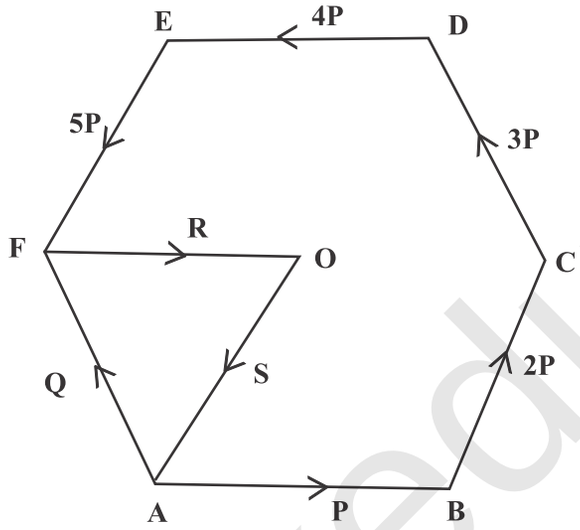
$= Pa\sqrt{3}$ Nm

www.ukedu.lk

14. ABCDEF என்பது மையம் O ஆகவும் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் a மீற்றராகவும் உள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். P, 2P, 3P, 4P, 5P நியூற்றன் என்னும் ஐந்து விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DE, EF ஆகிய மூன்று பக்கங்களின் வழியே எழுத்து ஒழுங்கு முறையினால் காட்டப்படும் திசைகளில் தாக்குகின்றன. முக்கோணி AFO வினன் முறையே AF, FO, OA, ஆகிய பக்கங்களின் வழியே தாக்கும் Q,R,S நியூற்றன் என்னும் மூன்று புதிய விசைகள் இத்தொதியுடன் சேர்க்கப்படுகின்றன. இணைந்த தொகுதி

(i) நாப்பத்தில் இருப்பதற்கு

(ii) போக்கு ABC யில் திருப்பம் $Pa\sqrt{3}\ Nm$ ஐ உடைய ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளதாக இருப்பதற்கு Q, R, S ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை P சார்பில் காண்க?



வகை (i) வகை (ii) இரு வகையிலும் ® ,- கூறுகள் $=0$

$$\rightarrow \quad P-4P+\frac{1}{2}(2P-3P-5P)+R-\frac{1}{2}(Q+S)$$

$$R=6P+\frac{1}{2}(a+S)$$

$$\uparrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(Q-5)=0$$

$$S=Q$$

O பற்றித் திருப்பம் எடுக்க.

வகை (i) சம நிலைக்கு $\frac{a\sqrt{3}}{2}(15P-Q)=0$

$$①+②\quad S=Q=15P$$

$$R=21P$$

வகை (ii)

இணை $\frac{a\sqrt{3}}{2}(15P-Q)=Pa\sqrt{3}$

$$①, ②\ \text{Þ}\quad S=Q=13P$$

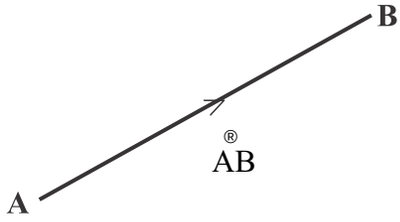
$$R=19P$$

www.lkedu.lk

காவிகள்

காவியை வரையறுத்தல்:

காவி திசை கோடிட்ட கோட்டுத் துண்டம் ஒன்றினால் வகை குறிக்கப்படும். கோட்டின் நீளம் காவியின் பருமனை வகைகுறிக்கும் அம்புக்குறி அதன் திசையினைக் காட்டும.



அட்சர கணித வகைக்குறித்தல்:

அட்சரகணித வகைக்குறித்தலில் காவி $\overset{\circledR}{AB} = \underline{a}$ என்றவாறு சிறிய எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும்.

காவி ஒன்றின் மட்டும்:

காவி ஒன்றின் பருமன் மட்டும் எனப்படும் $\overset{\circledR}{AB}$ எனும் காவியின் பருமன் $\left|\overset{\circledR}{AB}\right|$ எனக் குறிக்கப்படும்.

அலகுக்காவி:

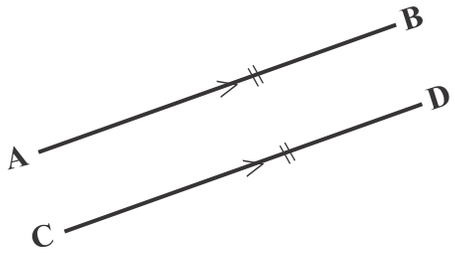
ஒரு காவியின் பருமன் ஓரலகு ஆயின் அக்காவி அலகுக்காவி எனப்படும். $\underline{a}$ இன் திசையிலான அலகுக்காவி $\frac{\underline{a}}{\left|\underline{a}\right|}$

பூச்சியக் காவி :

பருமன் பூச்சியமாக உள்ள காவி பூச்சியக் காவி எனப்படும். இது $\underline{0}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

சமமான காவிகள்:

$\overset{\circledR}{AB} = \overset{\circledR}{CD}$ எனின்



1) $\left|\overset{\circledR}{AB}\right| = \left|\overset{\circledR}{CD}\right|$

2) AB//CD

3) $A \rightarrow B$ உம் $C \rightarrow D$ உம் ஒரே போக்கு.

காவி அட்சரகணித விதிகள்:

01. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

02. $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$

03. $m(n\underline{a}) = (mn)\underline{a}$

04. $(m+n)\underline{a} = m\underline{a} + n\underline{a}$

05. $m(\underline{a} + \underline{b}) = m\underline{a} + m\underline{b}$

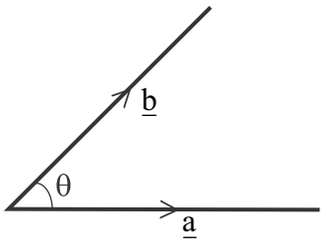
www.lkedu.lk

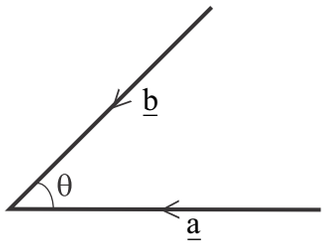
எண்ணிப்பெருக்கம் (குற்றுப் பெருக்கம்):

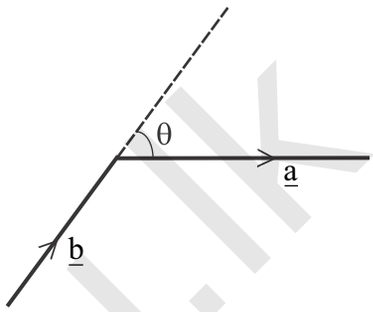
$\underline{a}$, $\underline{b}$ என்பன பூச்சியமற்ற காவிகளாக இருக்க இவற்றின் எண்ணிப்பெருக்கம் $\underline{a} \cdot \underline{b}$ ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}|\ |\underline{b}| \cos\theta$$

இங்கு θ காவிகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $0 \leq \theta \leq \pi$







எண்ணிப்பெருக்கத்தின் பண்புகள்

01. $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$

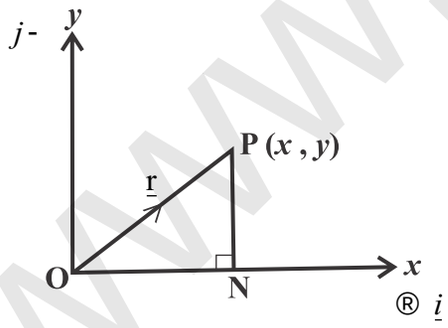
02. $\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$

03. $m(\underline{a} \cdot \underline{b}) = m\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot (m\underline{b})$

04. $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்பன பூச்சியமற்ற ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான காவிகளாக இருப்பின் $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ ஆகும். இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$

ஆள்கூற்றுக் காவிக் குறிப்பீடு:



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}$$
$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$$
$$|\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

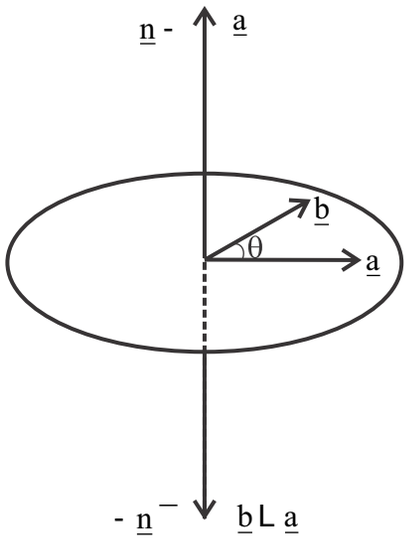
காவிப் பெருக்கம்:

இரு காவிகள் $\underline{a}$, $\underline{b}$ இன் காவிப்பெருக்கம் $\underline{a} \times \underline{b}$ என எழுதப்படும். இப்பெருக்கம் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$\underline{a} \times \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \sin\theta\ \underline{n} \qquad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

இங்கு θ காவிகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\underline{n}$, $\underline{a}$ இற்கும் $\underline{b}$ இற்கும் செங்குத்தான அலகுக்காவி.

$$\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$$



www.lkedu.lk

பகுதி – I

01. நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி A,B,C,D எனும் புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}, 3\underline{a} - \underline{b}, a + 4\underline{b}$ ஆகும். $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$ என்பவற்றைக் காண்க?

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}, \overrightarrow{OC} = 3\underline{a} - \underline{b}, \overrightarrow{OD} = \underline{a} + 4\underline{b}$

$\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = \overline{OC} - \overline{OA}$

$= 3\underline{a} - \underline{b} - \underline{a}$

$= 2\underline{a} - \underline{b}$

$\overline{DB} = \overline{OB} - \overline{OD}$

$= \underline{b} - (\underline{a} + 4\underline{b})$

$= - \underline{a} - 3\underline{b}$

$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}$

$= 3\underline{a} - \underline{b} - \underline{b} = 3\underline{a} - 2\underline{b}$

$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA}$

$= \underline{a} + 4\underline{b} - \underline{a} = 4\underline{b}$

02. $\underline{a} = 2\sqrt{3}\,\underline{i} + 2\underline{j}, \underline{b} = -3\sqrt{3}\,\underline{i} + 3\underline{j}$ எனின்

a, b இற் கிடையேயான கோணத் தைக் காண் க.

$|\underline{a}| = \sqrt{12+4} = 4\ , |\underline{b}| = \sqrt{27+9} = 6$

$\underline{a} . \underline{b} = \left(2\sqrt{3}\,\underline{i} + 2\underline{j}\right) . \left(-3\sqrt{3}\,\underline{i} + 3\underline{j}\right)$

$= -18 + 6 = -12$

$\underline{a} . \underline{b} = |\underline{a}|\ |\underline{b}|\ Cos\,\theta$

$-12 = 4 \times 6 X\ Cos\,\theta$

$Cos\,\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{2\pi}{3}$

03. $\underline{a} = 12\underline{i} + 5\underline{j},\ \underline{b} = 5\underline{i} + 12\underline{j},\ \underline{C} = a\underline{i} + (1 - a)\,\underline{j}$

என்க. இங்கு a SIR.

(i) $|\underline{a}|$, $|\underline{b}|$ ஐக் காண்க.

(ii) α இன் சார்பில் $\underline{a} . \underline{c}, \underline{b} . \underline{c}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$\underline{a}$ இற்கும் $\underline{c}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணம்.

$\underline{b}$ இற்கும் $\underline{c}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணத்திற்குச் சமமெனின் $\alpha = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

Answer:-

(i) $|\underline{a}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \qquad |\underline{b}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

www.lkedu.lk

(ii) $\underline{a}.\underline{c} = 12a + 5(1 - a) = 7a + 5$

$\underline{b}.\underline{c} = 5a + 12(1 - a) = -7a + 12$

$\underline{a}$, $\underline{c}$ = இற்கிடையிலுள்ள கோணம் β என்க

$\underline{a}.\underline{c} = |\underline{a}||\underline{c}|\cos b \quad \underline{b}.\underline{c} = |\underline{b}||\underline{c}|\cos b$

$\therefore \quad \underline{a}.\underline{c} = \underline{b}.\underline{c} \quad (|\underline{a}| = |\underline{b}|)$

$\backslash \quad 7a + 5 = -7a + 12$

$\therefore \quad a = \frac{1}{2}$

04. $-\underline{i} + 3\underline{j}, 3a\underline{i} + a\underline{j}$ ஆகியன முறையே ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி A,B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் ஆகும். இங்கு a(>0) ஒரு மாறிலி. எண்ணிப் பெருக்கத்தைப் பயன் படுத்தி $A\hat{O}B = \frac{p}{2}$ எனக் காட்டுக. C ஆனது OACB ஒரு செவ்வகமாக இருக்குமாறு உள்ள புள்ளியென கொள்வோம். காவி $\overrightarrow{OC}$ y அச்சு வழியே இருக்குமெனின் a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

எண்ணிப் பெருக்கம் $\overline{OA}.\overline{OB}$

$= (-\underline{i} + 3\underline{j}).(3a\underline{i} + a\underline{j})$

$= -3a + 3a = 0$

$\backslash \quad A\hat{O}B = \frac{p}{2}$

$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$

$= \overline{OA} + \overline{OB}$

$= (-\underline{i} + 3\underline{i}) + (3a\underline{i} + a\underline{j})$

$= (-1 + 3a)\underline{i} + (3 + a)\underline{j}$

y அச்சு வழியே $\overrightarrow{OC}$ இருக்கும்.

$\therefore \quad -1 + 3a = 0 \therefore \quad a = \frac{1}{3}$

05. (i) $\underline{a} = 4\underline{i} - 3\underline{j}$, $\underline{b}\lambda\underline{i} + 2\underline{i}$ ஆகிய காவிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானதெனில் λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $\underline{a}$ இன் திசையிலான அலகுக்காவியைக் காண்க.

(iii) $\underline{a}$ வழியே 20 அலகு பருமனுடைய காவியை காண்க?

(i) $\underline{a} \perp \underline{b}$ எனில் $\underline{a}.\underline{b} = 0$

$(4\underline{i} - 3\underline{j}).(\lambda\underline{i} + 2\underline{j}) = 0$

$4\lambda - 6 = 0$

$\lambda = \frac{3}{2}$

(ii) $\underline{a}$ இன் திசையிலான அலகுக்காவி

$= \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{4\underline{i} - 3\underline{i}}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$

$= \frac{4}{5}\underline{i} - \frac{3}{5}\underline{j}$

(iii) $\underline{a}$ வழியே 20 அலகு பருமனுடைய காவி

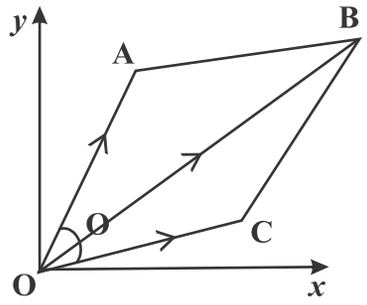
$= 20\left(\frac{4}{5}\underline{i} - \frac{3}{5}\underline{j}\right)$

$= 16\underline{i} - 12\underline{j}$

www.lkedu.lk

06. நிலைத்த உற்பத்தி O குறித்து A,B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{i}+3\underline{j}$, $4\underline{i}+4\underline{j}$ ஆகும். அத்துடன் C ஆனது OABC ஓர் இணைகரமாக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி ஆகும். $\overrightarrow{OC}=3\underline{i}+\underline{j}$ எனக் காட்டுக.

$A\hat{O}C=\theta$ என்க. $\overline{OA}.\overline{OC}$ ஐ கருதுவதன் மூலம் $Cos\theta=\frac{3}{5}$ எனக் காட்டுக.



$\overline{OA}=\underline{i}+3\underline{j}, \overline{OB}=4\underline{i}+4\underline{j}$

DOBAல் $\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}$

$=\overline{OB}-\overline{OA}$

$=(4\underline{i}+4\underline{j})-(\underline{i}+3\underline{j})$

$=3\underline{i}+\underline{j}$

$\overline{OC}=\overline{AB}$ ⇒ $\overrightarrow{OC}=3\underline{i}+\underline{j}$

$\overline{OA}.\overline{OC}=(\underline{i}+3\underline{i}).(3\underline{i}+\underline{j})$

$=3+3=6$

$\overline{OA}.\overline{OC}=|\overline{OA}|\ |\overline{OC}|\ Cos A\hat{O}C$

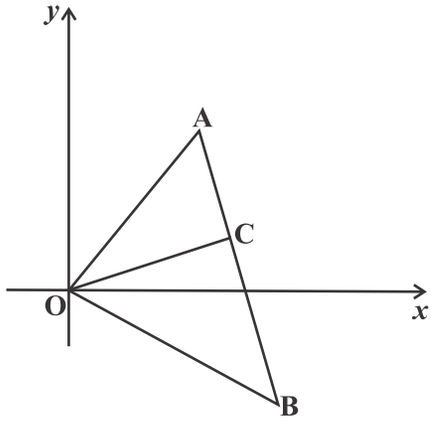
$6=\sqrt{1^2+3^2}\ \sqrt{3^2+1^2}\ Cos\theta$

$6=\sqrt{10}\ \sqrt{10}\ Cos\theta$

⇒ $Cos\theta=\frac{3}{5}$

07. உற்பத்தி Oஐ குறித்து A,B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $\lambda\underline{i}+2\underline{j}, 2\underline{i}-\lambda\underline{j}$ இங்கு $\lambda>0$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள மெய்யெண் ஆகும். $A\hat{O}B$ ஒரு செங்கோணமெனக் காட்டுக.

C ஆனது கோட்டுத் துண்டம் AB இன் நடுப்புள்ளி ஆகும். காவி $\overrightarrow{OC}$ ஆனது பருமன் 3ஐ கொண்டிருப்பதோடு அது அலகு காவி $\underline{i}$ உடன் கோணம் $\frac{\pi}{3}$ ஐ ஆக்குமெனின் λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?



www.lkedu.lk

$\overline{OA} = \lambda\,\underline{i} + 2\underline{i},\ \overline{OB} = 2\underline{i} - \lambda\,\underline{j}$

$\overline{OA}.\overline{OB} = (\lambda\,\underline{i} + 2\underline{j}).\ (2\underline{i} - \lambda\,\underline{i})$

$= 2\lambda - 2\lambda = 0,\ \lambda \in R$

$\therefore\ A\hat{O}B = \frac{\pi}{2}$

$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$

$= \lambda\,\underline{i} + 2\underline{i} + \frac{1}{2}((2\underline{i} - \lambda\,\underline{i}) - (\lambda\,\underline{i} + 2\underline{i}))$

$= \frac{1}{2}(\lambda + 2)\,\underline{i} + \frac{1}{2}(2 - \lambda)\underline{i}$

$\overline{OC}.\underline{i} = \frac{1}{2}(\lambda + 2) = \left|\overline{OC}\right| |\underline{i}| \cos \pi/3$

$\frac{1}{2}(\lambda + 2) = 3 \times \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lambda = 1$

08. $\underline{a} = 2\underline{i} - 3\underline{j},\ \underline{b} = \lambda\,\underline{i} + \mu\underline{j}$ ஆகுமாறு இரு காவிகள் ஆகும். $|\underline{b}| = 1$ ஆகவும் $\underline{a}$, $\underline{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\pi/2$ ஆகவும் இருப்பின் λ ஐக் காண்க?

$|\underline{b}| = 1$

$\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} = 1$

$\lambda^2 + \mu^2 = 1$ ——— ①

$\underline{a} \perp \underline{b} \Rightarrow \underline{a} . \underline{b} = 0$

$(2\underline{i} - 3\underline{j}).\ (\lambda\,\underline{i} + \mu\underline{i}) = 0$

$\Rightarrow 2\lambda - 3\mu = 0$

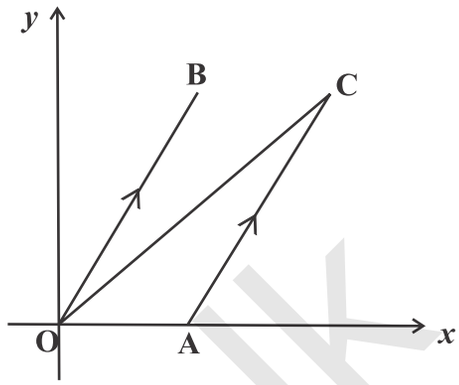
$\mu = \frac{2\lambda}{3}$ ——— ②

① × ② $\lambda^2 + \left(\frac{2\lambda}{3}\right)^2 = 1$

$\lambda = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}$

www.lkedu.lk

09. நிலைத்த உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A,B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் $\underline{i}, \underline{i}+2\underline{j}$ என்க. C என்பது Aயினூடாக OB இற்கு சமாந்தரமான நேர்கோடு மீது உள்ள ஒரு புள்ளி ஆகும். $\overrightarrow{OC} = (1+\lambda)\underline{i} + 2\lambda\underline{j}$ எனக்காட்டுக. இங்கு ஒரு மெய்யெண். BC ஆனது OB யிற்கு செங்குத்தாக இருக்கத்தக்கதாக λ வின் பெறுமானத்தைக் காண்க?



$\overrightarrow{OA} = \underline{i}$ $\overrightarrow{OB} = \underline{i} + 2\underline{j}$

$AC // OB \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \lambda(\underline{i} + 2\underline{j})$

ΔOAC ல் $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

$= \underline{i} + \lambda(\underline{i} + 2\underline{j})$

$= (1+\lambda)\underline{i} + 2\lambda\underline{j}$

$= (1+\lambda)\underline{i} + 2\lambda\underline{j}$

$BC \perp OB \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BO} = 0$ ® (1)

ΔOBC ல் $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = -(\underline{i} + 2\underline{j}) + (1+\lambda)\underline{i} + 2\lambda\underline{j}$

$= \lambda\underline{i} + 2(\lambda - 1)\underline{j}$ ® (2)

(1),(2) $\Rightarrow [\lambda\underline{i} + 2(\lambda - 1)\underline{j}] \cdot [-(\underline{i} + 2\underline{j})] = 0$

$\lambda + 4(\lambda - 1) = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{4}{5}$

10. $\underline{a}, \underline{b}$ இரு காவிகள் $|\underline{a}| = |\underline{b}| = 5$, $\underline{a}, \underline{b}$ இற்கிடைப்பட்ட கோணம் $\pi/3$ ஆகும். $|a+b|, |a-b|$ யையும் $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{a}-\underline{b}$ என்பவற்றிற்கிடையேயான கோணத்தையும் காண்க.

$\Rightarrow \underline{a}.\underline{b} = \underline{a}\ \underline{b} \cos\pi/3 = 5 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$

$|\underline{a}+\underline{b}|^2 = (\underline{a}+\underline{b}).(\underline{a}+\underline{b})$

$= |\underline{a}|^2 + |\underline{b}| + 2\underline{a}.\underline{b}$

$= 25 + 25 + 2 \times \frac{25}{2}$

$|\underline{a}+\underline{b}| = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$|\underline{a}-\underline{b}|^2 = (\underline{a}-\underline{b}).(\underline{a}-\underline{b})$

$= |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - 2\underline{a}.\underline{b}$

$= 25 + 25 - 25 = 25$

$|\underline{a}-\underline{b}| = 5$

$(\underline{a}+\underline{b}).(\underline{a}-\underline{b}) = |\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2$

$|\underline{a}+\underline{b}| \cdot |\underline{a}-\underline{b}| \cos\theta = 25 - 25$

$5\sqrt{3} \cdot 5 \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 0$

$\theta = \pi/2$

www.lkedu.lk

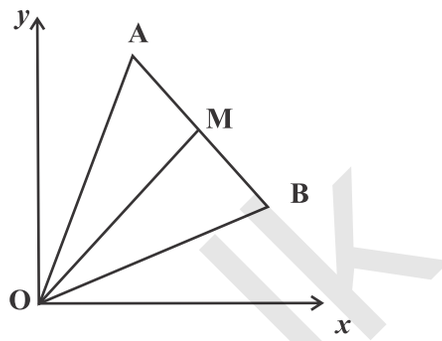
11. O எனும் புள்ளியானது உற்பத்தியாக A,B புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $a\underline{i}+8\underline{j}, 14\underline{i}+b\underline{j}$ ஆகும். M என்பது AB இன் நடுப்புள்ளியாக அதன் தானக்காவி $9\underline{i}+40\underline{i}$ ஆகும்.

(i) a,b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $\overrightarrow{OM}$ திசை வழியேயான அலகுக் காவியினைத் துணிக?

$\underline{a}=a\underline{i}+8\underline{j}$

$\underline{b}=14\underline{i}+b\underline{j}$



M, நடுப் புள் ளி AB இன்

$\therefore \overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}\left(\overline{OB}-\overline{OA}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[14\underline{i}+b\underline{j}-\left(a\underline{i}+8\underline{j}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[(14-a)\underline{i}+(b-8)\underline{j}\right]$

ΔOAM ல் $\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{AM}$

$=a\underline{i}+8\underline{j}+\frac{1}{2}\left[(14-a)\underline{i}+(b-8)\underline{j}\right]$

$9\underline{i}+40\underline{j}=\frac{1}{2}(14+a)\underline{i}+\frac{1}{2}(8+b)\underline{i}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(14+a)=9$

$a=4$

$\frac{1}{2}(8+b)=40$

$b=72$

www.lkedu.lk

12. $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}, \underline{b}$ ஆனது பருமன் 3ஐ உடைய ஒரு காவியாகும். காவி $\underline{a}$ யிற்கும் $\underline{b}$ யிற்குமிடையே உள்ள கோணம் $\frac{\pi}{4}$ எனின் $\underline{b}$ ஐ $x\underline{i} + y\underline{j}$ யில் காண்க.

$\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$

$|\underline{b}| = 3 \quad , \theta = \frac{\pi}{4} , b = x\underline{i} + y\underline{j}$

$\underline{a} . \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \cos\theta$

$(\underline{i} + \underline{j}).(x\underline{i} + y\underline{j}) = \sqrt{1+1}.3 \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad x + y = \sqrt{2} . 3 . \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad x + y = 3$

$|b| = 3 \therefore \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 3$

$x^2 + y^2 = 9$

$x^2 + (3 - x)^2 = 9$

$2x^2 - 6x = 0$

$2x(x - 3) = 0$

$x = 0$ அல்லது 3

$x = 0$ ஆக $y = 3$

$x = 3$ ஆக $y = 0$

$\underline{b} = 3\underline{i}$ OR $\underline{b} = 3\underline{j}$

13. $\overrightarrow{OA} = 10\underline{a}, \overrightarrow{OB} = 5\underline{b}, \overrightarrow{OC} = 4\underline{a} + 3\underline{b}$ ஆயின் $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ இனைக் காண்க. இதிலிருந்து A,B,C ஓர் நேர்கோட்டிலிருக்கும் எனக் காட்டுக.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 5\underline{b} - 10\underline{a} = -5(2\underline{a} - \underline{b})$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = 4\underline{a} + 3\underline{b} - 5\underline{b} = 4\underline{a} - 2\underline{b} = 2(2\underline{a} - \underline{b})$

$\overrightarrow{AB} = \frac{-5}{2}\overrightarrow{BC}$

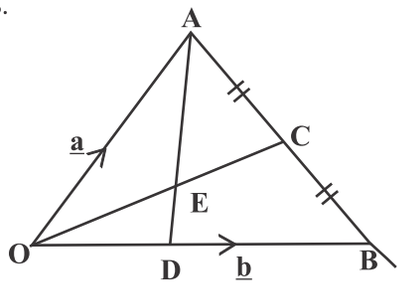
$\therefore$ A, B, C எனும் புள்ளிகள் ஒரே நேர் கோட்டில் இருக்கும்.

$AB : BC = 5 : -2$

14. OAB எனும் முக்கோணியில் C என்பது ABயின் நடுப்புள்ளி ஆகும். D என்பது OBயில் OD:DB=1:2 ஆக அமைந்த புள்ளியாகும். OC, AD ஆகிய நேர்கோடுகள் புள்ளி E இல் இடைவெட்டுகிறது.

(i) $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$ எனின் $\overrightarrow{OC}$ ஐக் காண்க.

(ii) $\overline{AD} = 4\overline{ED}$ என காட்டுக.



(i) $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} \quad \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \underline{a} + \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$

$= \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$

www.lkedu.lk

(ii) $\overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{DB} \Rightarrow \overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{OB} = \frac{1}{3}b, \overline{AD} = \frac{1}{3}b - a$

$\overline{OE} = l\,\overline{OC}$

$\overline{ED} = m\overline{AD}$

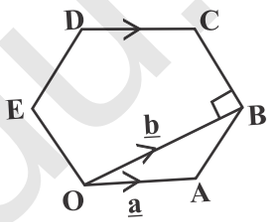
$\overline{OE} + \overline{ED} = \overline{OD}$

$l\left(\frac{a+b}{2}\right) + m\left(\frac{1}{3}b - a\right) = \frac{1}{3}b$

$\Rightarrow \frac{l}{2} = m, \frac{m}{3} + \frac{a}{2} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow m = \frac{1}{4} \Rightarrow 4\overline{ED} = \overline{AD}$

15. OABCDE என்பது ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி. $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overline{OB} = b\ \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}$ என்பவற்றை $\underline{a}, \underline{b}$ இன் உறுப்புகளில் காண்க.



$\overline{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

$\overline{OC} = 2\overline{AB} \quad (OC \parallel AB \text{ மற்றும் } OC = 2AB)$

$= 2(\underline{b} - \underline{a})$

$\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD} = 2(\underline{b} - \underline{a}) - \underline{a} = -3\underline{a} + 2\underline{b}$

$\overline{OE} = \overline{OD} + \overline{DE} = \overline{OD} - \overline{ED} = -3\underline{a} + 2\underline{b} - (\underline{b} - \underline{a})$

$= -2\underline{a} + \underline{b} \quad (\overline{ED} = \overline{AB})$

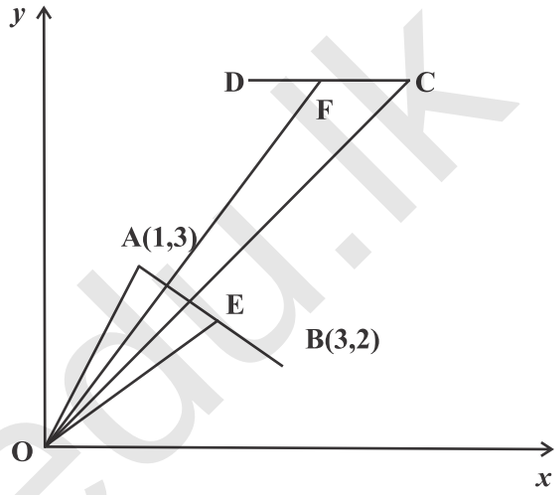
www.lkedu.lk

பகுதி – II

01. OX, OY இன் திசைகளில் முறையே உள்ள அலகுக் காவிகள் $\underline{i}, \underline{j}$ ஆகும். உற்பத்தி O தொடர்பாக $\overrightarrow{OA} = \underline{i} + 3\underline{j}, \overrightarrow{OB} = 3\underline{i} + 2\underline{j}$, $\overrightarrow{OC} = 4\underline{i} + 6\underline{j}$ மாற்றும் $\overrightarrow{OD} = 2\underline{i} + 6\underline{j}$ ஆகும். $\frac{AE}{AB} = \lambda$, $\frac{CF}{CD} = \mu$ ஆகுமாறு AB மற்றும் CD இன் மீது E,F எனும் புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.

(i) $\overrightarrow{OE} = (1 + 2\lambda)\underline{i} + (3 - \lambda)\underline{i}, \overrightarrow{OF} = 2(2 - \mu)\underline{i} + 6\underline{j}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $\lambda = 3$ ஆகும் போது புள்ளி E, OX இன் மீதும், $\mu = 2$ ஆகும் போது F, OY மீதும் இருக்குமெனக் காட்டுக.



(i) $\overline{OA} = \underline{i} + 3\underline{j}, \overline{OB} = 3\underline{i} + 2\underline{j}$

$\overline{OC} = 4\underline{i} + 6\underline{j}, \overline{OD} = 2\underline{i} + 6\underline{j}$

$\frac{AE}{AB} = \lambda \qquad \frac{CF}{CD} = \mu$

$\overline{AE} = \lambda(\overline{AB}), \quad \overline{CF} = \mu\overline{CD}$

$= \lambda(\overline{OB} - \overline{OA}), \quad \overline{CF} = \mu(\overline{OD} - \overline{OC})$

$= \lambda(2\underline{i} - \underline{j}), \quad \overline{CF} = \mu(-2\underline{i})$

$\overline{OE} = \overline{OA} + \overline{AE} \qquad \overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF}$

$= \underline{i} + 3\underline{j} + \lambda(2\underline{i} - \underline{j}) \qquad = 4\underline{i} + 6\underline{j} - 2\mu\underline{i}$

$= (1 + 2\lambda)\underline{i} + (3 - \lambda)\underline{j} \qquad = 2(2 - \mu)\underline{i} + 6\underline{j}$

(ii) $\lambda = 3$ ஆக $\qquad \mu = 2$ ஆக

$\overrightarrow{OE} = 7\underline{i} \qquad \overrightarrow{OF} = 6\underline{j}$

$\therefore$ E, OX இன் மீது அமைந்துள்ளது $\qquad$ F, OY இன் மீது அமைந்துள்ளது.

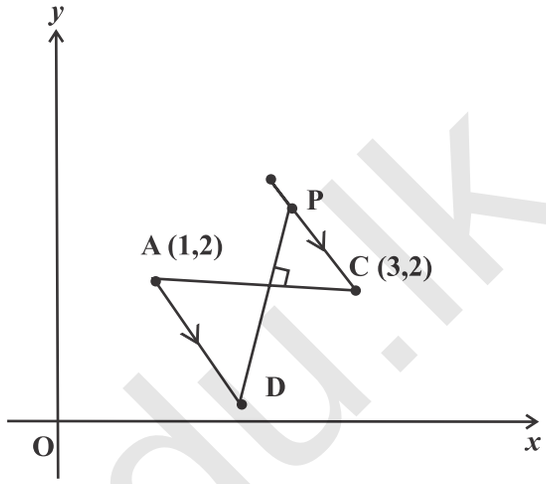
www.ikeduk

02. XY - தளத்தில் உள்ள உற்பத்தி Oவை குறித்து A,B,C என்னும் புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் $\underline{i}+2\underline{j}, 2\underline{i}+3\underline{j}, 3\underline{i}+2\underline{j}$ ஆகும்.

(i) $\overline{BP}=\frac{1}{4}\overline{BC}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக BC மீது உள்ள புள்ளி P யின் தானக்காவியைக் காண்க?

(ii) ஒரு சரிவகம் ABCD யின் பக்கம் BC ஆனது AD இற்கு சமாந்தரமாகவும் PD ஆனது AD இற்கு சமாந்தரமாகவும் PD ஆனது பக்கம் AC இற்கு செங்குத்தாகவும் இருக்கத்தக்கதாக அதன் உச்சி D எடுக்கப்பட்டுள்ளது. Dயின் தானக்காவி $\frac{9}{4}\underline{i}+\frac{13}{4}\underline{j}$ எனக் காட்டுக.

(i) $\overline{OA}=\underline{i}+2\underline{j}, OB=2\underline{j}+3\underline{j}, \overline{OC}=3\underline{i}+2\underline{j}$



$$\overline{BP}=\frac{1}{4}\overline{BC}$$

$$\overline{BO}+\overline{OP}=\frac{1}{4}\left(\overline{BO}+\overline{OC}\right)$$

$$\overline{OP}=\frac{1}{4}\overline{OC}+\overline{OB}-\frac{1}{4}\overline{OB}$$

$$\overline{OP}=\frac{1}{4}\overline{OC}+\frac{3}{4}OB$$

$$=\frac{1}{4}\left(3\underline{i}+2\underline{j}+\frac{3}{4}\left(2\underline{i}+3\underline{j}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(9\underline{i}+11\underline{j}\right)$$

(ii) $BC // AD \Rightarrow \overline{BC} // \overline{AD}$

$$\overline{BC}=\overline{BO}+\overline{OC}=\overline{OC}-\overline{OB}=\left(3\underline{i}+2\underline{j}\right)-\left(2\underline{i}+3\underline{j}\right)$$
$$=\underline{i}-\underline{j}$$

$$\overline{AD}=\overline{AO}+\overline{OD}=\overline{OD}-\overline{OA}=l\,\underline{i}+m\underline{j}-\left(\underline{i}+2\underline{j}\right)$$
$$=(l-1)\underline{i}+(m-2)\underline{j}$$

$$BC // AD \Rightarrow \frac{l-1}{1}=\frac{m-2}{-1} \Rightarrow l+m=3$$

$$\overline{PD}=\overline{OD}-\overline{OP}=\left(l-\frac{9}{4}\right)\underline{i}+\left(m-\frac{11}{4}\right)\underline{j}$$

$$\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}=2\underline{i} \quad PD \perp AC \Rightarrow \overline{PD}.\overline{AC}=0$$

$$2\left(l-\frac{9}{4}\right)=0 \Rightarrow l=\frac{9}{4}, m=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \overline{OP}=\frac{9}{4}\underline{i}+\frac{3}{4}\underline{j}$$

www.ikedu.lk

03. ஒரு தெக்காட்டின் தளத்தில் P, Q, R என்பன மூன்று புள்ளிகள் ஆகும். இங்கு O உற்பத்தி ஆகும்.
$\overline{OP} = 8\underline{i} - 6\underline{j}, \overline{OQ} = 2\underline{i} + 4\underline{j}, OR = a\underline{i} - 3\underline{j}$ என தரப்படின்

(i) $\overrightarrow{PQ}$ யைக் காண்க?

(ii) P, Q, R என்ற புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் இருப்பின் a இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க?

(iii) a = 1 ஆகவுள்ள வகையில்

$(a)\ \overline{OP} - \lambda\overline{OQ} - m\overline{OR} = O$ ஆகுமாறு λ,μ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $\overrightarrow{PQ} = \overline{PO} + \overline{OQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$

$= (2\underline{i} + 4\underline{j}) - (-8\underline{j} - 6\underline{j})$

$= 10(\underline{i} + \underline{j})$

(ii) $\overline{QR} = \overline{QO} + \overline{OR} = \overline{OR} - \overline{OQ}$

$= (a\underline{i} - 3\underline{j}) - (2\underline{i} + 4\underline{j})$

P, Q, R ஒரு நேர் கோட்டில் உண்டு

$\therefore \overline{PQ} // \overline{QR} \Rightarrow \frac{1}{a-2} = \frac{1}{-7} \Rightarrow a = -5$

(iii) $a = 1 \Rightarrow \overline{OR} = \underline{i} - 3\underline{j}$

$\overline{OP} = \lambda(2\underline{i} + 4\underline{j}) + m(\underline{i} - 3\underline{j}) = 0$

$-8\underline{i} - 6\underline{j} = (2\lambda + m)\underline{i} + (4\lambda - 3m)\underline{j}$

$\Rightarrow 2\lambda + m = -8,\ 4\lambda - 3m = -6$

$\Rightarrow \lambda = -3,\ m = -2$

04. A,B என்னும் இரு வேறு வேறான புள்ளிகளுடன் ஒரே கோட்டில் இல்லாத ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி A,B ஆகியவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகும். O பற்றி ஒரு புள்ளி C இன் தானக் காவி $\underline{C} = (1-\alpha)\underline{a} + \alpha\underline{b}$ என கொள்வோம். இங்கு $o < \alpha < 1$

(i) $\overline{AC}, \overline{CB}$ ஆகிய காவிகளை $\underline{a}, \underline{b}, \alpha$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

(ii) இதிலிருந்து புள்ளி C ஆனது கோட்டுத்துண்டம் AB மீது இருக்கின்றது எனவும் AC:CB=α:(1-α) எனவும் காட்டுக.

(i) $\overline{OA} = \underline{a}, \overline{OB} = \underline{b}, \overline{OC} = \underline{c}$

$\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = \overline{OC} - \overline{OA} = \underline{c} - \underline{a}$

$= (1-\alpha)\underline{a} + \alpha\underline{b} - \underline{a}$

$= \alpha(\underline{b} - \underline{a})$

$\overline{CB} = \underline{b} - \underline{c} = \underline{b} - ((1-\alpha)\underline{a} + \alpha\underline{b})$

$= (1-\alpha)(\underline{b} - \underline{a})$

(ii) $\overline{AC} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\overline{CB}$

$\therefore$ C ஆனது AB மீது இருக்கும் $\Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

i) $AC : CB = \alpha : (1-\alpha)$

www.lkedu.lk

05. உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A,B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகும். இங்கு O,A,B ஆகியன ஒரே கோட்டில் இருப்பதில்லை. C என்பது $\overline{OC}=\frac{1}{5}\overline{OB}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனவும் D என்பது $\overline{OD}=\frac{1}{4}\overline{AB}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனவும் கொள்க.

(i) $\overline{AC},\overline{AD}$ ஆகியவற்றை $\underline{a},\underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைப்பதன் மூலம் $\overline{AD}=\frac{5}{4}\overline{AC}$ என காட்டுக.

(ii) P, Q என்பன முறையே AB, OD ஆகியவற்றின் மீது $\overline{AP}=\lambda\overline{AB}$ ஆகவும் $\overline{OQ}=(1-\lambda)\overline{OD}$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளிகளெனக் கொள்க. இங்கு $0<\lambda<1$ ஆகும். $\overline{PC}=4\overline{CQ}$ என காட்டுக.

(i) $\overline{OA}=\underline{a},\ \overline{OB}=\underline{b}$

$\overline{OC}=\frac{1}{5}\overline{OB}=\frac{\underline{b}}{5}$ $\qquad$ $\overline{OD}=\frac{1}{4}\overline{AB}=\frac{1}{4}(\underline{b}-\underline{a})$

$\overline{AC}=\overline{AO}+\overline{OC}$ $\qquad$ $\overline{AD}=\overline{AO}+\overline{OD}$

$=\frac{\underline{b}}{5}-a$ $\qquad$ $=\frac{1}{4}(\underline{b}-\underline{a})-\underline{a}$

$=\frac{1}{4}\underline{b}-\frac{5}{4}\underline{a}$

$=\frac{5}{4}\left(\frac{\underline{b}}{5}-\underline{a}\right)$

$\therefore\ \overline{AD}=\frac{5}{4}\overline{AC}$

(ii) $\overline{PC}=\overline{PO}+\overline{OC}$

$=\overline{PA}+\overline{AO}+\overline{OC}=-\lambda\overline{AB}-\overline{OA}+\overline{OC}$

$=-\lambda(\underline{b}-\underline{a})-\underline{a}+\frac{\underline{b}}{5}$

$=(\lambda-1)\underline{a}+\frac{1}{5}(1-5\lambda)\underline{b}$

$\overline{CQ}=\overline{CO}+\overline{OQ}$

$=-\overline{OC}+(1-\lambda)\overline{OD}$

$=-\frac{\underline{b}}{5}+(1-\lambda)\frac{1}{4}(\underline{b}-\underline{a})$

$=\frac{1}{4}\left[(\lambda-1)\underline{a}+\frac{1}{5}(1-5\lambda)\underline{b}\right]$

$\therefore\ \overline{PC}=4\overline{CQ}$

www.lkedu.lk

06. ABCD என்பது ஒரு சரிவகம் ஆகும். AB//DC, AB = 2DC, BC இன் நடுப்புள்ளி M ஆகும். நீட்டப்பட்ட AM நீட்டப்பட்ட DCஐ N இல் சந்திக்கின்றது. AN = λ AM, DN = μDC, $\overline{DC} = \underline{a}$, $\overline{AD} = \underline{b}$ எனக் கொண்டு

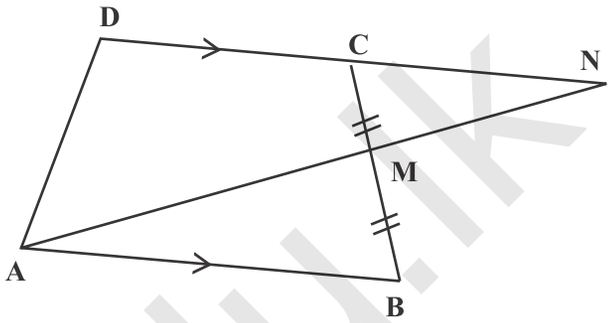
(i) $\overline{AN}$ ஐ $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகியவற்றில் காண்க?

(ii) $\overline{DN}$ ஐ $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகியவற்றில் காண்க?

(iii) காவிக்கூட்டலைப் பயன்படுத்தி λμ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(iv) இதிலிருந்து M ஆனது AN இன் நடுப்புள்ளி எனக் காட்டுக?

(v) DN ஐ C பிரிக்கும் விகிதம் யாது?



(i) $\overline{DC} = \underline{a},\ \overline{AD} = \underline{b}$

$AB // DC, AB = 2DC \Rightarrow \overline{AB} = 2\overline{DC} = 2\underline{a}$

$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \underline{b} + \underline{a}$

$\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC} = -2\underline{a} + \underline{b} + \underline{a}$

$= \underline{b} - \underline{a}$

$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$

$= 2\underline{a} + \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$

$= \frac{3}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b}$

$\overline{AN} = \lambda\ \overline{AM} = \lambda\ \left(\frac{3}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b}\right)$

(ii) $\overline{DN} = \mu\overline{DC} = \mu\underline{a}$

(iii) ΔADN ல் காவிக்கூட்டல்

$\overline{AD} + \overline{DN} = \overline{AN}$

$\underline{b} + \mu\underline{a} = \frac{3}{2}\lambda\ \underline{a} + \frac{1}{2}\lambda\ \underline{b}$

$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 2$

$\mu = \frac{3}{2}\lambda = 3$

(iv) $\overline{AN} = 3\underline{a} + \underline{b}$

$\overline{AM} = \frac{1}{2}(3\underline{a} + \underline{b})$

$\therefore$ M, AN இன் நடுப்புள்ளி.

(v) $\overline{DN} = 3\underline{a}$

$\overline{DC} = \underline{a}$

$\therefore$ $DC : CN = 1 : 2$

www.lkedu.lk

07. Q ஆனது ஒரு முக்கோணி OABயின் பக்கம் AB யை முக்கூறிடுமாறு B யிற்கு கிட்ட AB மீது உள்ள புள்ளியாகும். P ஆனது OP : OQ = 2:5 ஆக இருக்குமாறு OQ மீது உள்ள புள்ளியாகும். நீட்டப்பட்ட கோடு AP ஆனது OBயை Rல் சந்திக்கின்றது.

(i) $\overline{OP}=\frac{2}{15}(\underline{a}+2\underline{b})$ எனக் காட்டி, AP ஐ a , b ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதுக. இங்கு a , b ஆகியன Oகுறித்து A யினதும் Bயினதும் தானக்காவிகளாகும்.

(ii) $\overline{OA}+K\overline{AP}$ஆனது $\underline{a}$ ஐச் சாராமல் இருக்குமாறு எண்ணி K எடுக்கத்தக்க பெறுமானத்தை காண்க. O குறித்து R இன் தானக்காவி $\underline{r}$ ஐ $\underline{b}$ யின் சார்பில் எடுத்துரைப்பதன் மூலம் OR:OB=4:13 எனக் காட்டுக?

(i) $\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}=\underline{b}-\underline{a},\ \overline{AQ}=\frac{2}{3}\overline{AB}$

$\overline{AQ}=\frac{2}{3}(\underline{b}-\underline{a})$

$\overline{OQ}=\overline{OA}+\overline{AQ}$ $\overline{OP}=\frac{2}{5}\overline{OQ}$

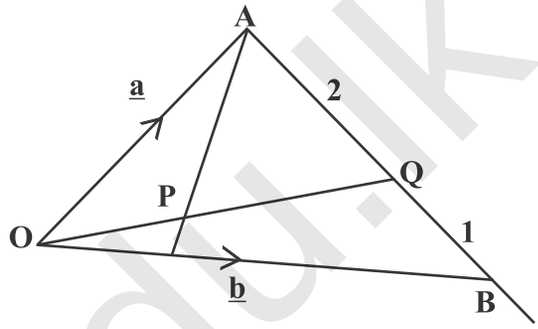
$=\underline{a}+\frac{2}{3}(\underline{b}-\underline{a})$ $=\frac{2}{5}\left(\frac{3}{3}\underline{a}+\frac{2}{3}\underline{b}\right)$

$=\frac{1}{3}\underline{a}+\frac{2}{3}\underline{b}$ $=\frac{2}{15}(\underline{a}+2\underline{b})$

$\overline{AP}=\overline{AO}+\overline{OP}=\overline{OP}-\overline{OA}$

$=\frac{2}{15}(\underline{a}+2\underline{b})-\underline{a}$

$=\frac{-13\underline{a}}{15}+\frac{4\underline{b}}{15}$



(ii) $\overline{OA}+K\overline{AP}=\underline{a}+K\left(\frac{13}{15}\underline{a}+\frac{4}{15}\underline{b}\right)$

$=\left(1-\frac{13}{15}K\right)\underline{a}+\frac{4}{15}K\,\underline{b}$

$\underline{OA}+K\overline{AP}$, $\underline{a}$ ஐச் சாராமல் இருக்கு.

$1-\frac{13}{15}K=0 \Rightarrow K=\frac{15}{13}$

$K=\frac{15}{13}$ ஆக $OR=\frac{4}{15}\cdot\frac{15}{13}\underline{b}=\frac{4}{13}\underline{b}$

$\Rightarrow \frac{OR}{OB}=\frac{4}{13}$

www.lkedu.lk

08. a , b ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரம் அல்லாத இரு பூச்சியமல்லாத காவிகள் ஆகும். λ μ ஆகியன தரப்பட்டுள்ள இரு எண்ணிகளாக இருக்கும் போது $\lambda=\mu=0$ ஆக இருந்தால் மாத்திரம் $\lambda\underline{a}+\mu\underline{b}=0$ எனக் காட்டுக.

(i) ஓர் இணைகரம் OACBயில் பக்கம் BC ஆனது BD=3BC ஆக இருக்குமாறு Dயிற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. $\overline{OA}=\underline{a}$ எனவும் $\overline{OB}=\underline{b}$ எனவும் கொண்டு $\overline{OD}$ யை $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

(ii) OD, AC என்னும் கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி E எனவும் OE = λOD எனவும் AE = μAC எனவும் கொண்டு λ,μ ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க?

(i)

Þ $l=0$ என்க, $l\underline{a}+m\underline{b}=O$ — $l \neq O$ என்க.

$m\underline{b}=0$ — $l\underline{a}+m\underline{b}=0$

Þ $m=O\ (\underline{b}\neq 0)$ — Þ $\underline{a}=-\frac{m}{l}\underline{b}\ (l\neq O)$

\ $l=O$ எனின் $m=O$ ஆகும். — Þ $\underline{a}\,//\,\underline{b}$

$m=O$ எனின் $l=O$ என காட்டலாம். இது தரவிற்கு முரணானது.

இவ்வாறே \ $a=O$ Þ $m=O$

(ii)

$OA=BC \quad OA\,//\,BC$

$\overline{OA}=\overline{BC}=\underline{a}$

$\overline{BD}=3\overline{BC}=3\underline{a}$

$\overline{OD}=\overline{OB}+\overline{BD}$

$=\underline{b}+3\underline{a}$

$\overline{OE}=l\,\overline{OD} \qquad \overline{AE}=m\overline{AC}$

$=l\,(\underline{b}+3\underline{a}) \qquad \overline{AE}=m\underline{b}$

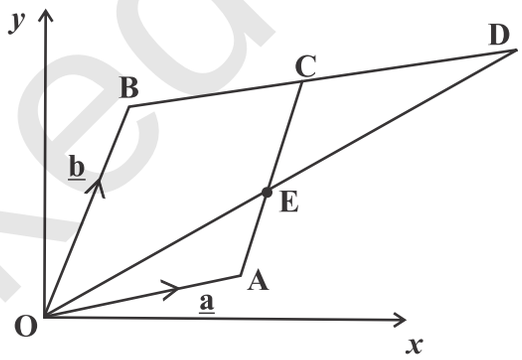
$\overline{OA}+\overline{AE}=\overline{OE}$

$\underline{a}=l\,(\underline{b}+3\underline{a})-m\underline{b}$

$\underline{a}=3l\ \underline{a}+(l-m)\underline{b}$

$3l=1$ Þ $l=\frac{1}{3}$

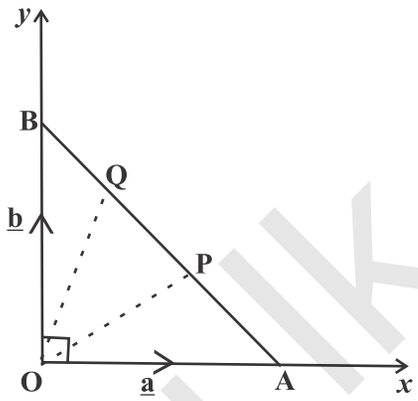
$l=m$ Þ $m=\frac{1}{3}$



www.lkedu.lk

09. செங்கோண முக்கோணி OABல் கோணம் $O = \pi/2$ உம் O என்பது உற்பத்தியும் ஆகும். $\underline{a}$, $\underline{b}$ இன் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகும். PQ என்பது பக்கம் AB இனை முக்கூறிடும் புள்ளிகள் ஆகும். $\overline{OP}, \overline{OQ}$ என்பவற்றை a , b இன் சார்பில் காண்க. இதிலிருந்து $OP^2 + OQ^2 = \frac{5}{9}\left(|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2\right)$ எனக்காட்டி $OP^2 + OQ^2 = \frac{5}{9}(AB)^2$ எனக் காட்டுக.

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \underline{b} - \underline{a}$$



$$\overline{QB} = \overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{1}{3}(\underline{b} - \underline{a})$$

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = \underline{a} + \frac{1}{3}(\underline{b} - \underline{a})$$

$$= \frac{1\underline{b}}{3} + \frac{2}{3}\underline{a}$$

$$\overline{OQ} = \overline{OB} + \overline{BQ} = \underline{b} + \frac{-1}{3}(\underline{b} - \underline{a})$$

$$= \frac{1}{3}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}|\ |\underline{b}| \cos \pi/2 = 0$$

$$OP^2 = \overline{OP}.\overline{OP} = \frac{1}{9}|\underline{b}|^2 + \frac{4}{9}|\underline{a}|^2$$

$$OQ^2 = \overline{OQ}.\overline{OQ} = \frac{1}{9}|\underline{a}|^2 + \frac{4}{9}|\underline{b}|^2$$

$$OP^2 + OQ^2 = \frac{5}{9}\left(|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2\right)$$

$$AB^2 = OB^2 + OA^2$$

$$= |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2$$

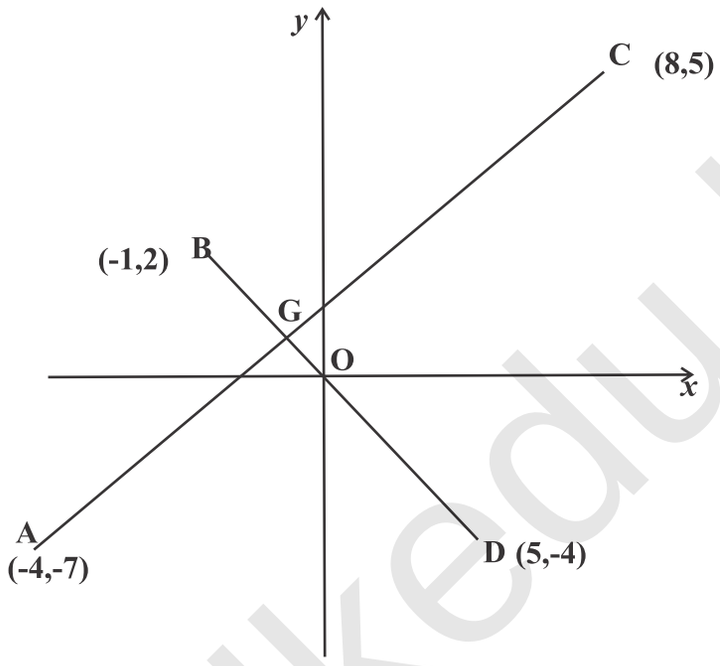
$$\therefore\ OP^2 + OQ^2 = \frac{5}{9}(AB)^2$$

www.lkedu.lk

10. A = (-4,-7), B=(-1,2), C= (8,5), D= (5,-4) என தரப்பட்டுள்ளது. $\underline{i}, \underline{j}$ ஆகியன x,y திசையிலான அலகுக் காவிகள் ஆகும். O உற்பத்தி

(i) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ இனை $\underline{i}, \underline{j}$ இல் காண்க. அத்துடன் AC, BD ஆகிய கோடுகள் இடைவெட்டும் விகிதத் தைக் காண்க?

(ii) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ என்பவற்றிற்கும் $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ என்பவற்றிற்கும் இடையிலான கோணத்தை குற்றுப் பெருக்கத்தின் மூலம் காண்க?



(i) $\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = \overline{OC} - \overline{OA}$

$= 8\underline{i} + 5\underline{j} - (-4\underline{i} - 7\underline{j})$

$12\underline{i} + 12\underline{j}$

$\overline{BD} = \overline{OD} - \overline{OB}$

$= 5\underline{i} - 4\underline{j} - (-\underline{i} + 2\underline{j})$

$= 6\underline{i} - 6\underline{j}$

$\overline{AG} = l\,\overline{AC}$

$= 12l\,(\underline{i} + \underline{j})$

$\overline{AB} = \overline{AG} + \overline{GB}$

$\overline{OB} - \overline{OA} = \overline{AG} - \overline{BG}$

$(-\underline{i} + 2\underline{j}) - (-4\underline{i} - 7\underline{j}) = 12l\,(\underline{i} + \underline{j}) - 6m(\underline{i} - \underline{j})$

$3\underline{i} + 9\underline{j} = (12l - 6m)\underline{i} + (12l + 6m)\underline{j}$

$12l - 6m = 3$

$12l + 6m = 9$

$\therefore l = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}$

$\therefore AG : GC = 1:1$

$BG : GD = 1:1$

www.lkedu.lk

(ii) $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = |\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}| \cos\theta$

$(12\underline{i} + 12\underline{j})\ (6\underline{i} - 6\underline{j}) = \sqrt{12^2 + 12^2} \cdot \sqrt{6^2 + 6^2} \cos\theta$

$\therefore \quad \cos\theta = 0$

$\theta = \pi/2$

$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA}$

$= 9\underline{i} + 3\underline{j}$

$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| \cos\alpha$

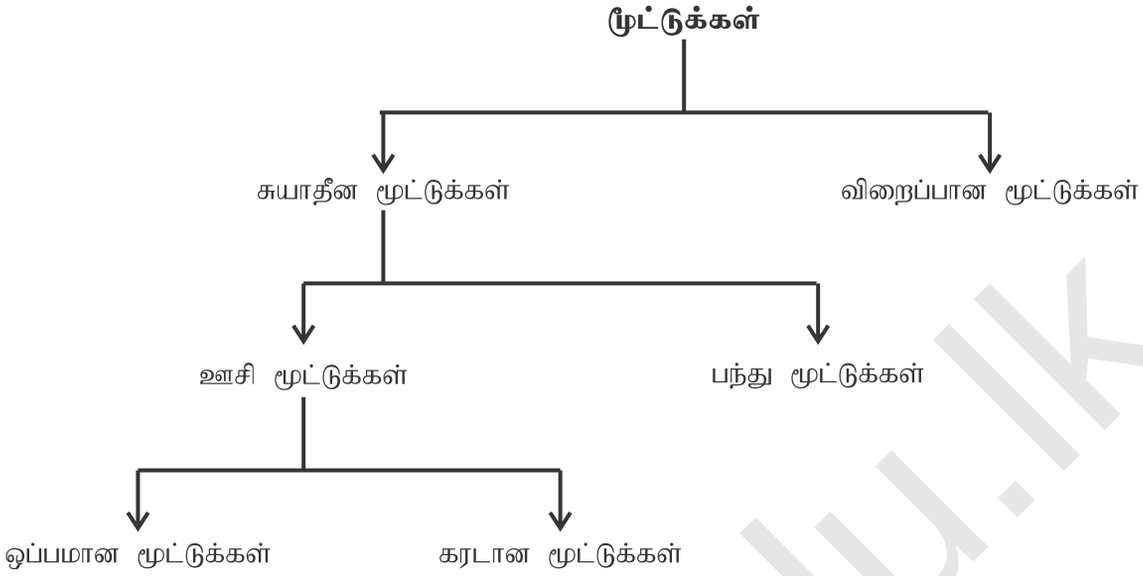
$(3\underline{i} + 9\underline{j}) \cdot (9\underline{i} + 3\underline{j}) = \sqrt{3^2 + 9^2}\ \sqrt{3^2 + 9^2} \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{54}{90} = \frac{3}{5}$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

www.lkedu.lk

மூட்டிய கோல்கள்



சுயாதீன மூட்டு:–

இரண்டு கோல்கள், ஒவ்வொன்றினதும் அமைவு மற்றையது தொடர்பாக மாறக் கூடியவாறு மூட்டப்பட்டிருப்பின், அம்மூட்டு அசையும் (சுயாதீன) மூட்டு எனப்படும்.

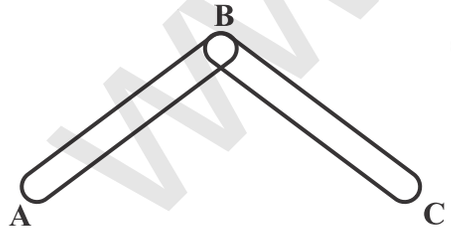
விறைப்பான மூட்டு:–

இரண்டு கோல்கள் ஒவ்வொன்றினதும் அமைவு மற்றையது தொடர்பாக மாற்ற முடியாதவாறு மூட்டப் பட்டிருப்பின் அம்மூட்டு விறைப்பான மூட்டு எனப்படும்.

குறிப்பு:-

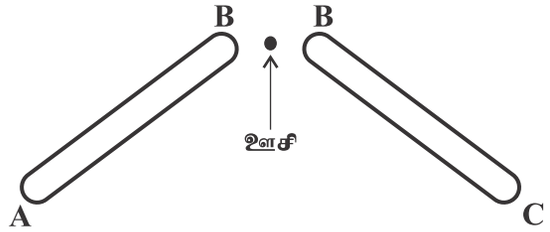
ஊசி மூட்டுக்கள் தொடர்பான பிரசினங்கள் மட்டுமே. க.பொ.உயர்தர இணைந்த கணித பாடத்தில் உள்ளடக்கப்பட்டுள்ளது.

ஊசி மூட்டுக்கள்:–



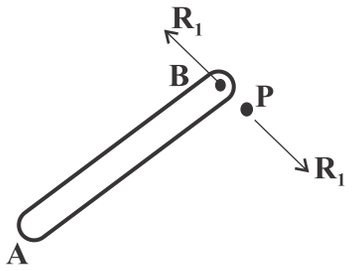
கோல் AB, BC என்பன சுயதீனமாக B இல் மூட்டப்பட்டுள்ளன.

இரண்டு கோல்களையும் தனித்தனியாக்கும் போது:–



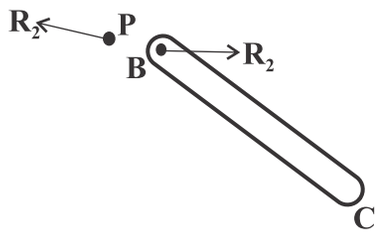
www.lkedu.lk

கோல் ABயையும் ஊசியையும் கருதும் போது:–



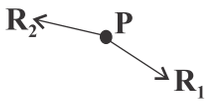
B இல் ஒரு விசை R_1 ஆனது ஊசியினால் தொழிற்படுகிறது என்க. நியூட்டனின் மூன்றாம் விதிப்படி R_1 இற்கு சமனும் எதிருமான ஒரு விசை கோல் AB இனால் ஊசி P இல் தொழிற்படும்.

கோல் BCயையும் ஊசியையும் கருதும் போது:–



B இல் ஒரு விசை R_2 ஆனது ஊசியினால் தொழிற்படுகிறது என்க. நியூட்டனின் மூன்றாம் விதிப்படி R_2 இற்கு சமனும் எதிருமான ஒரு விசை. கோல் BC இனால் ஊசி P இல் தொழிற் படுகிறது என்க.

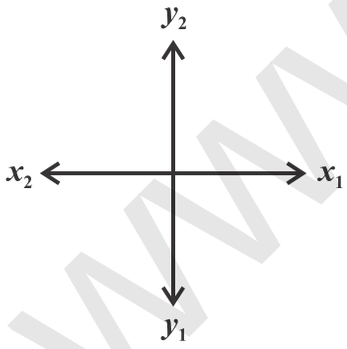
ஊசியின் சமநிலையை கருதும் போது:–



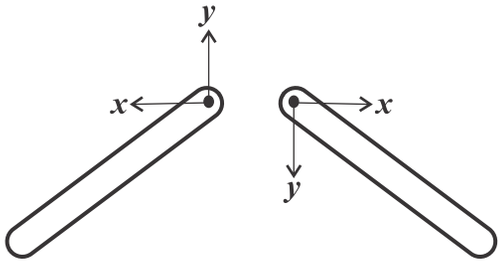
ஊசி சமநிலையில் இருப்பதால் இரு விசைகள் R_1 , R_2 சமனும் எதிருமாக காணப்படும்.

R_1 , R_2 இன் கிடை, நிலக்குத்து பிரிப்புகள் x_1 , y_1 உம் x_2 , y_2 என்க.

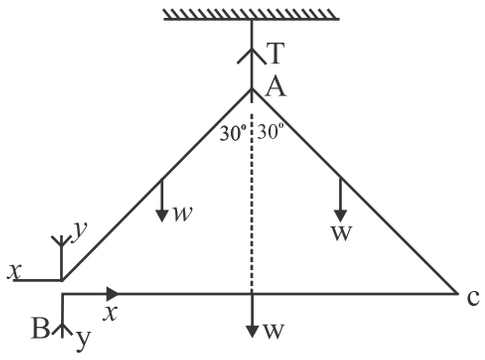
ஊசியின் சமநிலையில்:–



வேறு எந்த விசைகளும் மூட்டில் தொழிற்படாத போது மூட்டில் தொழிற்படும் விசைகளை கீழ்வரும் படம் மூலம் காட்டலாம்.



01. ஒவ்வொன்றும் w நிறையும் 2a நீளமும் கொண்ட மூன்று சீரான கோல்கள். அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு, ABC என்னும் சட்டப்படல் மூட்டு A இல் சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. B இல் AB மீதுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.



கோல் BC இன் சமநிலைக்கு

C) $y.2a - w.a = 0$

$y = w/2$

கோல் AB இன் சமநிலைக்கு

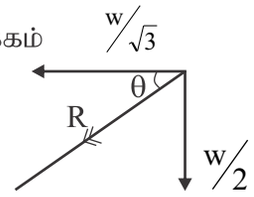
A) $x.(2a\cos 30^\circ) - y.(2a \sin 30^\circ) - w.a \sin 30^\circ = 0$

$x.2.\sqrt{3/2} - y.2.1/2 - w.1/2 = 0$

$\sqrt{3}x - w/2 - w/2 = 0$

$x = w/\sqrt{3}$

B இலுள்ள மறுதாக்கம்



$R = \sqrt{\left(w/\sqrt{3}\right)^2 + \left(w/2\right)^2}$

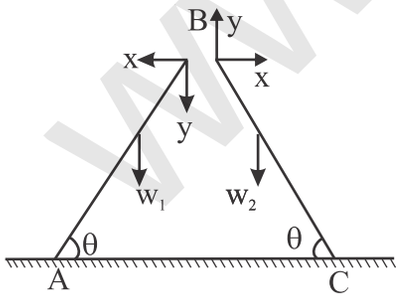
$= \sqrt{w^2/3 + w^2/4}$

$= \sqrt{7/12}\,w$

மறுதாக்கத்தின் திசை $\tan\theta = \dfrac{w/2}{w/\sqrt{3}}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{3/2}\right)$

02. $w_1 w_2$ எனும் நிறைகளை உடைய AB,BC எனும் இருசம நீளமுள்ள சீரான கோல்கள் B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு கிடைத்தவரையில் உள்ள இரு புள்ளிகள் A,C இல் இணைக்கப்பட்டு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளன. கோல்கள் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் θ ஆகும். மூட்டு B இலுள்ள மறு தாக்கம் யாது?



AB/ a) $y.2a\cos\theta + w_1.a\cos\theta - x.2a\sin\theta = 0$

$2y + w_1 - 2x\tan\theta = 0 \rightarrow (1)$

BC/ C) $X.2a\sin\theta + y.2a\cos\theta - w_2 a\cos\theta = 0$

$2x\tan\theta + 2y - w_2 = 0 \rightarrow (2)$

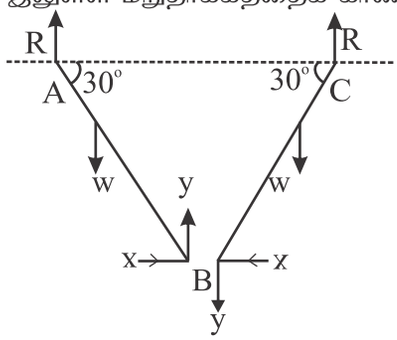
(1), (2) ⇒ $y = \dfrac{w_2 - w_1}{4}$

(1), (2) ⇒ $4 \times \tan\theta\, w_1 - w_2 = 0$

$x = \left(\dfrac{w_1 + w_2}{4}\right)\cot\theta$

Note:- மேலுள்ள வினாவில் $w_1 = w_2$ எனின் $y=0$

03. AB, BC என்பன ஒவ்வொன்றும் 2a நீளமும், w நிறையும் கொண்ட இரண்டு சீரான கோல்களாகும். அவை B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளதோடு ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள A, C என்னும் இரண்டு புள்ளிகளில் தொங்கவிடப்பட்டு தொகுதி நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அமையுமாறு சம நிலையில் காணப்படுகிறது. கோல்கள் கிடையுடன் 30^o கோணத்தை அமைக்குமாறு உள்ளதெனின் மூட்டு B இலுள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.



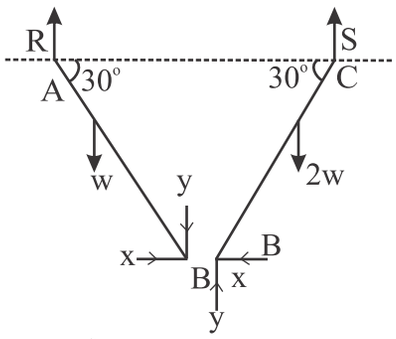
AB / A ↺ $w.a\cos 30^o + x.2a\sin 30 = 0$

$= \frac{w}{2}\cot 30^o$

$x = \sqrt{\frac{3w}{2}}$

சமச்சீரமைப்பு மூட்டு B இல் $y=O$

04. மேலே உள்ள வினாவில் கோல் AB இன் நிறை w உம்,BC இன் நிறை 2w உம் எனின் மூட்டு B இல் AB இன் மீதான மறுதாக்கத்தைக் காண்க.



AB / A ↺ $x \cdot 2a\sin 30^o - w.a\cos 30^o - y \cdot 2a\cos 30^o = 0$

$x.2a.\frac{1}{2} - wa\sqrt{\frac{3}{2}} - y.2a.\sqrt{\frac{3}{2}} = 0$

$x - \sqrt{3y} = \sqrt{3}\,\frac{w}{2}$ ® (1)

CB / C ↺ $2wa\cos 30^o - x.2a\sin 30^o - y \cdot 2a\cos 30^o = 0$

$2w.\sqrt{\frac{3}{2}} - x.2.\frac{1}{2} - y.2.\sqrt{\frac{3}{2}} = 0$

$\sqrt{3w} - x - \sqrt{3y} = 0$

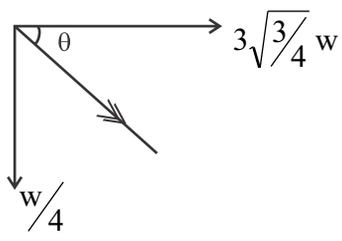
$x + \sqrt{3}\,y = \sqrt{3w}$ ® (2)

(1) + (2) Þ $2x = \frac{3\sqrt{3w}}{2}$

$x = \frac{3\sqrt{3w}}{4}$

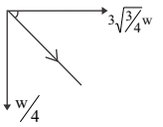
(2) - (1) Þ $2\sqrt{3y} = \sqrt{\frac{3}{2}}w$

$y = \frac{w}{4}$



www.lkedu.lk

மூட்டு B யிலுள்ள மறு தாக்கம் R



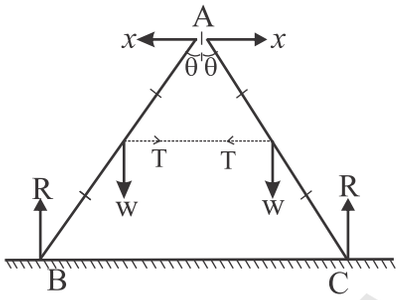
$$R = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3w}}{4}\right)^2 + \left(w/4\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{27w^2}{16} + \frac{w^2}{16}} = \sqrt{7/2}\,w$$

$$\tan q = \frac{w/4}{3/4\sqrt{3w}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

05. ஒவ்வொன்றும் சமநீளமும் w நிறையும் கொண்ட சீரான AB, AC என்னும் சீரான இரண்டு கோல்கள் A யில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு, B,Cஎன்பன ஒப்பமான கிடைத்தளத்திலும் ABC நிலைக்குத்துத் தளத்திலும் இருக்குமாறு வைக்கப் பட்டு, AB,AC இன் நடுப்புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்ட நீளா இழையொன்றினால் சமநிலையில் பேணப்பட்டுள்ளது. BAC = 2θ எனின் இழையின் இழுவை, A இல் கோல் AB இன் மீது தாக்கும் மறு தாக்கத்தின் பருமன், திசை என்பவற்றைக் காண்க.



தொகுதியின் சமநிலைக்கு

$-2R = 2w$

$R = w$ ® (1)

AB/ ® $T = x$ ® (2)

A ல் $T.a\cos\theta - w.aSin\theta + R.(2aSin\theta) = \theta$

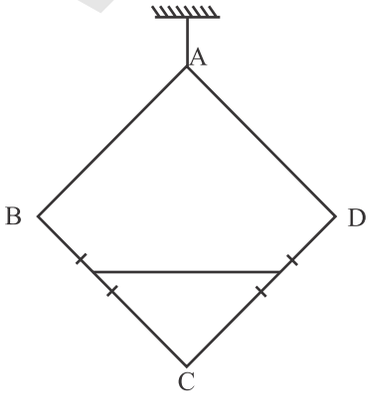
$2R\tan\theta = T + w\tan\theta \rightarrow (3)$

(1), (3) $\Rightarrow T = w\tan\theta$

(2) $\Rightarrow x = w\tan\theta$

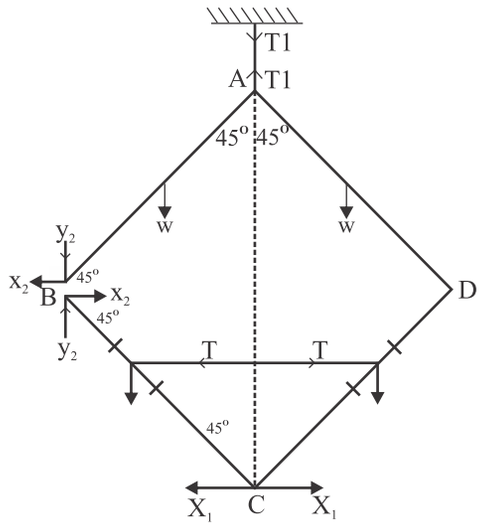
A இல் AB இன் மீது மறுதாக்கம் ← $w\tan\theta$

06. AB, BC, CD, DA எனும் சமநீளமுள்ள சீரான கோல்கள் முனைகளிலே ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு A யிலிருந்து கட்டித் தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. BC, CD இன் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் ஓர் இலேசான கோலினால் கீழே தரப்பட்டுள்ள உடு சதுர வடிவிலே பேணப்படுகிறது.



கோல்களினது நிறைகள் w ஆயின் அவ் இலேசான கோலிலுள்ள உதைப்பையும் B,C,D யிலுள்ள தாக்கங்களையும் காண்க.

www.lkedu.lk



BC/ B) $x_1 . 2a\cos 45^o + T.a\cos 45^o + w.a\cos 45^o = 0$

$2x_1 + T + w = 0 \rightarrow (1)$

AB, BC/ இன் சமநிலைக்கு

A) $x_1 . 4a\cos 45^o - 2wa\cos 45^o + T.3a\cos 45^o = 0$

$4x_1 - 2w + 3T \rightarrow (2)$

(1), (2) Þ $T = 4w$

$x_1 = \frac{-5w}{2}$

சமச்சீரின்படி C யில் Yகூறு பூச்சியமாகும்.

BC/ $- y_2 - w = 0$

$y_2 = w$

® $x_2 - T - x_1 = 0$

$x_2 = T + x_1$

$= 4w - {}^{5w}/_{2}$

$= {}^{3w}/_{2}$

C இலுள்ள மறுதாக்கம்

$= {}^{5w}/_{2}$

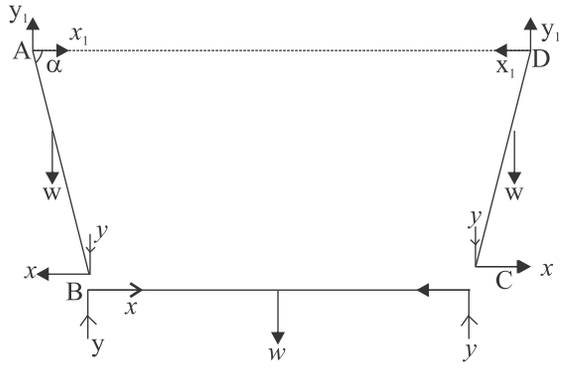
B,D இலுள்ள மறுதாக்கம்

$= \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

$= \sqrt{\left({}^{3w}/_{2}\right)^2 + w^2}$

$= \frac{\sqrt{13}w}{2}$

07 AB,BC, CD என்பன B யிலும் C யிலும் ஒப்பமாக பிணைக்கப்பட்டுள்ள சம நிறையும் நீளத்தையும் கொண்ட மூன்று சீர்க் கோல்களாகும். ஒரே மட்டத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் இரு ஒப்பமான கிடை ஊசிகளில் A,Dஆகிய முனைகள் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. இத் தொகுதி நாப்பத்திலே (சம நிலையிலே) தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. AB, CD ஆகியன கிடையுடன் ஒரே கோணம் x உடன் சாய்ந்தும் β என்பது A யில் AB மீதுள்ள தாக்கத்தின் கிடையுடனான சாய்வாகவும் இருப்பின், $\tan\alpha = {}^{2}/_{3}\tan\beta$ எனக் காட்டுக்க.



CD/ $- y_1 = y + w$ ® (1)

AB/ $w.a\cos\alpha + x.2a\sin\alpha + y.2a\cos\alpha = 0$ ® (2)

BC/ $- 2y = w$

$y = {}^{w}/_{2}$ ® (3)

www.lkedu.lk

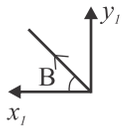
(3), (1) $\Rightarrow y_1 = 3w/2$

(2) $\Rightarrow w\cos\alpha + x.2\sin\alpha + w/2.2\cos\alpha\ 0$

$x = -w\cot\alpha$

$AB/ \Rightarrow x_1 = x$

$x_1 = w\cot\alpha$

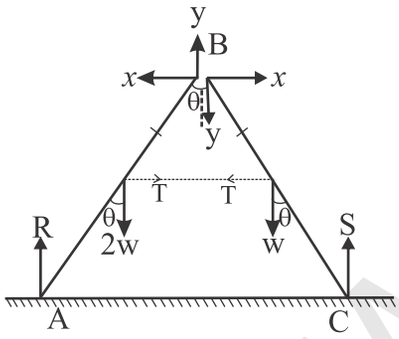


$\tan\beta = \frac{y_1}{x_1}$

$= \frac{3w/2}{w\cot\alpha} = 3/2\tan\alpha$

$\tan\beta = 2/3\tan\alpha$

08. AB,BC, ஆகியன நீளத்தில் சமமான இரு சீரான கோல்களாகும். AB இன் நிறை 2w உம் BC யின் நிறை w உம் ஆகும். கோல்கள் B யில் ஒப்பமாக பிணைக்கப்பட்டிருக்கும். அதே வேளை கோல் களின் நடுப்புள்ளிகள் ஓர் இலேசான மீள் தன்மையின்றிய இழையினால் தொகுக்கப்பட்டுள்ளன. A,C ஆகியன ஓர் ஒப்பமான கிடைமேசை மீது இருக்குமாறு தொகுதி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் உள்ளது. $A\hat{B}C = 2\theta$ எனின் இழையின் இழுவை $\frac{3}{2}w\tan\theta$ எனக் காட்டுக. B யிலுள்ள மறு தாக்கத்தின் பருமனையும் அது கிடையுடன் ஆக்கும் கோணத்தையும் காண்க.



AB = BC = 2 a.

தொகுதி C) w.a Sinθ + 2w (3aSinθ)-R(4aSinθ) = 0

$R = 7/4\,w$

$AB/$ B) 2waSinθ – R.2aSinθ+ T.acosθ = 0

$T = 3/2\,w\tan\theta$

® $x = T$

$x = 3/2\,w\tan\theta$

$-y + R = 2w$

$Y = w/4$

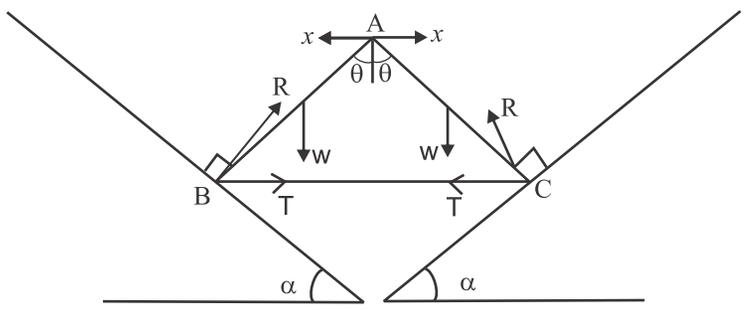
$\tan\alpha = y/x$

$= \frac{w/4}{3/2\,w\tan\theta} = 1/6\cot\theta$

$\alpha = \tan^{-1}\left(1/6\cot\theta\right)$

www.ikeli.lk

09. ஒவ்வொன்றினதும் நிறை w ஆகவுள்ள AB, AC என்னும் இரு சீரான சம கோல்களை A யில் சுயா தீனமாக மூட்டப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை B,C ஆகிய முனைகள் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்துள்ள இரு ஒப்பமான தளங்களின்மீது B,C ஆகிய முனைகள் இருக்குமாறு கோல்கள் ஒரு நிலைக்குத்து தளத் திலே நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. BC கிடையாக இருக்கும் அதேவேளை BC இற்கு மேலே A உள்ளது. B இல் உள்ள மறு தாக்கத்தைக் காண்க. $\tan\theta > 2\tan\alpha$ எனின் இழையின் இழுவை $\frac{1}{2}$ w $(\tan\theta > 2\tan\alpha)$ எனக் காட்டுக. இங்கு $BAC = 2\theta$. மூட்டு A யில் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.



கோல்களின் நீளம் 2a என்க
சமச்சீரின்படி மூட்டு
A இல் $y = 0$

தொகுதிக்கு

$-\ 2R\cos\alpha = 2w$

$R = w\sec\alpha$

AB/ A) $T.(2a\cos\theta) + R\sin\alpha.2a\cos\theta - R\cos\alpha(2a\sin\theta) + wa\sin\theta = 0$

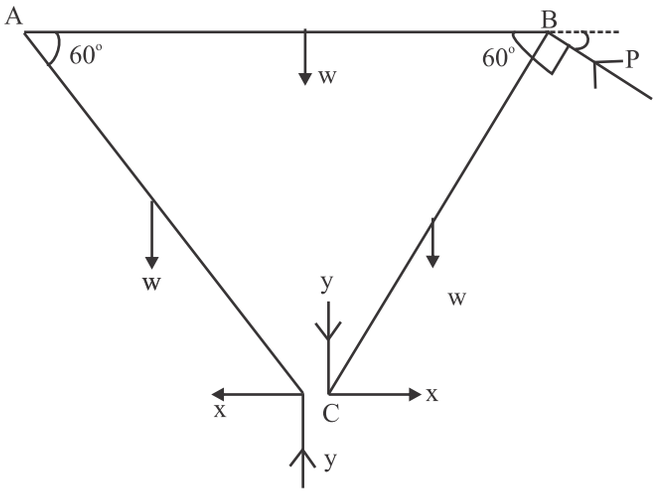
$2T + 2w\tan\alpha - 2w\tan\theta = 0$

$T = \frac{w}{2}(\tan\theta - 2\tan\alpha)$

AB/ B) $w.a\sin\theta - x.2a\cos\theta = 0$

$x = \frac{w}{2}\tan\theta$

10. ஒவ்வொன்றும் 2a நீளமுள்ளதும் நிறை w ஆகவுள்ள AB,BC,CA என்னும் மூன்று சீரான கோல் கள் ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC ஐ ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூடப்பட் டுள்ளன. முக்கோண ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுயாதீனமாகச் சுழலத்தக்கதாக உச்சி A ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. முக்கோணியின் தளத்தில; B யில் BC யிற்கு செங்குத்தாக முக்கோணிக்குப் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு விசை P யினால் முக்கோணி AB கிடையாகவும் C யானது ABயிற்கு கீழேயும் இருக்குமாறு தாங்கப்படுகிறது. P யின் பெறுமானத்தைக் காண்க. அத்துடன் C யில் ACயினால் BC மீது உஞற்றப்படும் விசையின் கிடைக்கூறையும் நிலைக் குத்து கூறையும் காண்க.



தொகுதி

$A\circlearrowright \quad (P\,Sin30^{O})(2a) = w.a + w(a\cos 60^{O}) + w3a\cos 60^{O}$

$P = 3w$

AC $\quad A\circlearrowright \quad x.2aSin60^{O} - y.(2a\cos 60^{O}) + w(a\cos 60^{O}) = 0$

$2x\tan 60^{O} - 2y + w = 0 \;\text{®}\; (1)$

BC $\quad B\circlearrowright \quad wa\cos 60^{O} + x\,2a\,Sin60^{O} + y2a\cos 60^{O} = 0$

$w + 2x\tan 60^{O} + 2y = 0 \;\text{®}\; (2)$

$(2) - (1) \Rightarrow \; y = 0$

$$x = -\frac{w}{2\sqrt{3}}$$

www.lkedu.lk

சட்டப்படல்

மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இலேசான கோல்கள் யாவும் ஒரே தளத்தில் அமையுமாறு ஒவ்வொரு கோலின் இரண்டு அந்தங்களும் ஏனைய கோல்களின் அந்தங்களுடன் சுயாதீனமாக மூட்டுவதன் மூலம் ஆக்கப்படும் உருவே **"சட்டப்படல்"** எனப்படும்.

- புறவிசைகள் தவிர்ந்த, மூட்டுக்களில் தாக்கும் மறுதாக்கங்கள் கோல்களின் வழியே தாக்குகின்றன. அவை இழுவையாகவோ அல்லது உதைப்பாகவோ உள்ள தகைப்புகள் எனப்படும்.

- எல்லா கோல்களும் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளதால் எல்லா விசைகளும் புறவிசைகள் உட்பட ஒரு தளத்திலானவை.

- முழுச் சட்டப்படலும் சமநிலையில் காணப்படும் போது அதில் காணப்படும் புறவிசைகளின் தொகுதியும் சமநிலையில் காணப்படும்.

சட்டப்படலொன்றிலுள்ள ஒவ்வொரு கோலிலுமுள்ள தகைப்புகளை தகைப்பு வரிப்படம் மூலம் காணலாம். இம்முறையானது **"Bow"** என்ற கணிதவியலாளரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டதால் இம்முறை **'போ"**வின் குறிப்பீடு எனப்படுகிறது.

படிமுறைகள்:–

- சட்டப்படலின் மீது தாக்கும் புறவிசைகளை சட்டப்படலுக்கு வெளியே குறிக்க வேண்டும்.

- வரிப்படத்தில் விசைகளை வேறாக்கப்படும் பிரதேசங்களை பெயரிடுக.

- ஒவ்வொரு மூட்டிலும் தாக்கும் புறவிசைக்கான மூடிய விசை முக்கோணிகளை அல்லது பல்கோணிகளை ஒரே வரிப்படததில் வரைக விரும்பிய சுழற்சி போக்கினை பயன்படுத்தப் படுத்துதல்.

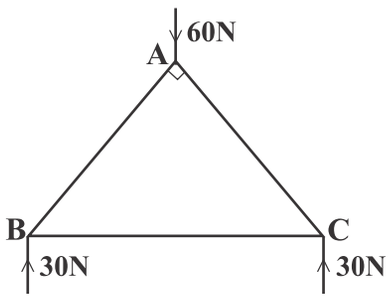
- தெரியாத தகைப்பின் பருமனை விசைப் பல்கோணியின் ஒத்த பக்கத்தின் நீளத்தைக் கொண்டும் விசைப் பல்கோணியின் அம்புக்குறியின் திசையினால் கோல்களின் தகைப்புகள் இழுவையா அல்லது உதைப்பா என இனங்காணுதல்.

- திரிகோணகணித அல்லது அட்சரசகணித சமன்பாடுகளை பயன்படுத்தி முக்கோணி, பல்கோணியின் தகைப்புகளைக் காணலாம்.

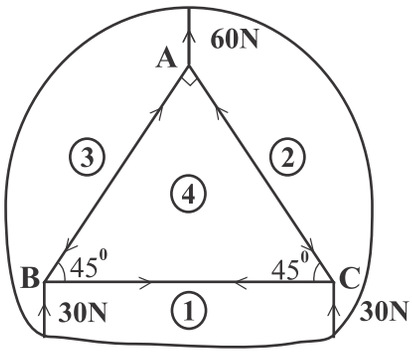
- தெரியாத புறவிசைகளையும் தகைப்பு வரிப்படத்த பயன்படுத்தி காணமுடியும்.

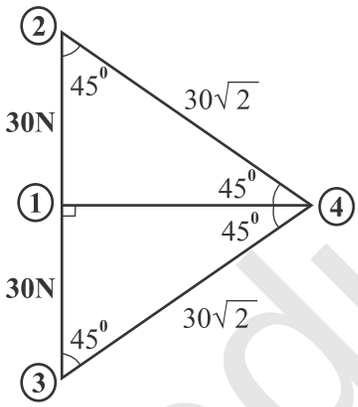
www.lkedu.lk

01.



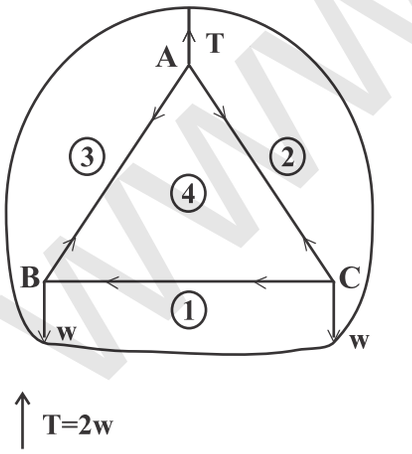
ABC ஓர் இரு சமபக்க இலேசான கோல்களாலான சட்டப் படல் ஆகும். AB = AC. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து கோல்களிலுள்ள தகைப்பு களை இனங்கண்டு அவற்றினைத் துணிக.

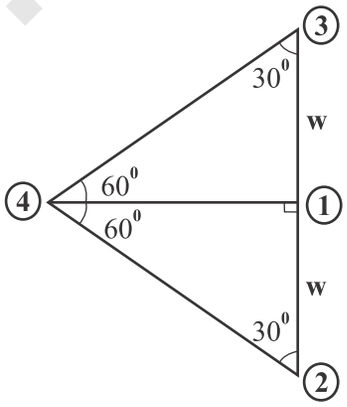




கோல்	உதைப்பு	இழுவை
AB	$30\sqrt{2}$	-
BC	-	30N
AC	$30\sqrt{2}$	-

02. ABC சமபக்க இலேசான கோல்களாலான சட்டப்படல் ஆகும். இது A இல் இருந்து தொங்க விடப்பட்டு B கிடையாக இருக்க B, C இல் w நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கோல்களிலுள்ள தகைப்புகளை இனங்கண்டு அவற்றின் பெறுமானத்தையும் துணிக.

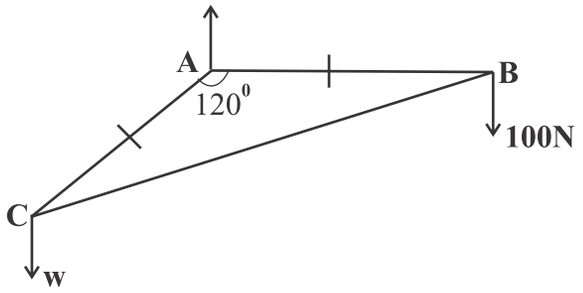




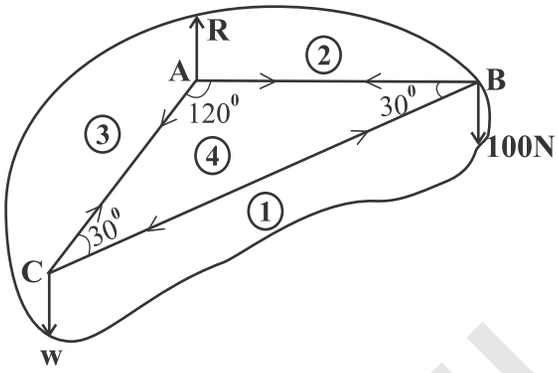
கோல்	உதைப்பு	இழுவை
AB	-	$2w/\sqrt{3}$
BC	$w/\sqrt{3}$	-
AC	-	$2w/\sqrt{3}$

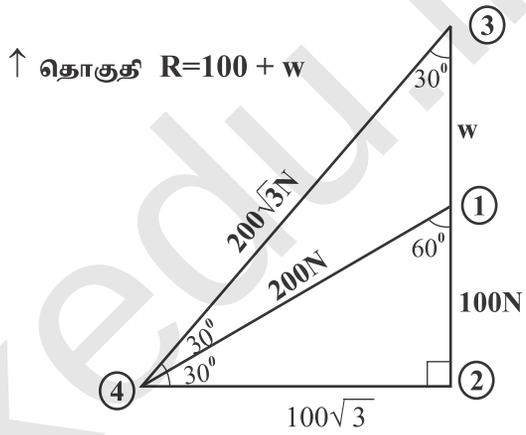
www.ikedu.lk

03. அருகில் தரப்பட்ட உருவில் ABC என்பது AB, BC, CA என்பன ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட மூன்று இலேசான கோல்களைக் கொண்ட ஒரு சட்டப்படல் ஆகும். இங்கு AB = AC, $B\hat{A}C = 120^0$. இச் சட்டப்படலானது AB கிடையாக இருக்க ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளது. அது ஓர் ஒப்பமான முனையினால் Aயில் தாங்கப்பட்டு, Bயில் 100 நியூட்டன், Cயில் w நியூட்டன் என்னும் சுமைகளைக் காவுகின்றது.



போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, அதிலிருந்து இழுவை களையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக்காட்டி, கோல்களிலுள்ள தகைப்புகளையும் w இன் பெறுமானத்தையும் கணிக்க.

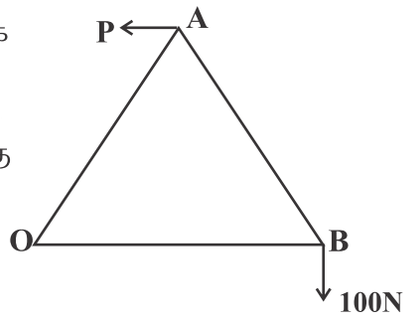




கோல்	இழுவை	உதைப்பு
AB	$100\sqrt{3}$N	-
BC	-	200N
AC	$200\sqrt{3}$N	-

w = ① ③
= 200N

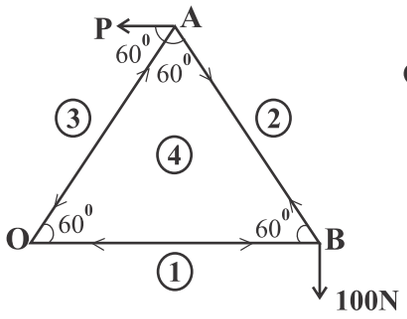
04. சமநீளமுள்ள மூன்று ஒப்பமாக மூட்டிய இலேசான கோல்களைக் கொண்ட சட்டப்படல் அருகில் தரப்பட்டுள்ளது. இச்சட்டப்படல் ஒரு நிலைத்த புள்ளி O இல் ஒப்பமாக பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. Bயில் 100N நிறையைக் காவுகின்றது. OB கிடையாக இருக்குமாறு Aயில் P நியூட்டன் கிடைவிசை பிரயோகிக்கப்படுகிறது. சட்டப்படலானது நிலைக்குத்துத் தளத்தில் காணப்படுகிறது.



1) P யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

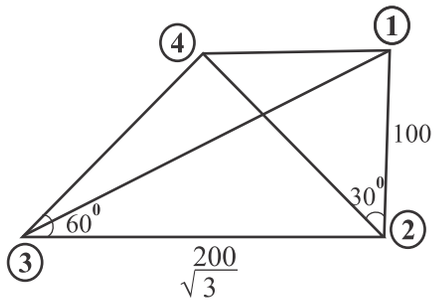
2) போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து Oவிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் கோல்களிலுள்ள இழுவை உதைப்புக்களை இனங்கண்டு அவற்றின் பருமன்களையும் துணிக.

www.lkedu.lk



O ↺ $100.a = P.a \sin 60^0$

$P = \frac{200}{\sqrt{3}} N$



கோல்	உதைப்பு	இழுவை
AB	-	$\frac{200}{\sqrt{3}} N$
OB	$\frac{100}{\sqrt{3}} N$	-
OA	$\frac{200}{\sqrt{3}} N$	-

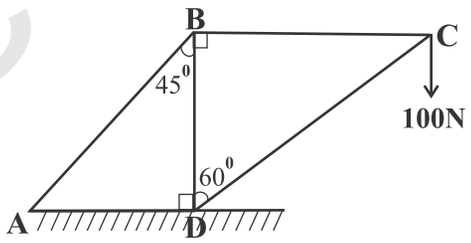
O இலுள்ள மறுதாக்கம் = ① ③

$= \sqrt{100^2 + \frac{200^2}{3}}$

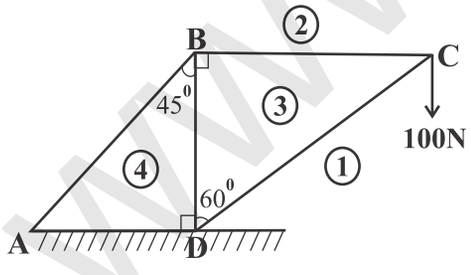
$= \sqrt{100^2 \left(1 + \frac{4}{3}\right)}$

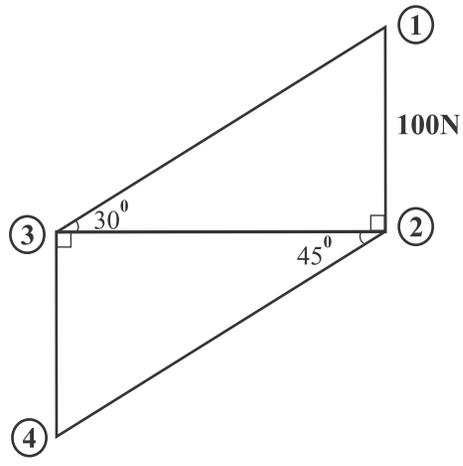
$= 100\sqrt{\frac{7}{3}} N$

05. சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட AB, BC, CD, BD என்னும் நான்கு இலேசான கோல்களாலான ஒரு கிரேன் காணப் படுகிறது. கோல் BD நிலைக்குத்தாக இருக்கும் அதே வேளை கோல் BC கிடைனானது. கிரேனானது Aயிலும் Dயிலும் கிடை நிலத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை Cயில் ஒரு 100N சுமை தொங்குகிறது.



போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படம் வரைந்து கோல்களிலுள்ள தகைப்புகளை இனங்கண்டு அவற்றின் பருமன்களைத் துணிக.

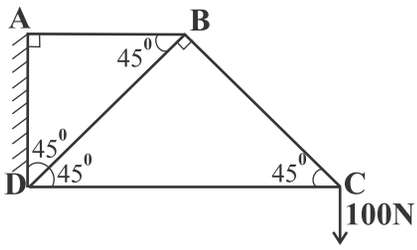


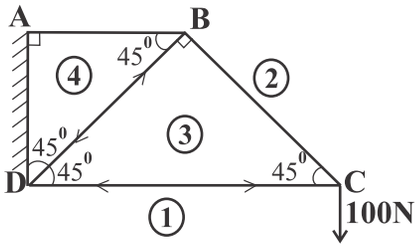


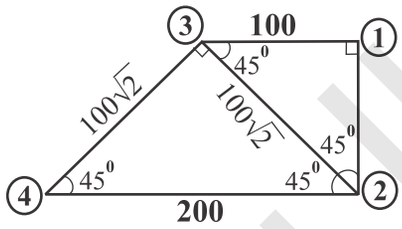
கோல்	இழுவை	உதைப்பு
AB	$100\sqrt{6}$ N	-
BC	$100\sqrt{3}$ N	
CD	-	200N
BD	-	$100\sqrt{3}$ N

www.ikedu.lk

06. நான்கு இலேசான கோல்கள் AB, BC, CD, BD என்பன B, C, D என்பவற்றில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு பெறப்பட்ட சட்டப்படல் Aயிலும் Dயிலும் நிலைக்குத்து சுவர் ஒன்றிற்கு பிணைக் கப்பட்டுள்ளது. Cயில் 100N நிறை தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படம் வரைக. கோல்களில் தகைப்பு களைக் கண்டு அவை இழுவையா, உதைப்பா என வேறுபடுத்துக.

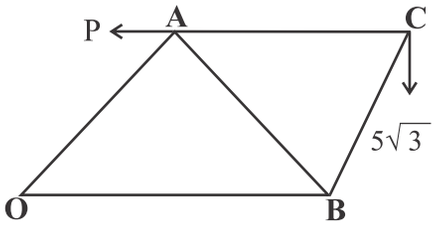






கோல்	இழுவை	உதைப்பு
AB	200N	-
BC	$100\sqrt{2}$ N	-
DC	-	100N
BD	-	$100\sqrt{2}$ N

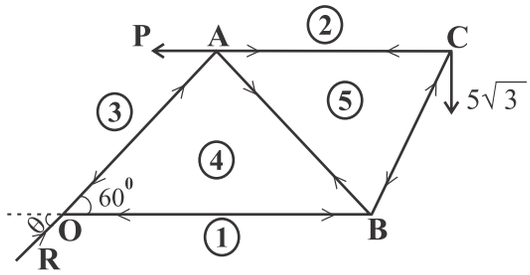
07. OA, OB, AC, AB, BC என்னும் ஐந்து இலேசான சமகோல்கள் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சட்டப்படலை ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படல O இல் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை Cயில் $5\sqrt{3}$ நியூட்டன் நிறையைக் காவுகின்றது. OB கிடையாக இருக்குமாறு Aயில் P நியூட்டன் எனும் கிடை விசையினால் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்து தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது.



1) P யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2) O இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

3) போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி, சட்டப்படலிற்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து இழுவைகளையும் உதைப்புக்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி எல்லா கோல்களிலுமுள்ள தகைப்புகளைக் காண்க.



கோல் ஒன்றின் நீளம் 2a என்க.

O பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

$P \cdot (2a \sin 60^0) = 5\sqrt{3}\,(2a + 2a \cos 60^0)$

$\sqrt{3}\ P = 5\sqrt{3} \cdot 3$

$P = 15N$

www.lkedu.lk

மூட்டு O இல் உள்ள மறுதாக்கம் R என்க. R கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் θ என்க. விசைகளைக் கூறாக்குக. (சமநிலைக்கு)

$\rightarrow \quad R\cos\theta = P = 15 \quad \rightarrow (1)$

$\uparrow \quad R\sin\theta = 5\sqrt{3} = \quad \rightarrow (2)$

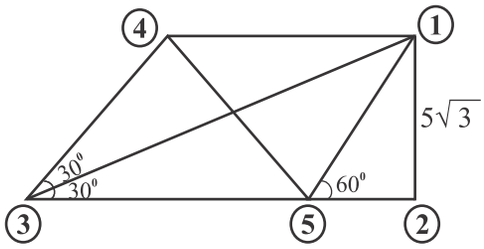
$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow R^2(\cos^2\theta + \sin\theta) = 15^2 + 5\sqrt{3})^2$

$R^2 = 300$

$R = 10\sqrt{3}\,N$

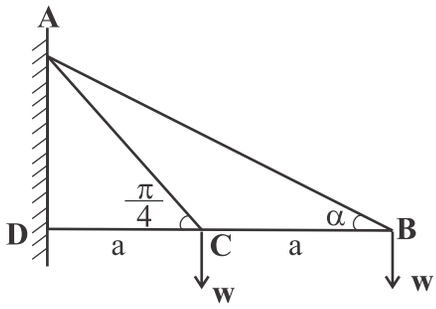
$(1), (2) \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

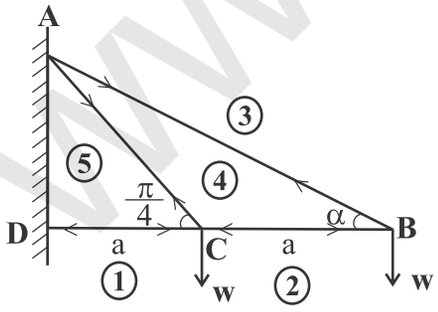
$\theta = 30^0$

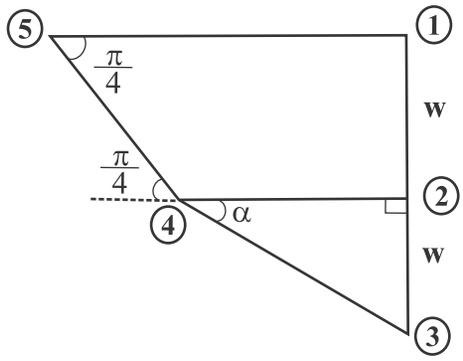


கோல்	இழுவை	உதைப்பு
OA	-	10N
OB	-	10N
BC	-	10N
AC	5N	-
AB	10N	-

08. அருகே காட்டப்பட்ட உரு நான்கு இலேசான கோல் களைக் கொண்டது. இது ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரி லுள்ள A, D என்னும் புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட் டுள்ளது. BD = 2AD ஆகவும் BD இன் நடுப்புள்ளி C ஆகவும் அமையுமாறு உள்ளது. B, C இல் இரண்டு நிறைகள் w தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. போவின் குறிப் பீட்டுக்கமைய தகைப்பு வரிப்படம் வரைவதன் மூலம் கோல்களிலுள்ள தகைப்புகளை வேறுபடுத்தி அவற்றின் பருமன்களை கணிக்க.







கோல்	இழுவை	உதைப்பு
AB	$\sqrt{5}$ w	-
BC	-	2w
CA	$\sqrt{2}$ w	-
CD	-	3w

www.kedu.lk

$\tan\alpha = \frac{1}{2}$

$\tan\alpha = \frac{(2)(3)}{(2)(4)} = \frac{1}{2}$

$\frac{w}{(2)(4)} = \frac{1}{2}$

$(2)(4) = 2w$

$(3)(4) = \sqrt{5}\,w$

$(5)(4)\,\text{Sin}\frac{\pi}{4} = w$

$(5)(4) = \sqrt{2}\,w$

$(1)(5) = 2w + (5)(4)\,\text{Cos}\frac{\pi}{4}$

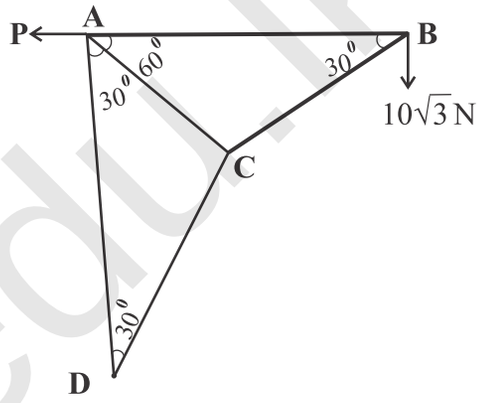
$= 2w + \sqrt{2}\,w \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 3w$

09. AB, BC, CD, DA, AC என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்கள் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு சட்டப்படலை ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன.

$A\hat{B}C = A\hat{D}C = D\hat{A}C = 30^0$, $B\hat{A}C = 60^0$ ஆகும்.

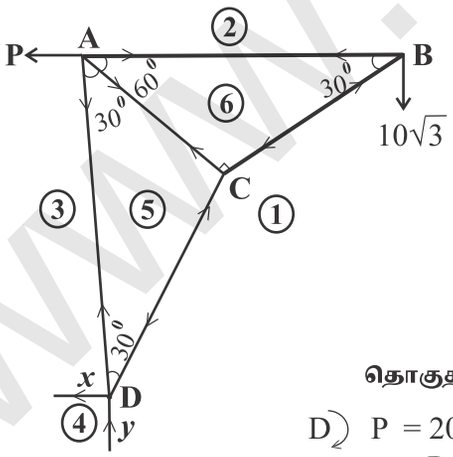
சட்டப்படல் Dயில் ஒப்பமாக பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை Bயில் ஒரு $10\sqrt{3}$ நியூட்டன் நிறையைக் காவுகின்றது. AB கிடையாக இருக்குமாறு சட்டப்படல் Aயில் உள்ள P நியூட்டன் எனும் ஒரு கிடை விசையினால் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைத்திருக்கப்படுகிறது.

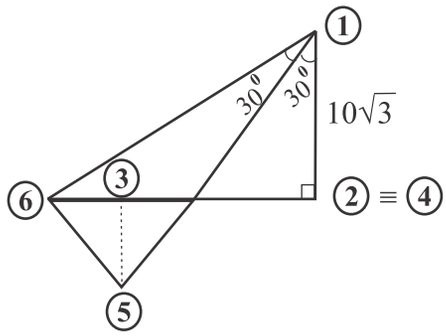


1) Pயின் பருமனைக் காண்க.

2) Dயில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

3) போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி, சட்டப்படலிற்கான ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்தி எல்லா கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளைக் காண்க.





தொகுதி

D) P = 20N

→ x = P

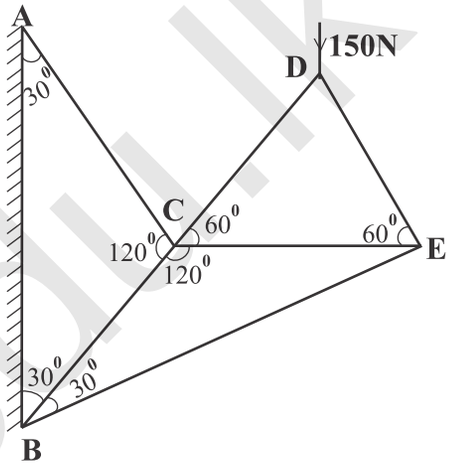
↑ y = $10\sqrt{3}$

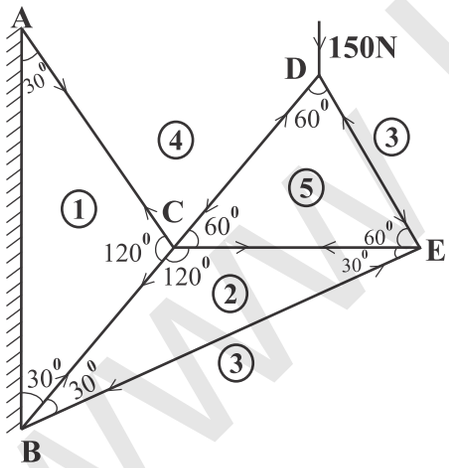
www.ikedu.lk

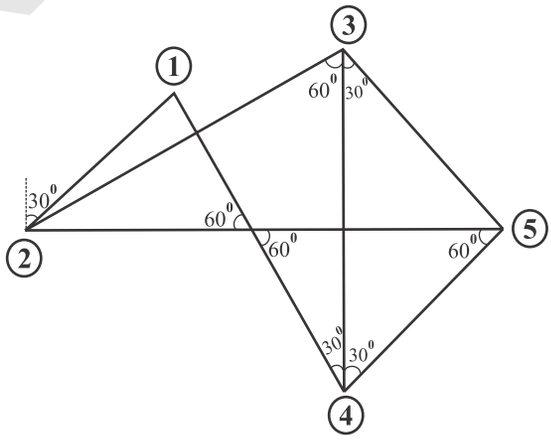
$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{20^2 + (10\sqrt{3})^2}$$
$$= 10\sqrt{7}\,N$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$= \frac{10\sqrt{3}}{20}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

கோல்	தகைப்பு	பருமன் (N)
BC	உதைப்பு	$20\sqrt{3}$
AB	இழுவை	30
DC	உதைப்பு	40
AD	இழுவை	$10\sqrt{3}$
AC	உதைப்பு	20

10. அருகில் உள்ள உரு முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஆறு இலேசான கோல்களாலான ஒரு சட்டப்படலை வகை குறிக்கின்றது. அது ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருடன் Aயிலும் Bயிலும் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை Dயில் ஒரு 150N சுமையைக் காவுகின்றது. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தலைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து அதிலிருந்து, கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளை அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளாவெனக் காட்டித் துணிக.



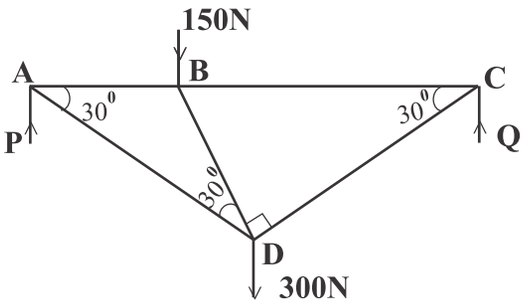




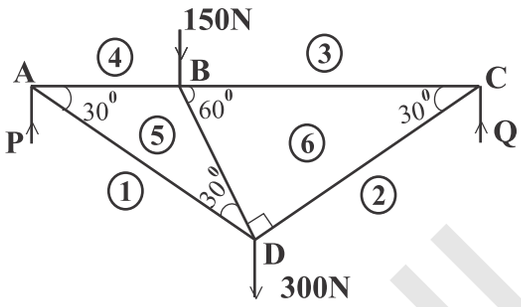
கோல்	உதைப்பு	இழுவை
CD	$50\sqrt{3}$	-
DE	$50\sqrt{3}$	-
CE	-	$100\sqrt{3}$
BE	$150\sqrt{3}$	-
AC	-	$100\sqrt{3}$
BC	-	$50\sqrt{3}$

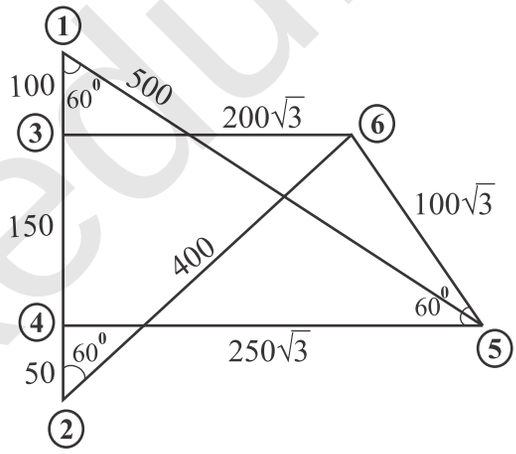
www.ikedu.lk

11. முனைகளில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட AB, BC, AD, BD, CD என்னும் ஐந்து இலேசான கோல் களைக் கொண்ட சட்டப்படல் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது.



AB = a மீற்றர், BC = 2a மீற்றர், $\hat{BAD}=\hat{BDA}=\hat{BCD}=30^0$. சட்டப்படலில் B இல் 150N, D இல் 300N என்னும் சுமைகள் பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ளன. அது AB, BC ஆகியன கிடையாக இருக்குமாறு முறையே A இலும், C இலும் பிரயோகிக் கப்படும் P, Q என்னும் இரு நிலைக்குத்து விசைகளினால் தாங்கப்பட்டு ஒரு நிலைக் குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் உள்ளது. P = 250N எனக் காட்டுக. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தலைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து. இதிலிருந்து எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளைக் கண்டு அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா என எடுத்துரைக்க.





$\uparrow P+Q=300+150=450$

C) $150 \times 2a + 300\,(2a - \frac{a}{2}) - P \cdot 3a = 0$

P = 250N

Q = 200N

கோல்	இழுவை	உதைப்பு
AB	-	$250\sqrt{3}$ N
BC	-	$200\sqrt{3}$ N
CD	400N	-
DA	500N	-
DB	-	$100\sqrt{3}$ N

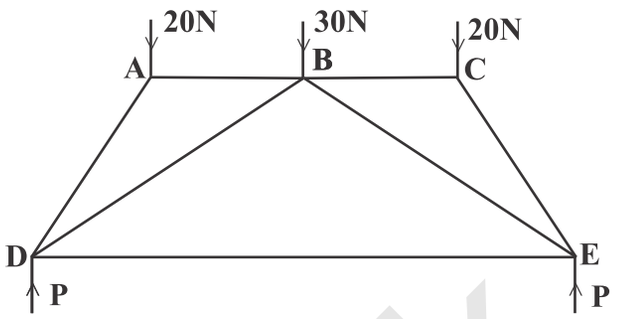
www.lkedu.lk

12. ஏழு விறைத்த இலேசான கோல்களை அவற்றின் முனைகளில் சுயாதீனமாக மூட்டி செய்யப்பட்ட ஒரு சமச்சீர்ச் சட்டப்படல் உருவில் காணப்படுகிறது.

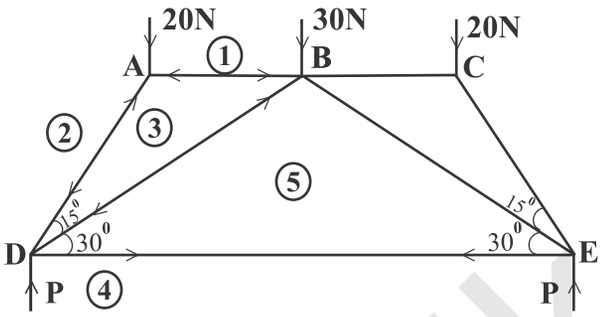
AB, BC, DE ஆகிய கோல்கள் கிடையானவை.

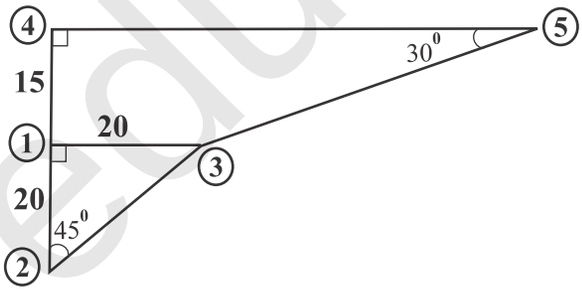
$A\hat{D}E = C\hat{E}D = 45^0$, $B\hat{D}E = B\hat{E}D = 30^0$

சட்டப்படல் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு A, B, C ஆகிய மூட்டுக்களில் சுமையேற்றப்பட்டுயிலும் Eயிலும் உள்ள P என்னும் சம நிலைக்குத்து விசைகளினால் தாங்கப் பட்டுள்ளது. Pயின் பெறுமானத்தைக் காண்க.



போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி A, D ஆகிய மூட்டுக்களுக்கு தகைப்பு வரிப்படங்களை ஒரே உருவில் வரைக. இதிலிருந்து AD, AB, DE, DE ஆகிய கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளைக் கண்டு, அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா எனக் கூறுக.





$\uparrow 2P = 70$

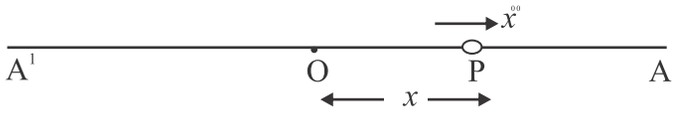
$P = 35N$

கோல்	தகைப்பு	பருமன்
AD	உதைப்பு	$20\sqrt{2}$ N
AB	உதைப்பு	20N
DE	இழுவை	$(20 + 15\sqrt{3})$N
DB	உதைப்பு	30N

www.lkedu.lk

எளிமை இசைஇயக்கம் (S.H.M)

ஒரு துணிக்கை, அதன் பாதை வழியேயான ஆர்முடுகல் அப்பாதையிலுள்ளதொரு நிலைப்பட்ட புள்ளிகளை நோக்கியும், இந்நிலைப்பட்ட புள்ளிக்கும், துணிக்கைக்கும் இடைப்பட்ட தூரத்திற்கு நேர்விகித சமமாகவும் இருக்குமாறும் இயங்கினால் அத்துணிக்கையின் இயக்கம் எளிமை இசை இயக்கம் எனப்படும்.



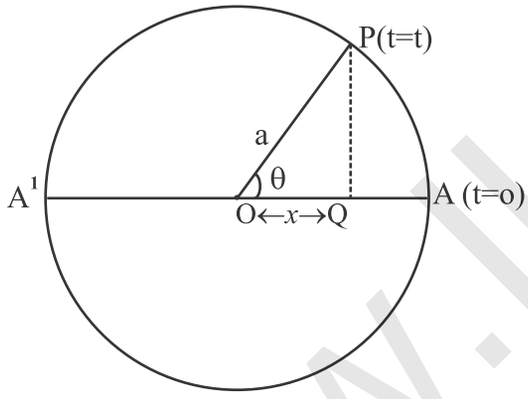
$$\ddot{c} \propto -c$$

$$\ddot{c} = -w^2 c$$

எளிமை இசை இயக்கத்தை குறிக்கும் அடிப்படை இயக்க சமன்பாடு $\ddot{c} = -w^2 c$

இங்கு O - அலைவுமையம் or குவியம் or சமநிலைத்தானம்

Note : சீரான கோண வேகம் ω உடன் வட்டப்பாதையில் இயங்கும் துணிக்கை ஒன்றின் ஏதாவது ஒரு விட்டத்தில், எறியத்தின் இயக்கம் ஓர் எளிமை இசை இயக்கமாகும்.



$$\frac{dq}{dt} = w$$

1 sec இல் சென்ற தூரம் = ω

t sec இல் சென்ற தூரம் = ωt

$$\theta = \omega t$$

$$c = a\cos q = a\cos wt \text{ ——— (1)}$$

$$\dot{c} = a(-\sin wt).w \text{ ——— (2)}$$

$$\ddot{c} = -aw\cos vt(w)$$

$$\ddot{c} = -w^2(a\cos wt)$$

$$\ddot{c} = -w^2 c$$

துணிக்கை Q ஆனது O குறித்து எளிமை இசை இயக்கத்தை ஆற்றும்

(1) $\Rightarrow \cos wt = \frac{c}{a}$

(2) $\Rightarrow \sin wt = \frac{-\dot{c}}{aw}$

ஆனால் $\sin^2 wt + \cos^2 wt = 1$

$$\left(\frac{\dot{c}}{aw}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

$$\dot{c}^2 + w^2 c^2 = w^2 a^2$$

$$\dot{c}^2 = w^2(a^2 - c^2)$$

$V^2 = w^2(a^2 - c^2)$ இங்கு $V = \dot{c}$

or $\ddot{c} = w^2 c$

$$\frac{d^2 c}{dt^2} = w^2 c$$

$$\frac{d}{dt}(v) = -w^2 c$$

$$\frac{dv}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} = -w^2 c$$

$$v\frac{dv}{dc} = -w^2 c$$

www.tkedu.lk

இரு புறமும் தொகையிட

$\frac{v^2}{2} = -\frac{w^2c^2}{2} + C$ - C. தொகையீட்டு மாறிலி

$c = a$ இல் $V = 0$

$O = \frac{w^2a^2}{2} + C$

$C = \frac{w^2a^2}{2}$

$\therefore \frac{V^2}{2} = \frac{-w^2c^2}{2} + \frac{w^2a^2}{2}$

$V^2 = w^2(a^2 - c^2)$

Note : $V^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - c^2 \geq 0$

$c^2 - a^2 \leq 0$

$-a \leq c \leq a$

Q ஆனது A இற்கும் A^1 இற்கும் இடையில் O வை நோக்கி இயங்குவதனால் A, A^1 முனைப்புள்ளிகள் எனப்படும்.

வீச்சம் :

நிலையான புள்ளி O விலிருந்து துணிக்கையின் உயர்வுப்பெயர்ச்சி துணிக்கையின் வீச்சம் எனப்படும்.

அலைவு காலம் :

P ஆனது A இலிருந்து ஒரு முறை a ஆரையுள்ள வட்டத்தை சுற்றிவர, Q ஆனது A இலிருந்து O இனூடாக A^1 ஐ அடைந்து மீண்டும் A ஐ அடைய ஒரு அலைவு உண்டாகின்றது ω P இன் கோண வேகமாகும்.

$T = \frac{2p}{w}$

உய்தறிதல்: $V^2 = w^2(a^2 - c^2)$

1) $V_{max} = a\omega$
இது $x = 0$ இல் நிகழும். அதாவது அலைவு மையத்தில் நிகழும்.

2) $V = 0$ $x = \pm a$
இது A, A^1 இல் நிகழும். A, A^1 கணநிலை ஓய்வுத்தானங்கள் எனப்படும்.

3) $x = \pm x_1$ $V = V_1$
எனவே O இல் இருந்து இருபுறமும் சமதூரத்தில் வேகம் சமம்.

4) x அதிகரிக்க V குறையும்.

$|\ddot{c}| = w^2|c|$

5) $c = 0$ இல் $\ddot{c} = 0$

$c = \pm a$, $|\ddot{c}|_{mac} = w^2a$

www.lkedu.lk

A^1	O	A
$V = O$	V_{mac}	$V = O$
$\ddot{c}_{mac}$	$\ddot{c} = O$	$\ddot{c}_{mac}$

01. எளிமை இசை இயக்கத்தில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை அலைவு மையத்தில் இருந்து 9m தூரத்தில் உள்ள போது அதன் ஆர்முடுகல் $16m/s^2$ ஆகும். அலைவு காலத்தை காண்க.

$\ddot{c} = - w^2 c$

$/\ddot{c}/ = w^2 / c /$

$16 = w^2 9$

$w = \frac{4}{3} rad/s$

$T = \frac{2p}{w} = \frac{2p}{\left(4/3\right)} = \frac{3p}{2} s$

02. எளிமை இசை இயக்கத்தில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கையின் அலைவுமையத்தில் வேகம் 6m/s மையத்தில் இருந்து 2m தூரத்தில் ஆர்முடுகல் $8m/s^2$ ஆகும்.

i) வீச்சம் ii) அலைவு காலம் iii) உயர் ஆர்முடுகல் என்பவற்றைக் காண்க.

$\ddot{c} = - w^2 c$

$/\ddot{c}/ = w^2 / c /$

$8 = w^2 (2)$

$w = 2rad/s$

$T = \frac{2p}{w} = \frac{2p}{2} S = p S$

$V^2 = w^2 \left(a^2 - c^2\right)$

$V_{mac} = w a$

$6 = w a$

$6 = 2a$

$a = 3m$

$/\ddot{c}/ = w^2 / c /$

$/\ddot{c}/_{mac} = w^2 a$

$= (4)(3) m/s^2$

$= 12 m/s^2$

03. ஒரு புள்ளி ஒரு நேர்கோட்டிலே நிலைப்பட்ட புள்ளி O ஐக் குறித்து எ.இ.இ. ஆற்றுகின்றது. O விலிருந்து அளக்கப்பட்ட பெயர்ச்சி x_1 ஆயிருக்கும் போது அதன் வேகம் V_1, பெயர்ச்சி பெயர்ச்சி x_2 ஆயிருக்கும் போது அதன் வேகம் V_2 ஆகும். அலைவுகாலம்.

$2p\sqrt{\frac{c_1^2 - c_2^2}{V_2^2 - V_1^2}}$ எனக் காட்டுக.

$V^2 = w^2 \left(a^2 - c^2\right)$ ஐ பயன்படுத்த

$V_1^2 = w^2 \left(a^2 - c_1^2\right)$

$V_2^2 = w^2 \left(a^2 - c_2^2\right)$

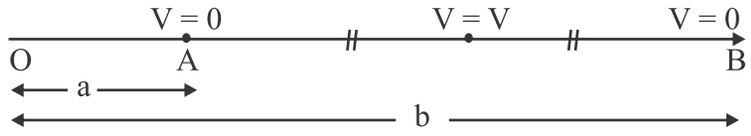
$V_2^2 - V_1^2 = w^2 \left(c_1^2 - c_2^2\right)$

$w = \sqrt{\frac{V_2^2 - V_1^2}{c_1^2 - c_2^2}}$

$T = \frac{2p}{w} = 2p\sqrt{\frac{V_2^2 - V_1^2}{c_1^2 - x_2^2}}$

www.lkedu.lk

04. OAB என்னும் நேர்கோட்டில் எ.இ.இ. ஆற்றும் துணிக்கை A, B இல் O வேகத்தையுடையது. OA = a, OB = b ஆகும். AB இன் நடுப்புள்ளியில் அதன் வேகம் V முழு அலைவுகாலம் $\frac{p(b-a)}{V}$ எனக் காட்டுக.



$V^2 = w^2(a^2 - c^2)$ ஐ பயன்படுத்த

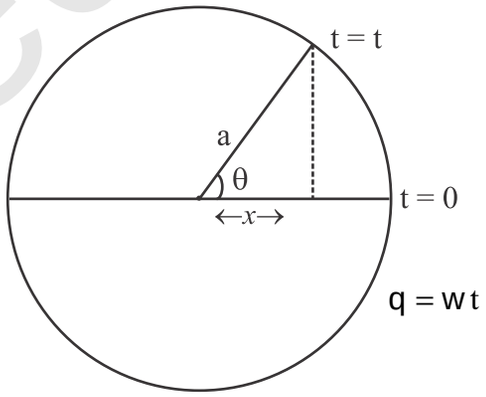
$$V^2 = w^2\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - 0\right]$$

$$w = \frac{2V}{b-a}$$

$$T = \frac{2p}{w} = \frac{b-a}{V}$$

05. ஒரு துணிக்கை எ.இ.இ ஆற்றும் போது ஒரு ஓய்வுத் தானத்திலிருந்து மற்றைய ஓய்வுத் தானத்திற்குச் செல்லும் போது 3 அடுத்தடுத்த Sec இல் அதன் இயக்க மையத்தில் இருந்து x_1, x_2, x_3 தூரங்களில் இருக்கக் காணப்பட்டது.

ஆவர்த்தனகாலம் $T = \frac{2p}{\text{Cos}^{-1}\left(\frac{c_1 + c_3}{2c_2}\right)}$ எனக் காட்டுக.



$c = a\text{Cos}\theta$

$c = a\text{Cos}wt$

$\theta = wt$

$c = a\text{Cos}wt$ ஐ பயன்படுத்த

$$c_1 = a\text{Cos}wt \quad \text{——— (1)}$$

$$c_2 = a\text{Cos}w(t+1) \quad \text{——— (2)}$$

$$c_3 = a\text{Cos}w(t+2) \quad \text{——— (3)}$$

$$c_1 + c_3 = a\{Cos\,wt + Cos\,w(t+2)\}$$

$$= a\{2Cos\,w(t+1)Cos\,w\}$$

$$\frac{c_1 + c_3}{2c_2} = \text{Cos}w$$

$$w = \text{Cos}^{-1}\left[\frac{c_1 + c_3}{2c_2}\right]$$

$$T = \frac{2p}{w} = \frac{2p}{\text{Cos}^{-1}\left[\frac{c_1 + c_3}{2c_2}\right]}$$

www.ikedu.lk

06. அலகுத் திணிவுள்ள ஒரு துணிக்கை வேகம் V உடன் ஒரு நேர்கோட்டில் இயங்குகின்றது. நேர்கோட்டிலுள்ள நிலையான புள்ளி O இல் இருந்து துணிக்கையின் தூரம் x எனில் $\dot{c}^2 = -w^2(c^2 - 6ac - 7a^2)$ ஆல் தரப்படும் இயக்கம் S.H.M எனக் காட்டுக. O இல் இருந்து x கூடும் திசையில் துணிக்கை சென்று கணஓய்வுக்கு வர எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

$\dot{c}^2 = -w^2(c^2 - 6ac - 7a^2)$

இருபுறமும் t குறித்து வகையிட

$2\dot{c}\ddot{c} = -w^2(2c\dot{c} - 6a\dot{c})$

$\ddot{c} = -w^2(c - 3a)$

$X = c - 3a$ என்க.

$\ddot{X} = \ddot{c}$

$\ddot{X} = -w^2X$

ஆகவே துணிக்கையின் இயக்கம் S.H.M

அலைவு மையத்தில் $\ddot{X} = 0$

$\Rightarrow X = 0$

$c - 3a = 0$

$c = 3a$

$\dot{c}^2 = -w^2(c^2 - 6ac - 7a^2)$

கணநிலை ஓய்வுத்தானத்தில் $\dot{c} = 0$

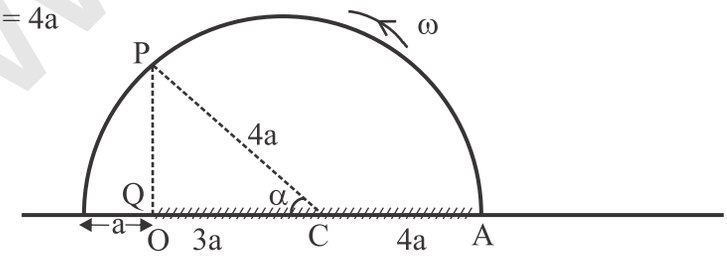
$\Rightarrow c^2 - 6ac - 7a^2 = 0$

$(c - 7a)(c + a) = 0$

$c - 7a = 0$ or $c + a = 0$

$c = 7a$ or $c = -a$

வீச்சம் $= 4a$



$\text{Cos}\alpha = \frac{3a}{4a} \Rightarrow \alpha = \text{Cos}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

www.lkedu.lk

Q ஆனது O இல் இருந்து A ஐ அடைய எடுத்த நேரம் = P ஆனது பரிதி வழியே A ஐ அடைய எடுத்த நேரம்

$$t_{OA} = \frac{p - a}{w}$$

$$= \frac{p - \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}{w}$$

ஊக்கின் விதி

ஒரு மீள்தன்மை இழையில் இளுவை நீட்சிக்கு நேர்விகித சமமனாகும்.

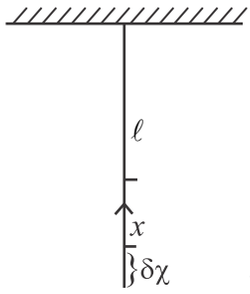
$$T a c$$

$$T = \frac{l}{\ell} c$$

இங்கு ℓ - இயற்கை நீளம்

λ - மீள்தன்மை மட்டு

இழையில் சேமிக்கப்பட்டிருக்கும் சக்தி இயற்கை நீளம் ℓ உம் மீள்தன்மை மட்டு λ உம் கொண்ட மீள்தன்மை இழையின் நீளம் ℓ இல் இருந்து $(\ell + e)$ வரை நீளும் போது சேமிக்கப்படும் சக்தி $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\ell}e^2$ ஆகும்.



$$T = \frac{l}{\ell} c$$

ℓ இயற்கை நீளமுள்ள இழை x தூரம் நீட்டப்பட்டிருக்கும் போது இழையிலுள்ள இழுவை T எனில்

$$T = \frac{l c}{\ell}$$

மீள்தன்மை இழையை மேலும் $\delta\chi$ தூரத்தினூடு ஈர்க்கும் போது செய்யப்படும் வேலை $= T\delta\chi$

எனவே இழையை மொத்தமாக e தூரம் நீட்டப்படும் போது செய்யப்படும் வேலை

$$= \sum_{c=0}^{e} T dc$$

$$= \int_{o}^{e} T\, dc$$

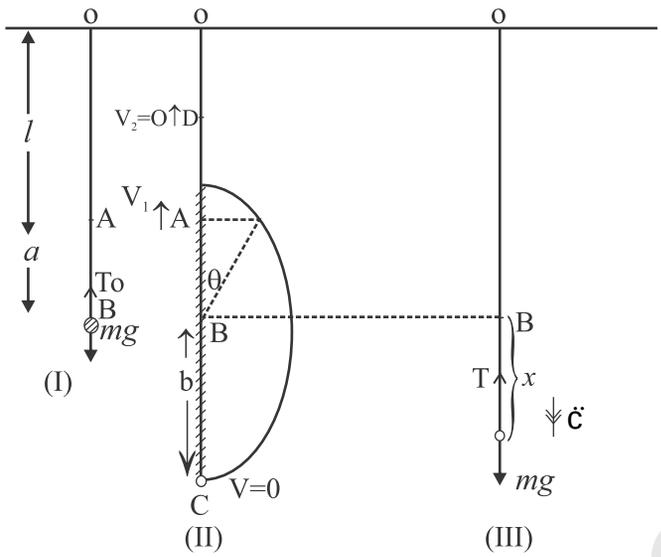
$$= \int_{o}^{e} \frac{l c}{\ell}\, dc$$

$$= \frac{l}{\ell}\left[\frac{c^2}{2}\right]_{0}^{e} = \frac{l e^2}{2\ell}$$

www.ikedu.lk

மீள்தன்மை இழைகளில் இயக்கம்

ஒரு மீள்தன்மை இழையின் முனை O எனும் நிலைத்த புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டு மறுமுனையில் m திணிவுடைய, ஒரு துணிக்கை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அத்துணிக்கை ஓய்வுநிலையை அடைந்ததும் மேலும் சிறிது தூரத்திற்கூடாக, இழுக்கப்பட்டு விடும் போது அதன் இயக்கம் ஓர் எளிமை இசை இயக்கமாகும்.



நிலை I இல்

$To = mg$ ——————(1)

இழையின் மீள்தன்மை மட்டு λஎனில்

$$To = \frac{\lambda a}{\ell} \text{ ——————(2)}$$

$(1),(2) \Rightarrow mg = \frac{\lambda a}{\ell}$

$$\lambda = \frac{mg\ell}{a}$$

நிலை III

$P = mf$

$mg - T = m\ddot{c}$

$$mg - \frac{\lambda (a+c)}{\ell} = m\ddot{c}$$

$$mg - \frac{mg}{a}(a+c) = m\ddot{c}$$

$$g - g - \frac{g}{a}c = \ddot{c}$$

$$\ddot{c} = \frac{g}{a}c$$

$\ddot{c} = w^2 c$ இங்கு $w^2 = \frac{g}{a}$

துணிக்கையின் இயக்கம் ஓர் S.H.M

x = 0 இல் அலைவடிவம் இயக்கம்

(B இல் இருக்கும்)

www.lkedu.lk

Case 1:- $BC \leq AB$ ஆயின் துணிக்கை B இற்கு கீழே எவ்வளவு தூரம் செல்லுமோ அவ்வளவு தூரம் B இற்கு மேலே செல்லும். துணிக்கையின் இயக்கம் பூரண எ.இ.இயக்கம்.

Case 2:- $BC > AB$ ஆயின் துணிக்கை B ஐ ஒரு வேகத்துடன் வந்தடையும். துணிக்கை Bஐ வந்தடைந்ததும் இழை தொய்யும் துணிக்கை புவியீர்ப்பின் கீழ் ஓய்வடையும் வரை இயக்கம். ஆகவே துணிக்கையின் இயக்கம் ஒரு பகுதி S.H.M மற்றைய இயக்கம் புவியீர்ப்பு இயக்கமாகும்.

வீச்சம் $= b$

$$Cos\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow \theta = Cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

எளிமை இசை இயக்கத்தில் இ.நேரம் $= t_{CA}$

$$t_{Cp} = \frac{\pi - \theta}{\omega} = \frac{\pi - Cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)}{\sqrt{\frac{g}{a}}}$$

இழை தொய்யும் கணத்தில் துணிக்கையின் வேகம் V_1 என்க.

$V^2 = \omega^2 (a^2 - x^2)$ ஐ பயன்படுத்த

$V_1^2 = \omega^2 (b^2 - a^2)$

$V_1^2 = \frac{g}{a}(b^2 - a^2)$

$\uparrow V = u + ft \quad (A \rightarrow D)$

$O = V_1 + (-g)\, t_{AD}$

$t_{AD} = \frac{V_1}{g} = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{g}{a}(b^2 - a^2)}$

$t_{AD} = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{ag}}$

அலைவு காலம் $= 2\{t_{CA} + t_{AD}\}$

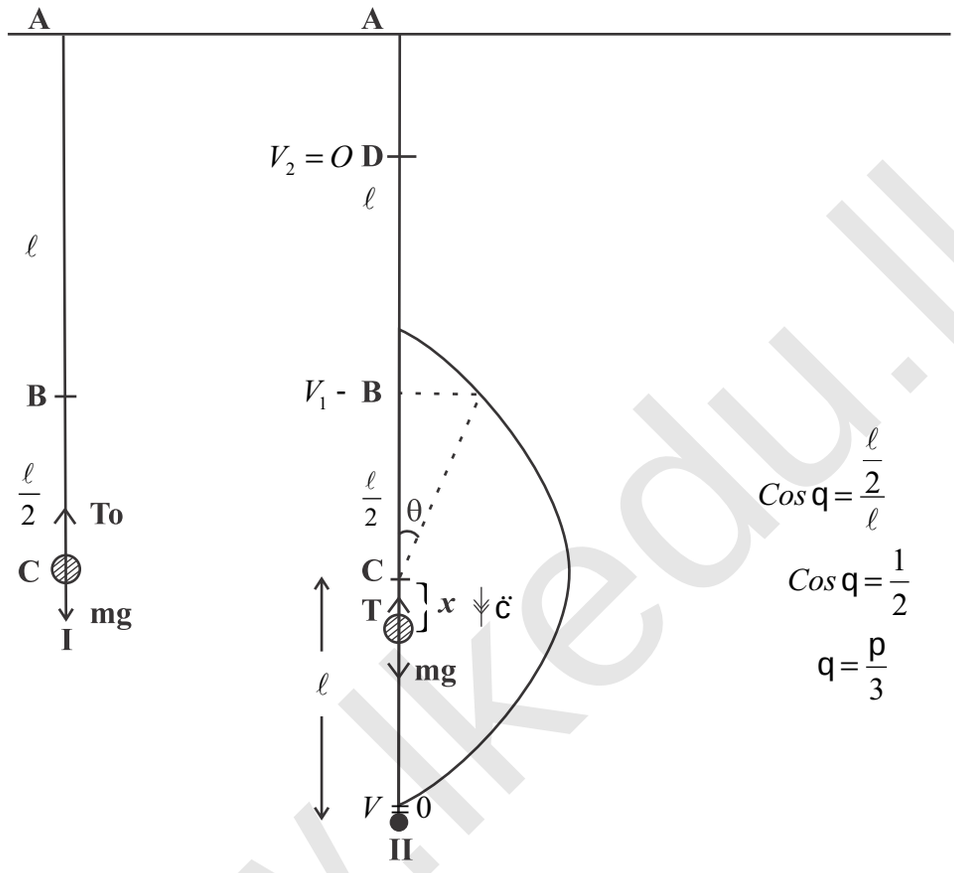
$$= 2\left[\frac{\pi - Cos^{-1}(a/b)}{\sqrt{\frac{g}{a}}} + \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{ag}}\right]$$

www.lkedu.lk

07) இயற்கை நீளம் l உடைய மீள்சக்தி இழை AB இன் ஒரு முனை Aயில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. மறுமுனை B ஆனது m திணிவுடைய துணிக்கையொன்றை காவுகின்றது. சமநிலையில் விரிவு $\frac{L}{2}$ B ஆனது மேலும் l நீளம் இழுக்கப்பட்டு பின்னர் விடப்பட்டால்

i. $\frac{p}{3}\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$ நேரத்தில் இழை தொய்யும் எனவும்

ii. துணிக்கை அடைந்த அதியுயர் புள்ளி A இற்கு கீழே $\frac{\ell}{4}$ தூரத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.



நிலை I

$$To = mg = \frac{l\left(\frac{\ell}{2}\right)}{\ell}$$

$$l = 2mg$$

நிலை II

$P = mf$

$$-mg - T = m\ddot{x}$$

$$mg - \frac{l\left(\frac{\ell}{2} + x\right)}{\ell} = m\ddot{x}$$

$$mg - \frac{2mg}{\ell}\left(\frac{\ell}{2} + x\right) = m\ddot{x}$$

$$g - \frac{2g}{\ell}\left(\frac{\ell}{2} + x\right) = \ddot{x}$$

$$-\frac{2g}{\ell}x = \ddot{x}$$

$\ddot{x} = -w^2x$ இங்கு $w^2 = \frac{2g}{\ell}$

www.lkedu.lk

இயக்கம் S.H.M

அலைவுமையம் $x = 0$ இல் இருக்கும். (புள்ளி C)

வீச்சம் $= l$

இழை தொய்ய எடுக்கும் நேரம் $= \frac{p - Q}{w} = \frac{p - p/3}{\sqrt{\frac{2g}{\ell}}}$

$= \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{\ell}{2g}}$

$= \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$

இழை தொய்யும் கணத்தில் வேகம் $= V_1$ என்க.

$v^2 = w^2(a^2 - x^2)$ ஐ பயன்படுத்த

$v_1^2 = \frac{2g}{\ell}(\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2) = \frac{3g\ell}{2}$

$v_1 = \sqrt{\frac{3g\ell}{2}}$

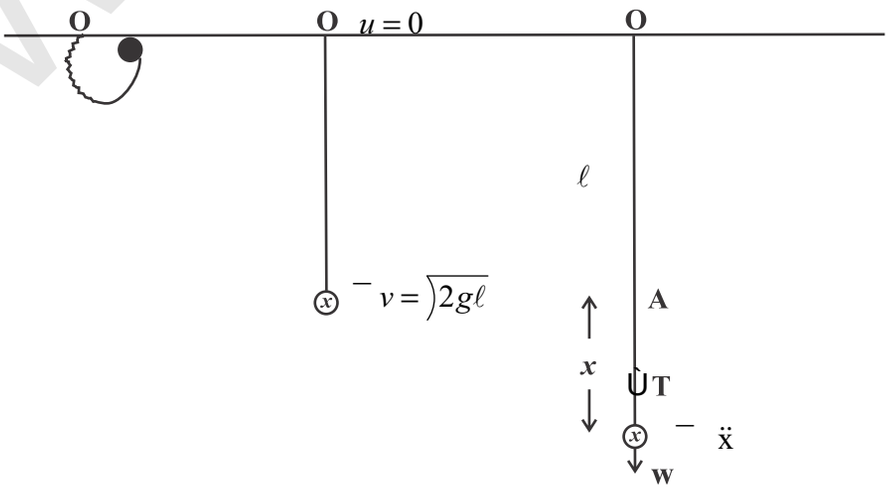
$\uparrow v^2 = u^2 + 2fs \quad (B \to D)$

$O = v_1^2 + 2(-g)h$

$h = \frac{3g\ell}{2g} = \frac{3\ell}{4}$

$\therefore AD = \ell - \frac{3\ell}{4} = \frac{\ell}{4}$

08) l என்னும் இயற்கை நீளமுடைய மீள்தன்மை இழையொன்றின் ஓர் முனை O என்னும் புள்ளியில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. மறுமுனை w நிறை கொண்ட துணிக்கையொன்றுடன் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. இழையின் மீள்தன்மை மட்டு 4w ஆகும். துணிக்கை O இல் இருந்து விழவிடப்பட்டால் அது முதல் கணநிலை ஓய்விற்கு ஓய்விற்கு வரமுன்னர் $2l$ தூரம் விழும் எனவும் அதற்கான நேரம் $\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ எனவும் காட்டுக.



www.lkedu.lk

$$T = \frac{4wx}{\ell}$$

$$P = mf^{-}$$

$$W - T = \frac{W}{g}\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{4g}{\ell}\left(x - \frac{\ell}{4}\right)$$

$$\frac{4g}{\ell} = w^2$$

$X = x - \frac{\ell}{4}$ இட

$$\ddot{X} = w^2X$$

துணிக்கையின் இயக்கம் எ.இ.இ

அலைவுமையத்தில் $\ddot{X} = 0$

$$\therefore X = 0$$

$$x - \frac{\ell}{4} = 0$$

$$x = \frac{\ell}{4}$$

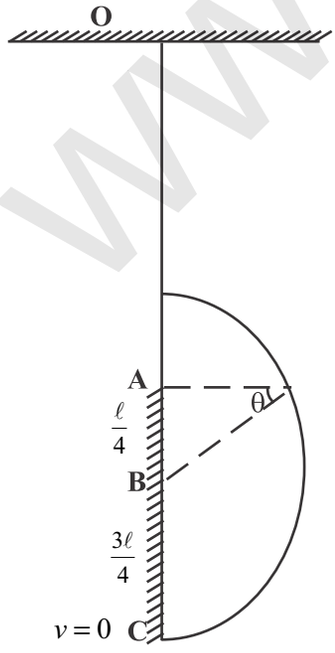
அலைவு மையம் A இற்கு கீழே $\frac{\ell}{4}$ தூரத்தில் இருக்கும்.

வீச்சம் காண

$v^2 = w^2(a^2 - x^2)$ ஐ பயன்படுத்த

$$(\sqrt{2g}\ell)^2 = \frac{4g}{\ell}\left(\bar{a}^2 - \left(\frac{\ell}{4}\right)^2\right)$$

$$\bar{a} = \frac{3\ell}{4}$$



$$\text{Sin}\theta = \frac{\frac{\ell}{4}}{\frac{3\ell}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\theta = \text{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$t_{AC} = \frac{\frac{p}{2} + \theta}{w}$$

$$= \frac{\frac{p}{2} + \text{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)}{2\sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

$$^{-}\ S = ut + \frac{1}{2}ft^2 \quad (O \to A)$$

$$\ell = o.t + \frac{1}{2}gt_{OA}^{\ 2}$$

$$t_{OA} = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}$$

www.lkedu.lk

முதல் கணநிலை ஓய்விற்கு வர முன்னர் விழுந்த தூரம்

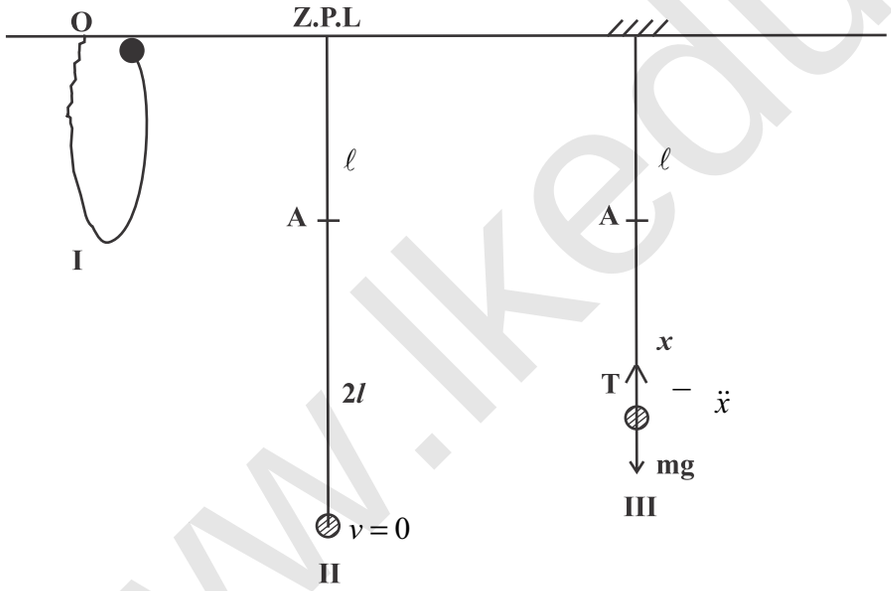
$$= \ell + \frac{\ell}{4} + \frac{3\ell}{4} = 2\ell$$

நேரம் $= t_{OA} + t_{AC}$

$$= \sqrt{\frac{2\ell}{g}} + \frac{\frac{p}{2} + \text{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)}{2\sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

$$\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(\sqrt{2} + \frac{p}{4} + \frac{1}{2}\text{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

9) l இயற்கை நீளம் உள்ள நீளா இழையில் m திணிவு கட்டப்பட்டு O எனும் நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து விழவிடப்படுகின்றது. O இற்கு கீழ் P இன் மிகக்கூடிய ஆழம் $3l$ ஆகும் $\lambda = \frac{3mg}{2}$ எனக் காட்டுக. அதிதாழ் புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{2\ell}{g}}\left(1 + \frac{2p}{3\sqrt{3}}\right)$ எனக்காட்டுக.



I, II இற்கு சக்திக் காப்பு விதிப்படி

$$0 + 0 + 0 = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\ell}\right)(2\ell)^2 - mg(3\ell)$$

$$\lambda = \frac{3mg}{2}$$

நிலை III

$$P = mf$$

$$mg - T = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{3g}{2\ell}\left(x - \frac{2\ell}{3}\right)$$

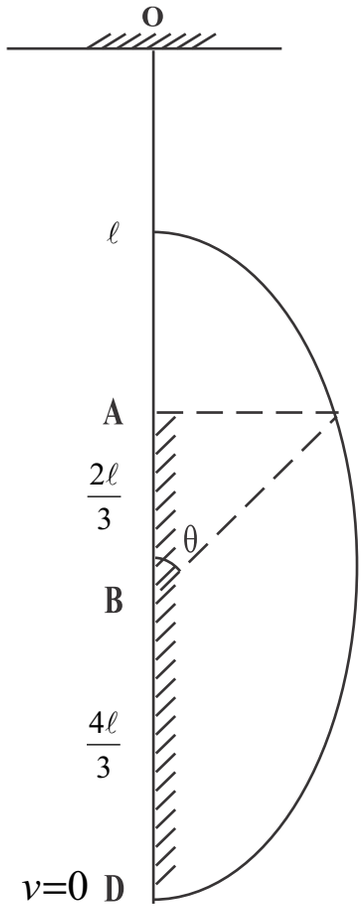
$X = x - \frac{2\ell}{3}, w^2 = \frac{3g}{2\ell}$ இட

$$\ddot{X} = -w^2 X$$

இயக்கம் S.H.M

அலைவு மையம் $x = \frac{2\ell}{3}$ இல் இருக்கும்

வீச்சம் $= 2\ell - \frac{2\ell}{3} = \frac{4\ell}{3}$



$$Cos\theta = \frac{2\ell/3}{4\ell/3} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$t_{AD} = \frac{\pi - \theta}{w} = \frac{\pi - \pi/3}{\sqrt{\frac{3g}{2l}}}$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$$

$$S = ut + \frac{1}{2}ft^2 \quad (O \to A)$$

$$\ell = O.t + \frac{1}{2}gt_{OA}$$

$$t_{OA} = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}$$

அதி தாழ் புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரம்.

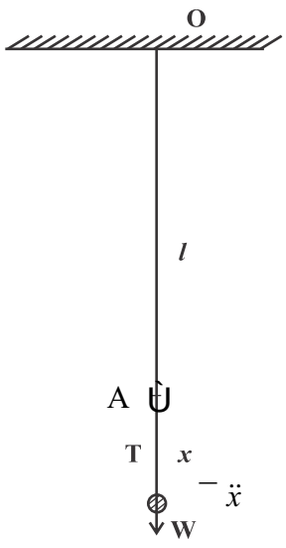
$$= t_{OA} + t_{AD}$$

$$\sqrt{\frac{2\ell}{g}} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\ell}{g}}\left(1 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

www.lkedu.lk

10) w நிறையுடைய ஒரு துணிக்கை Pஆனது ஈர்க்கப்படாத நீளம் l உம் மீள்தன்மை மட்டு W உம் உள்ள இலேசான மீள்தன்மை இழை ஒன்றினால் நிலைத்த புள்ளி O இலிருந்து தொங்குகின்றது. P ஆனது 2a வீச்சமுள்ள நிலைக்குத்து அலைவுகளை ஆக்குமெனின் நேரம் t இல் O இல் இருந்து அதன் தூரம் $2\left(\ell + a \operatorname{Sin} t \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)$ எனக் காட்டுக. இங்கு P அதன் சம நிலைத்தானத்தில் இருந்த கணத்திலிருந்து நேரம் அளவிடப்படுகின்றது. அத்தோடு துணிக்கை அதன் சமநிலை தானத்தினூடு மேலே செல்லும் போது B இல் சம நிலையிலுள்ள வேறொரு துணிக்கையுடன் பொருந்து மெனில் அலைவின் வீச்சம் $\sqrt{\ell^2 + 2a^2}$ எனக் காட்டுக.



$P = mf$

$W - T = \frac{w}{g}\ddot{x}$

$w - \frac{wx}{\ell} = \frac{w}{g}\ddot{x}$

$\ddot{c} = -\frac{g}{\ell}(c - \ell)$

$X = c - \ell, \quad w^2 = \frac{g}{\ell}$

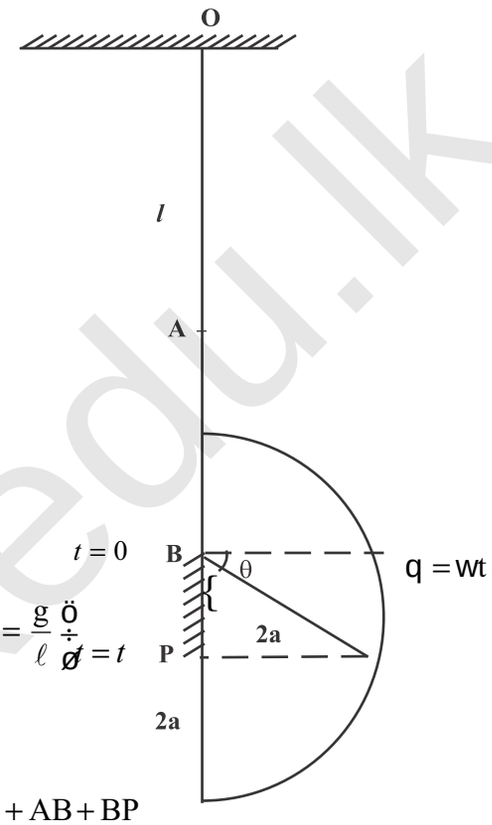
$\ddot{X} = w^2 X$

இயக்கம் S.H3M

அலைவு மையத்தில் $\ddot{X} = o$

$\therefore x = \ell$

(B இல் இருக்கும்)



$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell}(x - \ell) \qquad t = 0$

$X = x - \ell, \quad w^2 = \frac{g}{\ell}$

$\ddot{X} = w^2 X$

$OP = OA + AB + BP$

$= \ell + \ell + 2a \operatorname{Sin} q$

$= 2\ell + 2a \operatorname{Sin} wt$

$= \left(2\ell + 2a \operatorname{Sin} t \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)$

$= 2\left(\ell + a \operatorname{Sin} t \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)$

புள்ளி B இல் வேகத்தைக்காண

$v^2 = w^2(a^2 - x^2)$ ஐ பயன்படுத்த

$v_B{}^2 = w^2((2a)^2 - O^2)$

$v_B = 2aw$

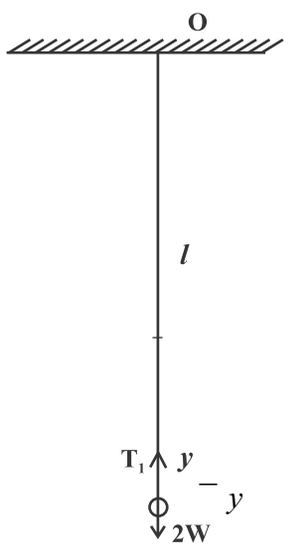
உந்தக்காப்பு விதிப்படி

$$\frac{w}{g}.V_B + \frac{w}{g}.o = \left(\frac{2w}{g}\right)V_1$$

$v_1 = aw$ v_1 - கூட்டுத்துணிக்கையின் வேகம்

(மொ.பின்னர்)

www.lkedu.lk



$P = mf$

$-2w - T_1 = \frac{2w}{g}\ddot{y}$

$\ddot{y} = -\frac{g}{2\ell}(y - 2\ell)$

put $y - 2\ell = Y$ $\qquad w_1^2 = \frac{g}{2\ell}$

$\ddot{Y} = -w_1^2 Y$

இயக்கம் S.H.M

அலைவு மையம் $y = 2l$ இல் இருக்கும்

புதிய அலைவின் வீச்சம் காண

$v^2 = w^2(a^2 - x^2)$ ஐ பயன்படுத்த

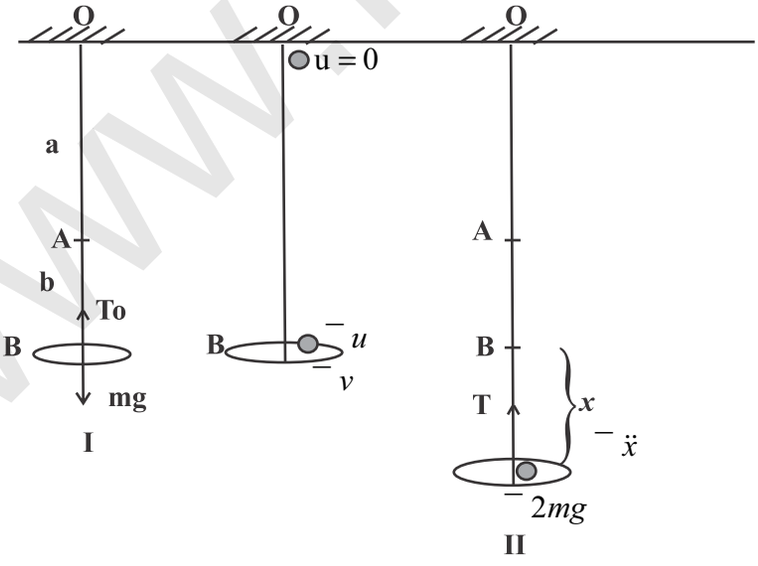
$v_1^2 = w_1^2\left\{\bar{a}^2 - \ell^2\right\}$

$a^2\frac{g}{\ell} = \frac{g}{2\ell}\left\{\bar{a}^2 - \ell^2\right\}$

$\bar{a}^2 = 2a^2 + \ell^2$

$\bar{a} = \sqrt{2a^2 + \ell^2}$

11) m திணிவுள்ள ஒரு சிறு அளவைத்தட்டு இயற்கை நீளம் a உம் மீள்தன்மையுள்ள இலேசான இழையின் அந்தமொன்றுடன் கட்டப்பட்டுள்ளது. இழையின் மறு அந்தம் நிலையான புள்ளி O விலே பொருத்தப்பட்டுள்ளது. அளவைத்தட்டு சுயமாகத் தொங்கு சமநிலையில் இருக்கையில் நீட்சி b ஆகும். m திணிவுடைய துணிக்கையொன்று O இல் ஓய்வில் இருந்து விழவிடப்பட்டு தட்டினுள் மறுதுள்ளல் இன்றி விழுகின்றது. இதையடுத்த இயக்கத்தில் துணிக்கையும் தட்டும் O விலிருந்து $a + 2b + \sqrt{ab + 2b^2}$ எனும் உயர் ஆழத்தையடையும் எனக் காட்டுக.



சமநிலையில்

$To = mg = \frac{l\,b}{a}$

$l = \frac{mga}{b}$

$U^2 = 2g(a + b)$

உந்தக்காப்பு விதிப்படி

$mu + m.o = 2mv$

$v = \frac{u}{2} = \frac{\sqrt{2g(a+b)}}{2}$

www.ikdu.lk

நிலை II இல்

$$P = mf^{-}$$

$$2mg - T = 2m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{g}{2b}(x - b)$$

$$\ddot{X} = w^2X \qquad w^2 = \frac{g}{2b}$$

அலைவுமையம் $x=b$ இல் இருக்கும்.

$v^2 = w^2(a^2 - x^2)$ ஐ பயன்படுத்த

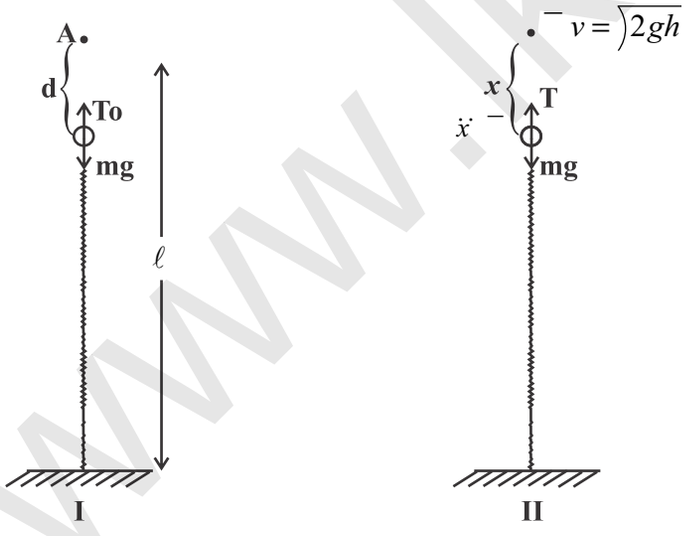
$$\frac{g(a+b)}{2} = \frac{g}{2b}(\bar{a}^2 - b^2)$$

$$\bar{a} = \sqrt{ab + 2b^2}$$

அதியுயர் ஆழம் $= a + b + b + \bar{a}$

$$= a + 2b + \sqrt{ab + 2b^2}$$

12) இலேசான சுருள்வில் அதனச்சு நிலைக்குத்தாக அமையும்படியாக அதன் கீழ் முனையிலே நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. ஓய்வில் இருக்கும் போது வில்லினை d தூரம் அமுக்கவல்ல திணிவொன்று வில்லின் மீது உயரம் h இலிருந்து போடப்படுகின்றது. அது வில்லின் மீது $\sqrt{\frac{d}{g}}\left[\pi + 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{d}{2h}}\right]$ நேரம் வரைக்கும் இருந்த பின்னர் தூக்கி வீசப்படும் எனக் காட்டுக.



சமநிலையில்

$$To = mg = \frac{\lambda d}{\ell}$$

$$\lambda = \frac{mg\ell}{d}$$

நிலை II

$$P = mf^{-}$$

$$mg - T = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{d}(x - d)$$

$$\ddot{X} = -\frac{g}{d}X$$

$$\ddot{X} = -w^2X$$

www.lkedu.lk

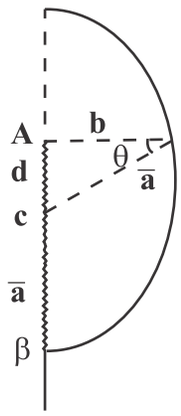
இயக்கம் S.H.M

அலைவுமையம் $x = d$ இல் இருக்கும்.

$v^2 = w^2(a^2 - x^2)$ ஐ பயன்படுத்த

$$\left(\sqrt{2gh}\right)^2 = \frac{g}{d}\left(a^2 - d^2\right)$$

$$\bar{a} = \sqrt{d^2 + 2dh}$$



$$b^2 + d^2 = d^2 + 2dh$$

$$b = \sqrt{2dh}$$

$$\tan\theta = \frac{d}{\sqrt{2dh}} = \sqrt{\frac{d}{2h}}$$

துணிக்கை சுருளில் இருந்த நேரம்

$$= 2\{t_{AC} + t_{CB}\}$$

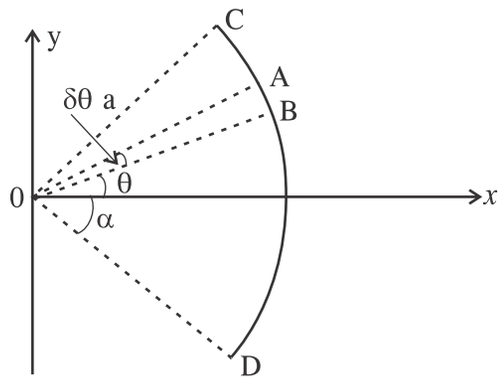
$$= 2\left[\frac{\theta}{w} + \frac{\frac{\pi}{2}}{w}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{d}{g}}\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{d}{2h}}\right) + \pi\right]$$

www.lkedu.lk

புவியீர்ப்பு மையம்

01) a ஆரையும் மையத்தில் 2α கோணத்தையும் எதிரமைக்கின்றதுமான வில் ஒன்றின் திணிவு மையம்



வில் OX வழியே சமச்சீர் எனவே வில்லின் திணிவு மையம் ox வழியே இருக்கும் வில்லின் ஓரலகு நீள அடர்த்தி ρ என்க.

சிறு கீலம் AB இன் திணிவு $mi = a\delta\theta\rho$

அதன் திணிவுமையம் $xi = a\cos q$

வில்லின் திணிவு $\overline{x} = \frac{\sum mixi}{\sum mi} = \frac{\sum adqr\, a\cos q}{\sum adqr}$

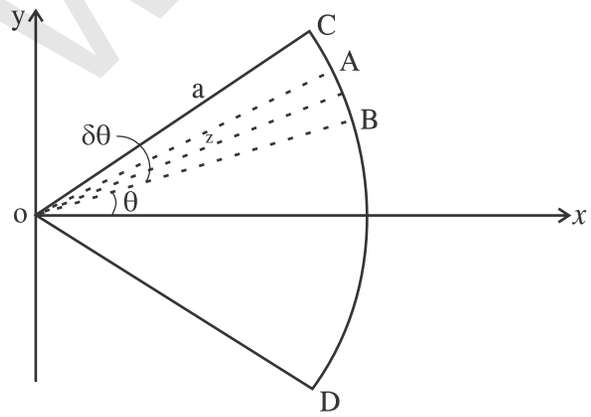
$$= \frac{\int_{-a}^{a} r.a\cos q\, dq}{\int_{-a}^{a} adq}$$

$$= \frac{a[\sin q]_{-a}^{a}}{[q]_{-a}^{a}}$$

$$= \frac{a[\sin a - \sin(-a)]}{a - (-a)}$$

$$= \frac{a\sin a}{a}$$

02. a ஆரையையும் மையத்தில் 2α கோணத்தை எதிரமைக்கின்றதுமான ஆரைச்சிறை (அடர்) ஒன்றின் திணிவு மையம்



www.lkedu.lk

ஆரைச்சிறை OX வழியே சமச்சீர் ஆதனால் அதன் திணிவு மையம் OX வழியே அமையும் அடரின் அலகுபரப்படர்த்தி ρ என்க.

சிறுகீலம் OABன் திணிவு $mi = \frac{1}{2}a^2 d\theta r$

அதன் திணிவு மையம் $xi = \frac{2}{3}$ aCOSθ

ஆரைச்சிறையின் திணிவுமையம் $\bar{x} = \frac{\sum mixi}{\sum mi} = \frac{\sum \frac{1}{2}a^2 d\theta r \cdot \frac{2}{3}a\cos\theta}{\sum \frac{1}{2}a^2 d\theta r}$

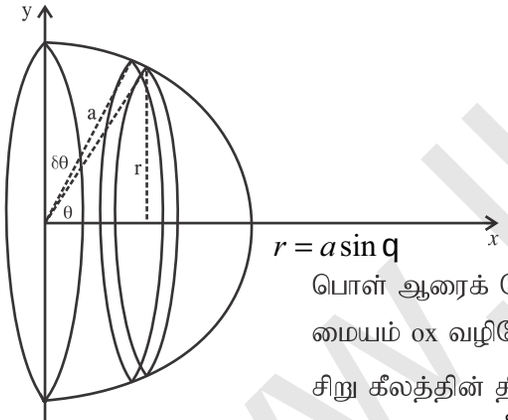
$$= \frac{\int_{-a}^{a} \frac{1}{2}a^2 r \cdot \frac{2}{3}a\cos\theta d\theta}{\int_{a}^{a} \frac{r}{2}a^2 d\theta}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}a\left[\sin\theta\right]_{-a}^{a}}{\left[\theta\right]_{-a}^{a}}$$

$$= \frac{2}{3}a\frac{\left[\sin a - \sin(-a)\right]}{(a-(-a))}$$

$$= \frac{2a}{3a}\sin a$$

03) a ஆரையுடைய பொன் அரைக்கோளமொன்றின் திணிவு மையம்.



$r = a\sin\theta$

பொள் ஆரைக் கோளம் ox வழியே சமச்சீர் ஆதலால் அதன் திணிவு மையம் ox வழியே இருக்கும். இதன் ஓரலகு பரப்படர்த்தி δ என்க.

சிறு கீலத்தின் திணிவு mi = 2πa Sinθ aδθρ

அதன் திணிவுமையம் xi = acos θ

பொட்கோளத்தின் திணிவுமையம் $\bar{x} = \frac{\sum mixi}{\sum mi} = \frac{\sum 2\pi a\, in\theta r\, d\theta . a\cos\theta}{\sum 2\pi a\sin\theta r\, .d\theta}$

$$= \frac{\int_{o}^{\pi/2} 2\pi a^2 \sin\theta . r\, .a\cos\theta\ d\theta}{\int_{o}^{\pi/2} 2\pi a^2 \sin\theta r\, .d\theta}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}\int_{o}^{\pi/2} \sin 2\theta\ do}{\int_{o}^{\pi/2} \sin\theta\, do}$$

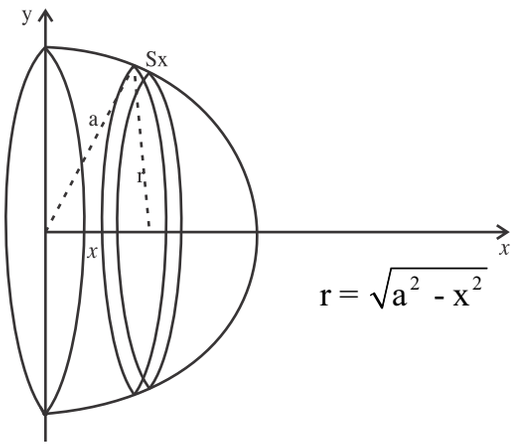
$$= \frac{\frac{a}{2}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{o}^{\pi/2}}{\left[-\cos\theta\right]_{o}^{\pi/2}}$$

$$= \frac{-\frac{a}{4}\left[\cos\pi - \cos 0\right]}{\left[\cos\pi/2 - \cos 0\right]}$$

$$= \frac{a}{2}$$

www.lkedu.lk

04) a ஆரையுடைய திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்றின் திணிவு மையம்.



திண்ம அரைக் கோளம் ox வழியே சமச்சீர் ஆதலால் அதன் தினிவு மையர் *ox* வழியே அமையும்.

இதன் அடர்த்தி δ என்க. $\quad mi = \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dxr$

சிறு மூலகத்தின் திணிவு $mi = x$

திண்ம அரைக்கோளத்தின் திணிவு மையம்

$$\bar{x} = \frac{\sum mixi}{\sum mi} = \frac{\sum p\left(a^2 - x^2\right)dxr\,x}{\sum p\left(a^2 - x^2\right)dxr}$$

$$= \frac{\int_0^a p\left(a^2 - x^2\right)xr\,.dx}{\int_0^a p\left(a^2 - x^2\right)r\,dx}$$

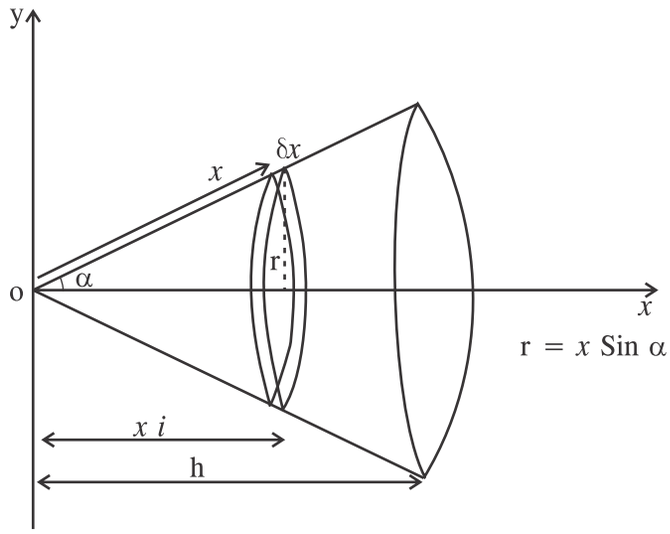
$$= \frac{\left[\frac{a^2x^2}{2}\right]_0^a - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\left[a^2x\right]_0^a - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a}$$

$$= \frac{\frac{a^2a^2}{2} - \frac{a^4}{4}}{a^2.a - \frac{a^3}{3}}$$

$$= \frac{3a}{8}$$

www.iledu.lk

05) h உயரமும் α அரை உச்சிக்கோணமும் உடைய பொட்கூம்பின் திணிவு மையம்



பொட்கூம்பு ox வழியே சமச்சீர் ஆதலால் அதன் திணிவு மையம் ox வழியே அமையும். இதன் அலகுப் பரப்படர்த்தி ρ என்க.

சிறுகீலத்தின் திணிவு $mi = 2\pi x \operatorname{Sin}\alpha\, \delta x\, \rho$

அதன் திணிவு மையம் $xi = x\cos\alpha$

பொட்கூம்பின் திணிவு மையம்

$$\bar{x} = \frac{\sum mixi}{\sum mi} = \frac{\sum 2\pi x \sin\alpha\, r\, dx.x\cos\alpha}{\sum 2\pi x \sin\alpha r\, dx}$$

$$= \frac{\int_o^{h\sec\alpha} 2\pi x \sin\alpha\, x.\cos\alpha\, dx}{\int_o^{h\sec\alpha} 2\pi x \sin\alpha\, r\, dx}$$

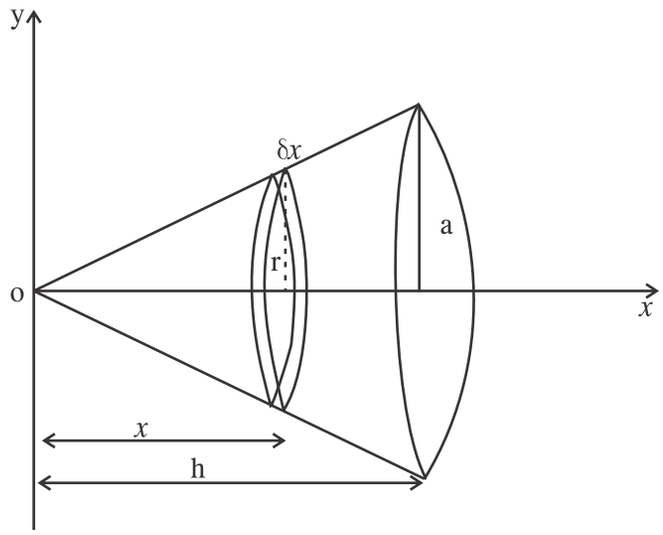
$$= \frac{\left[\frac{x^3}{3}\cos\alpha\right]_o^{h\sec\alpha}}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_o^{h\sec\alpha}}$$

$$= \frac{2h^3\sec^3\alpha.\cos\alpha}{3h^2\sec^2\alpha}$$

$$= \frac{2h}{3}$$

www.kodu.lk

06) a ஆரையும் h உயரமும் உடைய திண்மக்கூம்பு ஒன்றின் திணிவுமையம்



$$\frac{r}{a} = \frac{x}{h}$$

$$r = \frac{ax}{h}$$

திண்மக்கூம்பு ox வழியே சமச்சீர் ஆதலால் அதன் திணிவு மையம் ox வழியே அமையும். அதன் அர்த்தி ρ என்க.

சிறுகீலத்தின் திணிவு $mi = \rho\left(\frac{ax}{h}\right)^2 r\,dx$

அதன் திணிவு மையம் $xi - x$

திண்மக்கூம்பின் திணிவு மையம் $\bar{x} = \frac{\sum mixi}{\sum mi}$

$$= \frac{\sum \frac{\rho a^2 x^2}{h^2} dx r \,.x}{\sum \frac{\rho a^2 x^2}{h^2} dx r}$$

$$= \frac{\int_0^h \frac{\rho a^2 x^3 r\,dx}{h^2}}{\int_0^h \frac{\rho a^2 x^2}{h^2} r\,dx}$$

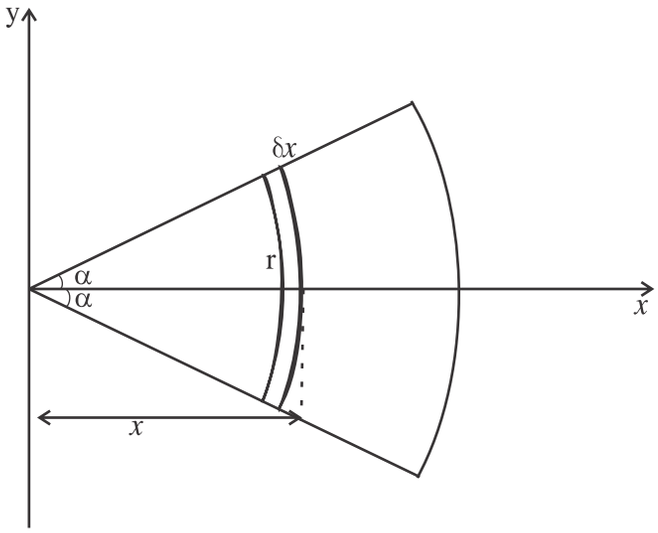
$$= \frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h}$$

$$= \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}}$$

$$= \frac{3}{4}h$$

www.kedu.lk

07) a ஆரையையும் மையத்தில் 2α கோணத்தை எதிரமைக்கின்றதுமான வில் ஒன்றின் திணிவு மையத்தை உபயோகித்து a ஆரையையும் மையத்தில் 2α கோணத்தை எதிரமைக்கின்றதுமான ஆரைச்சிறையின் திணிவுமையம்.



ஆரைச்சிறை ox வழியே சமச்சீர் ஆதலால் அதன் திணிவு மையம் ox வழியே அமையும். இதன் அலகுப் பரப்படர்த்தி ρ என்க.

சிறு கீலத்தின்திணிவு $mi = x(2\alpha)\delta x\rho$

அதன் திணிவு மையம் $xi = \dfrac{x\sin a}{a}$

ஆரைச்சிறையின் திணிவு மையம் $\bar{x} = \dfrac{\sum mixi}{\sum mi}$

$$= \frac{\sum 2xa\,dxr\,x\dfrac{\sin a}{a}}{\sum 2xa\,dxr}$$

$$= \frac{\int_0^a 2x^2 ar\,.\dfrac{\sin a}{a}\,dx}{\int_0^a 2xar\,.dx}$$

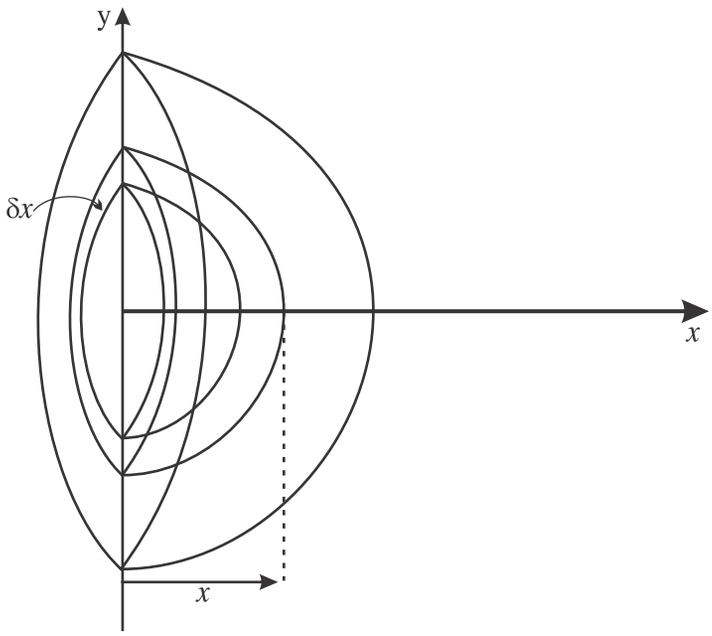
$$= \frac{\left[\dfrac{x^3}{3}\dfrac{\sin a}{a}\right]_0^a}{\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^a}$$

$$= \frac{\dfrac{a^3\sin a}{3a}}{\dfrac{a^2}{2}}$$

$$= \frac{2a\sin a}{3a}$$

www.lkedu.lk

09) a ஆரையுடைய பொன் அரைக்கோளத்தின் திணிவு மையத்தை உபயோகித்து α ஆரையுடைய திண்ம அரைக்கோளத்தின் திணிவுமையத்தைக் காணல்.



திண்மக்கூம்பு ox வழியே சமச்சீர் எனவே அதன் திணிவுமையம் ox வழியே அமையும். இதன் அடர்த்தி ρ என்க.

சிறு கீலத்தின் திணிவு $2\pi x^2 \rho\, dx$

இதன் திணிவு மையம் $xi = \frac{x}{2}$

திண்மக் கூம்பின் திணிவுமையம் $\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$

$$= \frac{\sum 2\pi x^2 \rho\, dx . \frac{x}{2}}{\sum 2\pi x^2 \rho\, dx}$$

$$= \frac{\int_0^a \pi x^3 \rho\, dx}{\int_0^a \pi 2x^2 \rho\, dx}$$

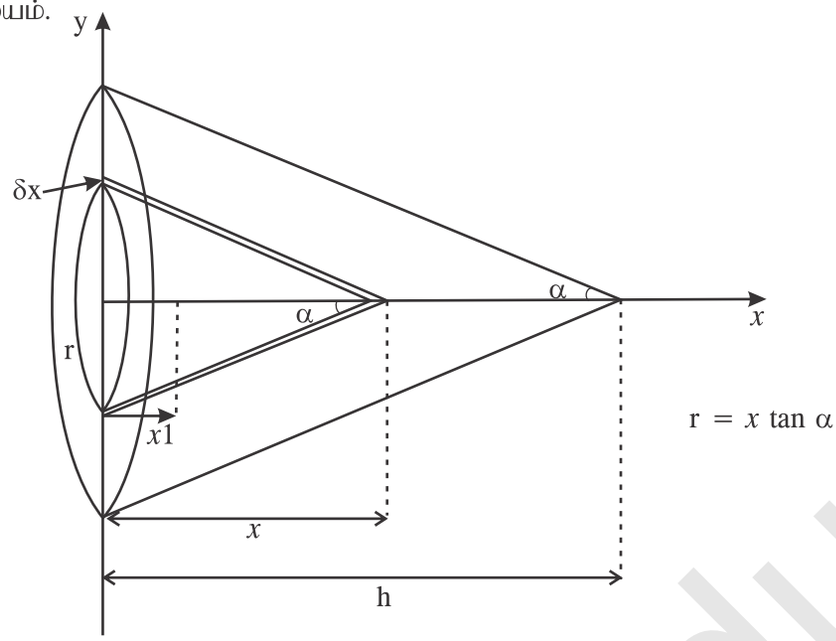
$$= \frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h}{\left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^h}$$

$$= \frac{h^4/4}{2h^3/3}$$

$$= \frac{3h}{8}$$

www.lkedu.lk

08) a ஆரையும் α அரை உச்சிக்கோணமும் உடைய பொருட்கூம்பு ஒன்றின் திணிவு மையத்தை உபயோகித்து a ஆரையும் α அரை உச்சிக்கோணமுடைய திண்மக் கூம்பு ஒன்றின் திணிவு மையம்.



திண்மக்கூம்பு ox வழியே சமச்சீர் எனவே அதன் திணிவுமையம் ox வழியே அமையும். இதன் அடர்த்தி ρ என்க.

சிறு கீலத்தின் திணிவு $Mi = \pi x \tan\alpha \,.x\sec\alpha.\,\delta x\rho$

இதன் திணிவு மையம் $xi = \frac{x}{3}$

திண்மக் கூம்பின் திணிவுமையம் $\bar{x} = \frac{\sum mixi}{\sum mi}$

$$= \frac{\sum \pi x^2 \tan\alpha.\sec\alpha\, dx \frac{x}{3}}{\sum \pi x^2 \tan\alpha.\sec\alpha\, dx}$$

$$= \frac{\int_0^h \frac{\pi x^3}{3} d\sec\alpha.\tan\alpha\, dx}{\int_o^h \pi x^2 \sec\alpha.\tan\alpha\, ddx}$$

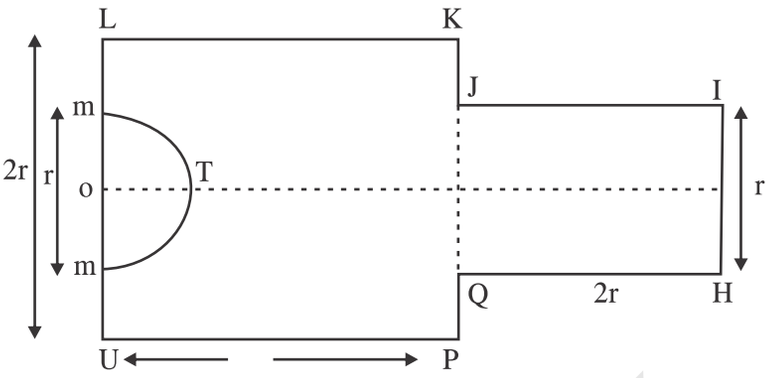
$$= \frac{\left[\frac{x4}{12}\right]_0^h}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h}$$

$$= \frac{\frac{h^4}{12}}{\frac{h^3}{3}}$$

$$= \frac{h}{4}$$

www.tkedu.lk

02) அருகேயுள்ள தளஅடர் S ஆனது ஒரு செவ்வகம் JIQH சதுரம் ULKP உடன் JQ உம் KP உம் அவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் பொருந்தி ஒரே கோட்டில் இருக்குமாறு விறைப்பாக இணைத்து UL உடன் நடுப்புள்ளி O மையம் இருக்கும் ஆரை $r/_2$ உடைய ஓர் அரைவட்டம் பிரதேசம் MTN ஐ அகற்றுவதன் மூலம் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. HI = r, PU = QH = 2 r என தரப்பட்டுள்ளது. அடர் s இன் திணிவுமையம் UL இலிருந்து Kr இல் இருக்கிறது எனக்காட்டுக? இங்கு $K = \frac{238}{3(48 - p)}$ அடர் OT வழியே சமச்சீர் அதன் திணிவுமையம் OT வழியே இருக்கும்.



பொருள்	திணிவு	LU ல் இலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தூரம்
J I Q H	$2\,r^2\,\rho$	3r
L K U H	$4\,r^2\,\rho$	r
$\frac{r}{2}$	$\frac{1}{2}p \times \frac{r^2}{4}r$	$\frac{4}{3\pi}\,\frac{r}{2} = \frac{2r}{3\pi}$
	$\left(6 - \frac{n}{8}\right)r^2 r$	$\bar{x}$

(இங்கு ρ - அடரின் அடர்த்தி)

LU $\left(6 - \frac{p}{8}\right)r^2 r\,\bar{x} = 2r^2 r\,(3r) + 4r^2 r \cdot r - \frac{1}{2}p\,\frac{r^2}{4}r \cdot \frac{2r}{3p}$

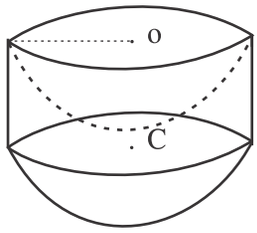
$\left(\frac{48 - p}{8}\right)\bar{x} = 10r - \frac{r}{12}$

$\bar{x} = \frac{119r \times 8}{12(48 - x)}$

$\bar{x} = \frac{238r}{3(48 - p)} = Kr$, இங்கு $K = \frac{238}{3(48 - p)}$

www.lkedu.lk

01) ஆரை r, உயரம் r, அடர்த்தி ρ ஆகியவற்றையுடைய ஒரு சீரான திண்ம செவ்வட்ட உருளையில் இருந்து ஆரை r ஐ உடைய திண்ம அரைக்கோளப்பகுதி நீக்கப்பட்டுள்ளது. இப்போது அருகே உள்ள உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு உருளையின் எஞ்சியிருக்கும் பகுதியின் வட்ட முகத்துடன் ஆரை r உம் அடர்த்தி kρ ஐயும் உடைய ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளத்தின் வட்டமுகம் அவற்றின் இருசமச்சீர் அச்சுக்களும் பொருந்தத்தக்கதாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறு ஆக்கப்படும் பொருள் δ இன் திணிவு மையம் அதன் சமச்சீரச்சின் மீது வளையத்தின் மையம் o இவிலிருந்து தூரம் $\frac{(11k+3)r}{4(2k+1)}$ இல் உள்ளது எனக்காட்டுக?



தொகுதி OC வழியே சமச்சீர் ஆதலால் அதன் திணிவுமையம் OC வழியே அமையும்

உருவம்	திணிவு	திணிவுடைமையம் (O இலிருந்து OC வழியே)
உருளை	$\pi r^3 \rho$	$r/2$
திண்ம அரை கோளம்	$2/3\ \pi r^3 \rho$	$3r/8$
எஞ்சிய பகுதி	$1/3\ \pi r^3 \rho$	$\bar{x}$

O⁄ $pr^3r \times \frac{r}{2} = \frac{2}{3}nr^3r \times \frac{3r}{8} + \frac{1}{3}pr^3r \times \bar{x}$

$\frac{r}{2} - \frac{r}{4} = \frac{\bar{x}}{3}$

$\bar{x} = \frac{3r}{4}$

உருவம்	திணிவு	திணிவுமையம் (O இலிருந்து x வழியே)
எஞ்சியபகுதி	$\frac{1}{3}pr^3r$	$\frac{3r}{4}$
திண்ம அரைகோளம்	$\frac{2}{3}pr^3kr$	$\frac{11r}{8}$
S	$\frac{pr^3}{3}r(1+2K)$	$\bar{x}$

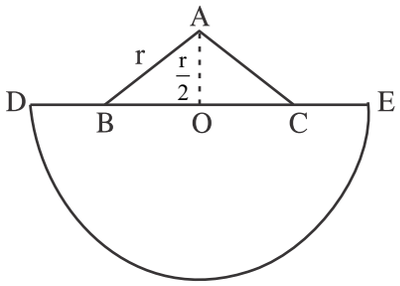
O‹ $\frac{pr^3d}{3}(1+2K) \times \bar{x} = \frac{1}{3}pr^3r \times \frac{3r}{4} + \frac{2}{3}pr^3Kr \times \frac{11r}{8}$

$(1+2K)\bar{x} = \frac{r}{4}[3+11K]$

$\bar{x} = \frac{r[11K+3]}{4(2K+1)}$

www.lkedu.lk

03) அருகில் உள்ள உருவில் AB, AC, DE ஆகியன ஓரலகு நீளத்தின் திணிவு ρ ஆகவுள்ள ஒரு மெல்லிய சீரானகம்பியில் இருந்து வெட்டப்பட்ட மூன்று நேர்கோட்டு துண்டுகளாகும். AB, AC ஆகிய இரு துண்டுகளும் Aல் ஒன்றோடொன்று உருக்கிணைக்கப்பட்டு பின்னர் B, C ஆகிய புள்ளிகளில் DE உடன் உருக்கிணைக்கப்பட்டுள்ளன. AB = Ac = r, DE = 2r, AO = $^{r}/_{2}$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது. O ஆனது BC, DE ஆகிய இரண்டிற்கும் நடுப்புள்ளிகள் ஆகும். மேலும் DFE ஆனது ஓரலகு நீளத்தின் திணிவு nρ ஆகவுள்ள ஒரு மெல்லிய சீரான கம்பியிலிருந்து செய்யப்பட்ட மையம் O ஐயும் ஆரை r உம் உடைய ஓர் அரைவட்ட வில்லாகும். இங்கு r(>O) ஓர் மாறிலி அரைவட்டக்கம்பி DFE, ABC இன் தளத்தில் D, E ஆகிய புள்ளிகளில் கம்பி DE உடன் உருக்கிணைப்பதன் மூலம் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள விறைப்பான தனக்கம்பிச்சட்டம் δ ஆக்கப்பட்டுள்ளது. δ இன் திணிவு மையம் A யிலிருந்து தூரம் $\left(\frac{\rho n+4n+3}{\rho n+4}\right)\frac{r}{2}$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.



பொருள்	திணிவு	A இலிருந்து AO வழியே திணிவுமையத்தூரம்
AC	rρ	$\frac{r}{4}$
AB	rρ	$\frac{r}{4}$
DE	2rρ	$\frac{r}{2}$
DFE	πrnρ	$\frac{r}{2}+\frac{2r}{\rho}$
கூட்டுப்பொருள்	[πn+4]rρ	$\bar{x}$

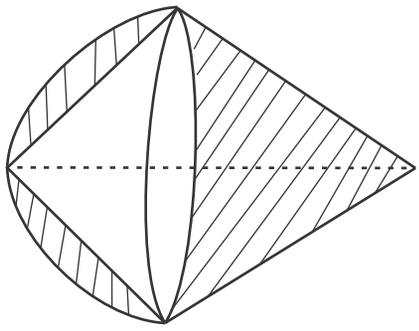
சமச்சீரின் படி δ இன் திணிவுமையம் A, O ஐ இணைக்கம் கோட்டின் வழியே இருக்கும் திணிவு மைய வரவிலக்கணப்படி

$$(4r\rho + \rho r n\, r)\bar{x} = 2r\rho \times \frac{r}{4} + 2r\rho \times \frac{r}{2} + \rho r n r \times \left(\frac{r}{2} + \frac{2r}{\rho}\right)$$

$$(4+\rho h)\bar{x} = \frac{r}{2} + r + \frac{\rho r n}{2} + 2rn$$

$$\bar{x} = \left(\frac{\rho n + 4n + 3}{\rho n + 4}\right)$$

04) திணிவு m ஐயும் ஆரை r ஐயும் மையம் O வையும் உடைய ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளத்திலிருந்து அடி ஆரை r ஐயும் உயரம் r ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வட்டக்கூம்பு C ஐ அகற்றுவதன் மூலம் பெறப்படும் திண்மம் R இனால் குறிக்கப்படுகின்றது எனக்கொள்வோம். Mன் சார்பில் R ன் திணிவையும் அதன் திணிவு மையத்தின் தானத்தையும் காண்க?



அடுத்ததாக திண்மக்கூம்பு C திண்மம் R உடன் இணைக்கப்பட்டு உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சேர்த்திப்பொருள் S ஆக்கப்படுகிறது. C இன் அடியின் வட்டவிளிம்பு P ஓரத்துடன் ஓரத்தின் மையம் O ஆனது Cன் அடியின் மையத்துடன் பொருந்துமாறு விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

சேர்த்திப்பொருள் S ன் புவியீர்ப்புமையம் G ஆனது அதன் சமச்சீரச்சு அதன் அடியின் பொதுமையம் O இலிருந்து தூரம் $\frac{r}{8}$ இல் உள்ளதெனக் காட்டுக?

சமச்சீரின்படி R இன் திணிவு மையம் OA இல் இருக்கும்

உருவம் திணிவு O இலிருந்து OA வழியே திணிவுமையத்தூரம்

அரைக்கோளத்தின் திணிவு $= \frac{2}{8}\pi r^3 \rho = M$

கூம்பின் திணிவு $= \frac{1}{3}\pi r^3 \rho = \frac{M}{2}$

R இன் திணிவு $= M - \frac{M}{2}$

$= \frac{M}{2}$

உருவம்	திணிவு	O இலிருந்து OA வழியே திணிவு மையத்தூரம்
O A	M	$\frac{3}{8}r$
▷	$\frac{M}{2}$	$\frac{1}{4}r$
A (R)	$\frac{M}{2}$	$\bar{x}$

O ஐ $\frac{M}{2}$, $\bar{x} = M \times \frac{3}{8}r - \frac{M}{2}, \frac{1}{4}r$

$\bar{x} = \frac{r}{4}$

உருவம்	திணிவு	V இலிருந்து திணிவு மையத்தூரம்
◜	$\frac{M}{2}$	$\frac{3r}{2}$
▷	$\frac{M}{2}$	$\frac{3r}{4}$
V	M	$\bar{x}$

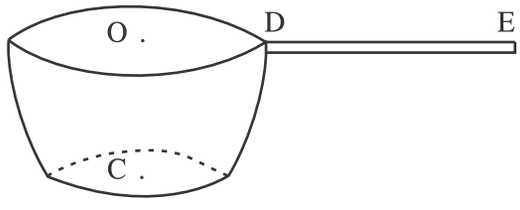
$V : M\bar{x} = \frac{M}{2}, \frac{3r}{2} + \frac{M}{2}, \frac{3r}{4}$

$\bar{x} = \frac{9r}{8}$

O விலிருந்து திணிவு மையம் $= \frac{9r}{8} - r$

$= \frac{r}{8}$

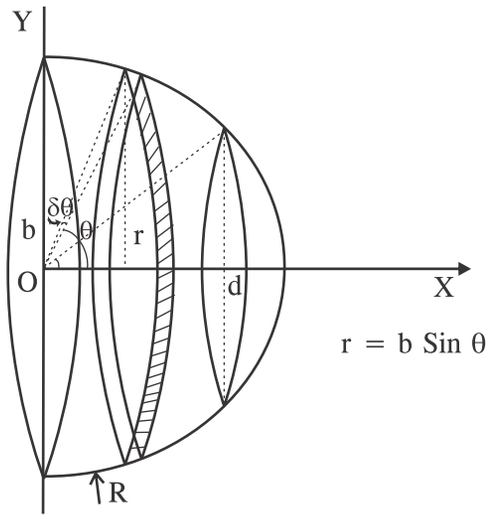
05) b ஆரையும் ρ பரப்படர்த்தியையும் உடைய ஒரு சீரான பொள் அரைக்கோள ஓட்டினை அதன் வட்ட விளிம்பிற்கு சமாந்தரமானதும் மையம் O இலிருந்து bcos γ இல் உள்ளதுமான ஒரு தளத்தினால் வெட்டுவதன் மூலம் பெறப்படும் ஓட்டின் திணிவுமையம் C இலிருந்து $\frac{b\cos r}{2}$ தூரத்தில் இருக்கின்றதெனக்காட்டுக? இங்கு C ஆனது சிறிய வட்டவிளிம்பின் மையமாகும்.



ஆரை bsin r ஐயும் அதே பரப்படர்த்தி δ உம் உடைய ஒரு மெல்லிய சீரான வட்டத்தட்டின் ஓரத்தை மேற் குறித்த அடித்துண்டின் சிறிய வட்டவிளிம்புடன் விறைப் பாக பொருத்தி ஒரே கிண்ணம் செய்யப்பட்டுள்ளது. இக்கிண்ணத்தின் புவியீர்ப்புமையம் DC மீது O இலிருந்து தூரம் $\frac{1+\cos\theta-\cos^2\theta}{1+2\cos\theta-\cos^2\theta}$ ல் உள்ளது எனக் காட்டுக?

www.lkedu.lk

$a = \frac{p}{3}$ எனவும் கிண்ணத்தின் நிறை w எனவும் கொள்வோம். நீளம் V ஐயும் நிறை w ஐயும் உடைய சீரான கோல் ED ஐ உருவில் காட்டியவாறு O, D, E ஒரே நேர்கோட்டில் இருக்குமாறு ஒரு கைபிடியாகக் கிண்ணத்தின் விளிம்புடன் விறைப்பாக பொருத்தி ஒரு சோஸ்பான் செய்யப்பட்டுள்ளது. சோஸ் பானின் புவியீர்ப்புமையத்தை காண்க?



$r = b \operatorname{Sin} \theta$

R இன் திணிவு $= \sum mi$

$= \sum 2\pi b \sin\theta . b\, d\theta . r$

$= \int_0^{\pi/2} 2\pi b^2 r \sin\theta \, d\theta$

$= 2\pi b^2 d \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi/2}$

$= 2nb^2 r \left[-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 \right]$

$= 2\pi b^2 \cos 0\, r$

சமச்சீரின்படி கோள ஓட்டின் திணிவுமையம் OC வழியே இருக்கும் சிறுகீலத்தின் (வளையம்) திணிவு $mi = 2\pi b \operatorname{Sin}\theta\, b\, \delta\theta\rho$

அதன் திணிவு மையத்தானம் $xi = b\cos\theta$

ஓட்டின் திணிவு மையம் $\bar{x} = \frac{\sum mixi}{\sum mi}$

$= \frac{\sum 2\pi b \sin\theta . b d\theta . r . b\cos\theta}{\sum 2\pi b \sin\theta . b d\theta . r}$

$\bar{x} = \frac{\int_0^{\pi/2} 2\pi b \sin\theta . b\, r . b\cos\theta . d\theta}{\int_0^{\pi/2} 2\pi b \sin\theta . b\, r . d\theta}$

$= \frac{\frac{b}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta}$

$= \frac{\frac{b}{2}\left[\frac{-\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2}}{\left[-\cos\theta \right]_0^{\pi/2}}$

$= \frac{\frac{b}{4}\left[-\cos\pi + \cos 2(0) \right]}{\left[-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 \right]}$

$= \frac{\frac{b}{4}\left[1 + 2\cos^2 0 - 1 \right]}{\cos 0}$

$= \frac{b}{2}\cos 0$

www.tkedu.lk

பொருள்	நிறை	O விலிருந்து OC வழியேயான புவியீர்ப்பு மையத்தூரம்
R	$2\pi b^2 r \cos\alpha$	$\frac{b}{2}\cos\alpha$
வட்டத்தட்டு	$\pi b^2 \sin^2\alpha r \alpha$	$b\cos\alpha$
சேர்த்திப்பொருள் (S)	$(\sin^2\alpha + 2\cos\alpha) r b^2 r \alpha$	$\bar{x}$

சமச்சீரின்படி S இன் புவியீர்ப்புமையம் OC வழியே இருக்கும்.

$OC \curvearrowright \quad (\sin^2\alpha + 2\cos\alpha)\pi b^2 r \alpha \times \bar{x} = \pi b^2 \sin^2\alpha r \alpha \times b\cos\alpha + 2\pi b^2 r \cos\alpha \alpha \times \frac{b\cos\alpha}{2}$

$$\bar{x} = \frac{b\cos\alpha\left[\cos\alpha + \sin^2\alpha\right]}{2\cos\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{b\cos\alpha\left[1 + \cos\alpha - \cos^2\alpha\right]}{\left[1 + 2\cos\alpha - \cos^2\alpha\right]}$$

$\alpha = \pi/3$ ஆக $\quad \bar{x} = \dfrac{b\cos\pi/3\left[1 + \cos\frac{\pi}{3} - \cos^2\frac{\pi}{3}\right]}{2\cos\alpha + \sin^2\alpha}$

$$= \frac{b}{2}\frac{\left[1 + 1/2 - \frac{1}{4}\right]}{1 + 2\times\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{5b}{14}$$

பொருள்	நிறை	DE ல் இருந்தான தூரம்	OC இருந்ததான தூரம்
S	W	$\frac{5b}{14}$	o
DE	$\frac{w}{4}$	o	$b + \frac{c}{2}$
சோஸ்பான்	$\frac{5w}{4}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$

$OC \curvearrowright \quad \frac{5w}{4} \times \bar{x} = w \times \frac{5b}{14} + \frac{w}{4} \times o$

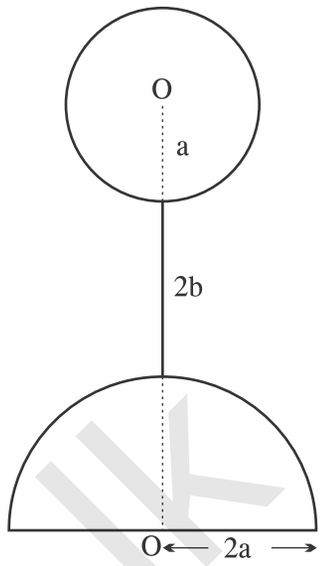
$$= \bar{x} = \frac{2b}{7}$$

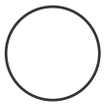
$DE \curvearrowright \quad \frac{5w}{4} \times \bar{y} = w \times o + \frac{w}{4}\left(b + \frac{c}{2}\right)$

$$\bar{y} = \frac{2b + c}{10}$$

www.ikedu.lk

06) ஒரே சீரான திரவியத்தாலான திண்ம அரைக்கோளத்தையும் திண்ம கோளத்தையும் 2b நீளமும் m திணிவும் உள்ள ஒரு சீரான கோலின் இருமுனைகளிலும் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு, அரைக் கோளத் தின் சமச்சீரச்சு, கோல், கோளத்தின் மையம் என்பன ஒரே நேர் கோட்டில் இருக்குமாறு விறைப்பாக மூட்டுவதன் மூலம் ஒரு சேர்த் திப்பொருள் செய்யப்படுகிறது. கோளத்தின் ஆரை a உம் அரைக் கோளத்தின் ஆரை 2da உம் ஆகும். சேர்த்திப் பொருளின் திணி வுமையம் அரைக்கோளத்தின் அடியின் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{1}{6}(8a+3b)$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக?

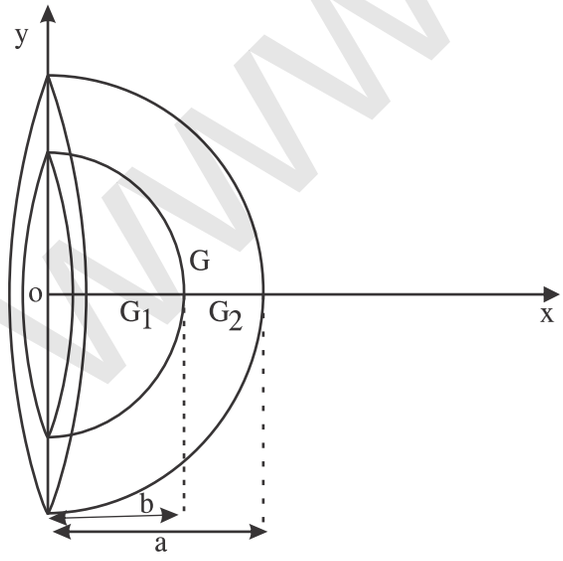


உருவம்	திணிவு	அடி O இலிருந்து திணிவு மையம்
	$\frac{4}{3}pa^3r = m$	$3a+2b$
	$\frac{2}{3}p(2a)^3r = 4m$	$\frac{3}{8}(2a)=\frac{3a}{4}$
	m	$2a+b$
தொகுதி	$6m$	$\bar{y}$

தொகுதி OC பற்றி சமச்சீர் ஆதலால் அதன் திணிவு மையம் OC வழியே அமையும்.

$$6m\bar{y} = mc(3a+2b)+4m' \frac{3a}{4}+m(2a+b)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{6}(8a+3b)$$



a ஆரையுள்ள திண்ம அரைக்கோளத்தின் திணிவு மையம் $OG_1 = \frac{3a}{8}$

b ஆரையுள்ள திண்ம அரைக்கோளத்தின் திணிவு மையம் $OG_2 = \frac{3b}{8}$

கோள ஓட்டின் திணிவு மையம் $OG = \bar{x}$

www.lkedu.lk

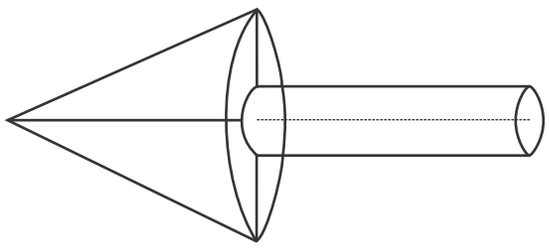
கோள ஓடு ox பற்றி சமச்சீர் அதன் திணிவு மையம் ox வழியே அமையும்.

$$\text{o)}\ \frac{2}{3}\pi\left(b^3-a^3\right)\rho\,\bar{x}=\frac{2}{3}\pi b^3\rho\times\left(\frac{3b}{8}\right)-\frac{2}{3}\pi a^3\rho\times\left(\frac{2a}{3}\right)$$

$$\bar{x}=\frac{3}{8}\frac{(b-a)(b+a)\left(a^2+b^2\right)}{(b-a)\left(b^2+ba+a^2\right)}$$

$$\bar{x}=\frac{3}{8}\frac{(a+b)\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2+ab+b^2\right)}$$

08)



உருவில் காணப்படுகின்றவாறு சீரான ஒரு திண்ம சேர்த்திப்பொருள் ஒருமிக்க நிலைப் படுத்தப்பட்ட அடி ஆரை 3a உம் உயரம் h ஐயும் உடைய திண்மக்கூம்பையும் ஆரை a உம் உயரம் 2h உம் உடைய ஒரு செவ்வட்ட உருளையும் கொண்டுள்ளது. சேர்த்திப் பொருளின் திணிவு மையம் சமச்சீரச்சுமீது, கூம்பின் உச்சியிலிருந்து தூரம் $\frac{5h}{4}$ ல் இருக்கிறது எனக் காட்டுக?

உருவம்	திணிவு	O இலிருந்து OC வழியே திணிவு மையத்தூரம்
கூம்பு	$\frac{1}{3}\pi(3a)^2h\rho$	$\frac{3h}{4}$
உருளை	$\pi a^2(2h)\rho$	$h+h=2h$
சோத்திப் பொருள்	$5\pi a^2h\rho$	$\bar{x}$

சேர்த்திப் பொருள் OC வழியே சமச்சீராதலால் அதன் திணிவு மையம் OC வழியே அமையும்.

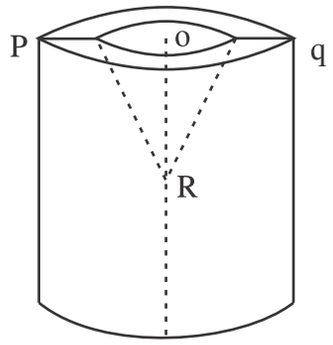
$$\text{O)}\ 5\pi a^2h\rho\times\bar{x}=3\pi a^2h\rho\times\frac{3h}{4}+2\pi a^2h\rho\times 2h$$

$$\bar{x}=\frac{25h}{4\times 5}$$

$$\bar{x}=\frac{5}{4}h$$

www.ikedu.lk

09) ஆரை R(>r) ஐயும் உயரம் H(>h) ஐயும் உடைய ஒரு சீரான திண்ம செவ்வட்ட உருளைக் குற்றியுள் ஒரு கூம்பு பொள்ளை ஆக்குவதன் மூலம் அடி ஆரை r ஐயும் உயரம் h ஐயும் உடைய செவ்வட்ட கூம்பிற்கான அச்சு தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. கூம்புப் பொருளின் சமச்சீரச்சு உருளைக்குற்றியின் சமச்சீரச்சுடன் ஒன்று படுகிறது. தயாரிக்கப்பட்டுள்ள அச்சு உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள வாறாகும். விட்டம் PQ இலிருந்து அச்சின் புவியீர்ப்பு மையத்துக்கான தூரத்தைக் காண்க?



வடிவம்	திணிவு	O இலிருந்து OR வழியே திணிவு மையத்தூரம்
உருளை	$\rho R^2 H r$	$H/2$
கூம்பு	$\frac{1}{3}\rho r^2 h$	$h/4$
அச்சு	$\frac{\rho}{3}(3R^2H - r^2h)$	$\bar{x}$

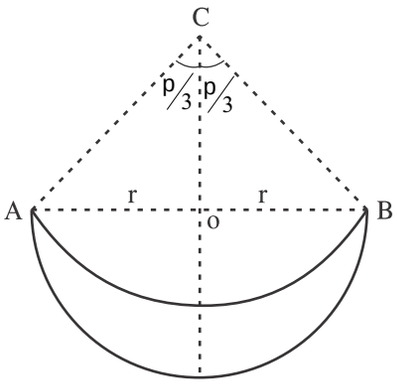
இங்கு δ திண்மத்தின் அடர்த்தி

அச்சு OR வழியே சமச்சீர் எனவே அதன் திணிவு மையம் OR வழியே அமையும்.

$$O) \quad \frac{\rho}{3}(3R^2H - r^2h)\bar{x} = \rho R^2 H r \times \frac{H}{2} - \frac{1}{3}\rho r^2 h r \times \frac{h}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{6R^2H^2 - r^2h^2}{4(3R^2H - r^2h)}$$

10) பிறையுரு வடிவ சீர் அடர் ஒன்று மையம் O ஐயும் ஆரை r ஐயும் உடைய ஓர் அரைவட்டத்தினாலும் அதன் மையம் Cல் கோணம் $2\rho/3$ ஐ எதிரமைக்கும் ஓர் வட்டவில்லினாலும் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு வரைபுற்றுள்ளது. இவ்வடரின் திணிவு மையம் C இலிருந்து தூரம் krல் உள்ளதெனக் காட்டுக?



இங்கு $k = \frac{3\sqrt{3}\,\rho}{\rho + 6\sqrt{3}}$

பிறை OC வழியே சமச்சீர் அதன் திணிவு மையம் OC வழியே அமையும் ρ அடரின் அடர்த்தி.

உருவம்	திணிவு	C இலிருந்து CO வழியே திணிவு மையத்தூரம்
அரைவட்ட அடர்	$\frac{1}{2}\rho r^2 r$	$\frac{r.}{\sqrt{3}} + \frac{4r}{3\rho}$
முக்கோணஅடர்	$\frac{1}{2}(2r)\acute{}\ \frac{r}{\sqrt{3}} r = \frac{r^2}{\sqrt{3}} r$	$\frac{2r}{3\sqrt{3}}$
$\frac{2\rho}{3}$ கோணமுடைய ஆரைச்சிறை	$\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \left(\frac{2\rho}{3}\right) r = \frac{4\rho r^2 r}{9}$	$\frac{2r}{\rho}$
பிறை	$\frac{\rho r^2 r}{2} + \frac{r^2 r}{\sqrt{3}} - \frac{4\rho r^2 r}{9}$	$\bar{x}$
	$= r^2\left(\frac{\rho}{18} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) r$	

www.keau.lk

C) $\frac{r^2\pi}{18\sqrt{3}}(\sqrt{3}\pi+18)\times\bar{x}=\frac{1}{2}\pi r^2(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{4}{3\pi})r\pi+\frac{r^2}{\sqrt{3}}\pi\times\frac{2r}{3\sqrt{3}}-4\pi r^2\pi\times\frac{2r}{\pi}$

$\frac{r^2}{18\sqrt{3}}(\sqrt{3}\pi+18)\bar{x}=\pi\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\frac{8}{9}\right)$

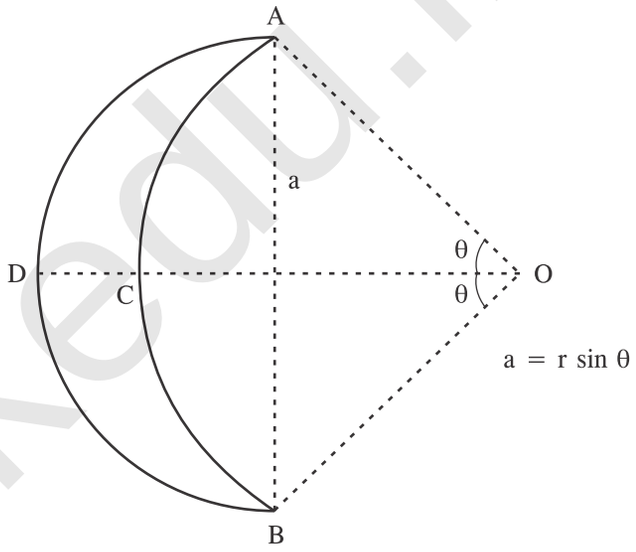
$\bar{x}=\frac{\pi\pi}{2\sqrt{3}}\ \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{3}\pi+18}$

$=\frac{9\pi\pi}{\sqrt{3}\,\pi+18}$

$=\frac{3\sqrt{3}\pi r}{\pi+6\sqrt{3}}$

$=k\pi$

11) சீரான ஒரே கம்பியின் இரு துண்டுகளில் ஒன்று அரைவட்டமாக மற்றையது 2 θ (<π) எனும் கோணத்தை மையத்தில் அமைக்கின்ற வட்ட வடிவவில்லாகவும் அமைந்திருக்க இரண்டு ஒரு பிறைவடிவத்தை உண்டாக்கும் வண்ணம் வைக் கப்பட்டுள்ளன. இப்பிறையின் புவியீர்ப்பு மைய மானது உட்பக்கவில்லில் இருப்பின் θ ஆனது 2 Sin θ (1+Sinθ) = 2θ + π (sin(s) (1 - cos θ) எனும் சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்துகின்றது எனக் காட்டுக?



கூட்டுடல் OCD வழியே சமச்சீர் ஆதலால் அதன் திணிவு மையம் OCD வழியே அமையும் ρ கம்பி யின் அலகு நீள அடர்த்தி

உருவம்	திணிவு	C விலிருந்து COD வழியேயான திணிவு மையத்தூரம்
ADB	$\pi r Sin\pi r$	$\frac{r\,Sin\pi Sin\pi/2}{\pi/2}+r\,Cos\theta$ $=\frac{2r\,Sin\pi}{\pi}+r\,Cos\pi$
ACD	$2r\pi r$	$\frac{rSin\pi}{\pi}$
கூட்டுடல்	$(\pi\ Sin\pi+2\pi)r$	$\bar{x}$

$$(p Sin\theta + 2\theta) r\, d\bar{x} = pr\,Sin\theta r\left[\frac{2r Sin\theta}{p} + r\cos\theta\right] + 2r\theta r \cdot \frac{r Sin\theta}{\theta}$$

$$\bar{x} = \frac{[2\sin^2\theta + p\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta]r}{p\sin\theta + 2\theta}$$

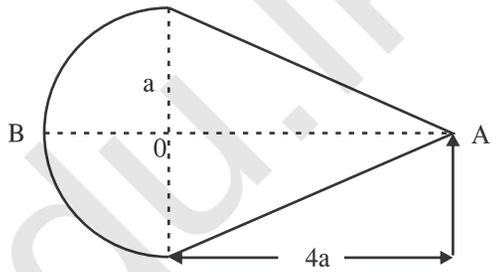
கூட்டுடலின் திணிவுமையம் ACB இல் இருப்பதால் $\bar{x} = r$

$$\frac{[2Sin^2\theta + pSin\theta\cos\theta + 2\sin\theta]r}{pSin\theta + 2\theta} = r$$

$$2Sin\theta(1 + Sin\theta) + p\sin\theta\cos\theta = pSin\theta + 2\theta$$

$$2Sin\theta(1 + Sin\theta) = 2\theta + pSin\theta(1 - \cos\theta)$$

12) ஒரு திண்மக்கூம்பானது அடர்த்தி ρ ஐயும் ஆரை a ஐயும் உயரம் 4a ஐயும் உடையது. இக்கூம்பானது ஆரை o உம் அடர்த்தி σ உம் உடைய ஒரு அரைக்கோளத்துடன் தளமுகங்கள் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. முழுத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்புமையமானது பொதுத் தளபரப்பிலிருந்து $\frac{a}{8}\left[\frac{16r - 3s}{2r + s}\right]$ தூரத்தில் உள்ளதெனக் காட்டுக?



கூட்டுடல் OA வழியே சமச்சீர் ஆதலால் அதன் திணிவுமையம் OA வழியே இருக்கும்.

உருவம்	திணிவு	O இலிருந்து OA வழியே திணிவு மையத்தூரம்
திண்ம அரைக்கோளம்	$\frac{2}{3}\pi a^3\sigma = 2\sigma k$	$\frac{-3a}{8}$
திண்மக்கூம்பு	$\frac{1}{3}\pi a^2 .4a\rho = 4\rho k$	a
கூட்டுடல்	$2(\sigma + 2\rho)k$	$\bar{x}$

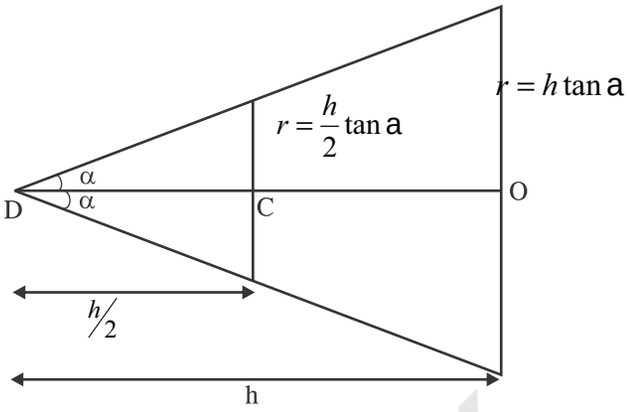
இங்கு $\frac{1}{3}\pi a^2 = k$

01) $$2(\sigma + 2\rho)k \times \bar{x} = -2\sigma k \times \frac{3a}{8} + 4\rho k \times a$$

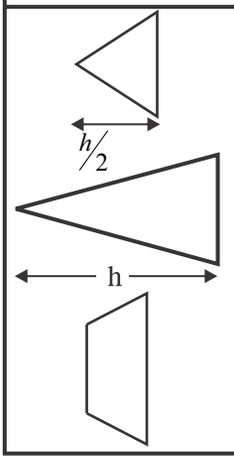
$$2(2\rho + \sigma)\bar{x} = \frac{16\rho - 3\sigma}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{a(16\rho - 3\sigma)}{8(2\rho + \sigma)}$$

13) α அரை உச்சிக்கோணமும் h உயரமும் உடைய செவ்வட்ட திண்மக்கூம்பின் அடிக்கு சமாந்தரமான தளத்தினால் உச்சியில் இருந்து $\frac{1}{2}$ h தூரத்தில் வெட்டுவதால் கூம்பிக் துண்டம் பெறப்படுகிறது பெரிய தள அடியில் இருந்து இத்துண்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையத் தூரம் $\frac{11}{56}h$ எனக்காட்டுக?



அடித்துண்டு OC வழியே சமச்சீர் ஆதலால் அதன் திணிவுமையம் OC வழியே இருக்கும். இக்கூம்பின் அடர்த்தி ρ என்க.

உருவம்	திணிவு	O விலிருந்து OD வழியேயான திணிவு மையத்தூரம்
	$\frac{1}{3}\rho(\frac{h}{2}\tan a)^2 r\ \frac{h}{2} = \frac{k}{8}$ $\frac{1}{3}\rho(\frac{h}{2}\tan a)^2 hr$ $= \frac{1}{3}\rho h^3 \tan^2 a r = k$ $\frac{7k}{8}$	$\frac{h}{2} + \frac{1}{4} x \frac{h}{2} = \frac{5h}{8}$ $\frac{h}{4}$ $\bar{x}$

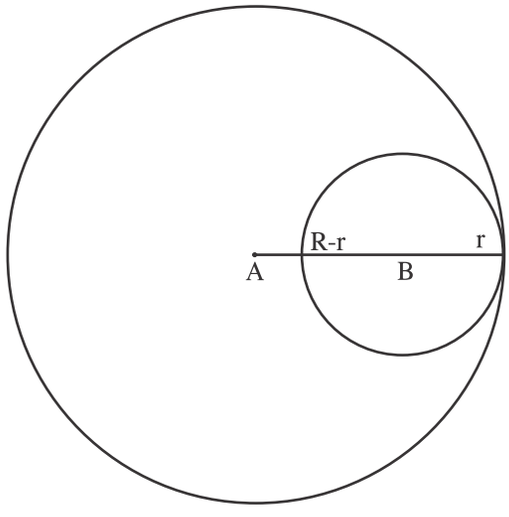
இங்கு $K = \frac{\rho h^3 \tan^2 a r}{3}$

ரO $\frac{7k}{8} x \bar{x} = k x \frac{h}{4} - \frac{k}{8} x \frac{5h}{8}$

$\frac{7\bar{x}}{8} = \frac{(16-5)h}{64}$

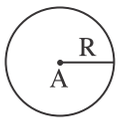
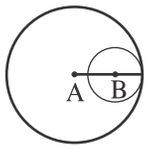
$\bar{x} = \frac{11}{56}h$

14) A ஐ மையமாகவும் R ஐ ஆரையாகவும் உடைய சீரான வட்ட அடரில் இருந்து B ஐ மையமாகவும் r ஐ ஆரையாகவும் உடைய துளை வெட்டி அகற்றப் படுகிறது. இங்கு r<R, AB = R-r ஆகவும் துளை யிடப்பட்ட அடரின் புவியீர்ப்புமையம் A இலிருந்து $\frac{4r}{9}$ தூரத்திலும் இருப்பின் $R = \frac{5r}{4}$ எனக்காட்டுக?



அடர் AB வழியே சமச்சீர் ஆதலால் அதன் திணிவுமையம் AB வழியே அமையும் ρ அடரின் அலகு பரப்படர்த்தி.

www.lkedu.lk

உருவம்	திணிவு	A விலிருந்து AB வழியேயான திணிவு மையம்
	pR^2r	O
	pr^2r	R - r
	$p(R^2 - r^2)r$	$\bar{c}$

A $pR^2r\,o = pr^2r\,(R - r) + p(R^2 - r^2)r \times \bar{c}$

$$o = p(R - r)\,r\,[r^2 + (R + r)\,\bar{c}]$$

$$\bar{c} = \frac{-r^2}{r + R}$$

அடரின் திணிவுமையம் A இலிருந்து $\frac{4r}{q}$ தூரத்தில் இருப்பதால்

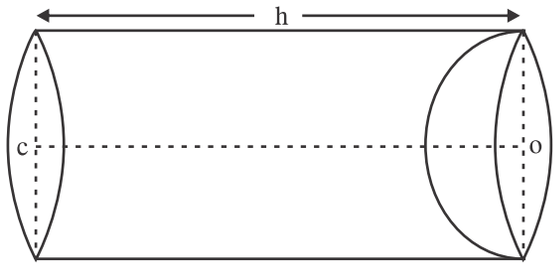
$$-\bar{c} = \frac{4r}{q}$$

$$\frac{r^2}{r + R} = \frac{4r}{q}$$

$$qr = 4(r + R)$$

$$R = \frac{5r}{4}$$

15) உயரம் h உம் அடி ஆரை a உடைய சீரான திண்ம செவ்வட்ட உருளை ஒன்றின் ஒரு முனையில், r ஆரை கொண்ட அரைக்கோள வடிவமான துளை யொன்று குடைந்து அகற்றப்பட்டு பாத்திரமொன்று அமைக்கப்பட்டுள்ளது. பாத்திரத்தின் அடியில் இருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் ஈர்வைமையம் காணப் படும் எனக் காண்க?



$h = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)a$ எனில், பாத்திரத்தின் ஈர்வைமையம், அகற்றப்பட்ட அரைக்கோளத்தின் வளை பரப்பின் மீது அமையும் எனக் காட்டுக?

செவ்வட்ட உருளையின் அடர்த்தி ρ என்க.
பாத்திரம் OC வழியே சமச்சீர் ஆதலால் அதன் திணிவு மையம் OC வழியே அமையும்

www.lkedu.lk

உருவம்	திணிவு	O வீலிருந்து OC வழியேயான திணிவு மையத்தூரம்
	$pa^2 h r$	$h/2$
	$\frac{2}{3} pa^3 r$	$3a/8$
	$\frac{pa^2}{3}(3h - 2a)r$	$\bar{c}$

O) $\frac{pa^2}{3}(3h - 2a)r \times \bar{c} = p a^2 h r \times h/2 - \frac{2}{3} p a^3 r \times \frac{39}{8}$

$$(3h - 2a)\bar{c} = \frac{3h^2}{2} - \frac{3a^2}{4}$$

$$\bar{c} = \frac{3(2h^2 - a^2)}{4(3h - 2a)}$$

பாத்திரத்தின் ஈர்வைமையம் கோளமேற்பரப்பின் வளைபரப்பில் இருப்பதால் $\bar{c} = a$ ஆகும்

$$\frac{3(2h^2 - a^2)}{4(3h - 2a)} = a$$

$$6h^2 - 3a^2 = 12h - 8a^2$$

$$6h^2 - 12ah + 5a^2 = 0$$

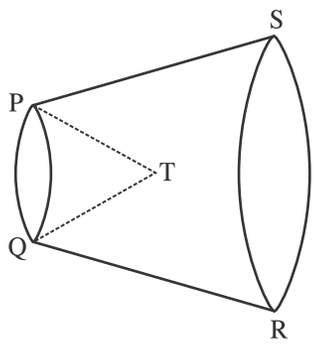
$$6(h - a)^2 - a^2 = 0$$

$$(\sqrt{6}(h - a) - a)[\sqrt{6}(h - a) + a] = 0$$

$$h = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)a \text{ or } h = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)a$$

but $h > a$ $\quad h = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)a$

16) அருகில் தரப்பட்டுள்ள உருவில் PQRS ஆனது ஒரு செவ்வட்ட கூம்பின் உயரம் h ஐ உடைய அடித்துண்டின் வடிவத்தில் உள்ள அடர்த்தி ρ உடைய ஒரு சீர்த்திண்மப்பொருள் வகைக்குறிக்கின்றது. அதன் வட்டத்தளமுகங்களின் விட்டங்கள் Pq = 2kr, RS = 2r ஆகும். இங்கு K ஒரு பரமானமும் $O < K < I$ உம் ஆகும். அதன் திணிவு $\frac{1}{3} s p r^2 h(1 + k + k^2)$

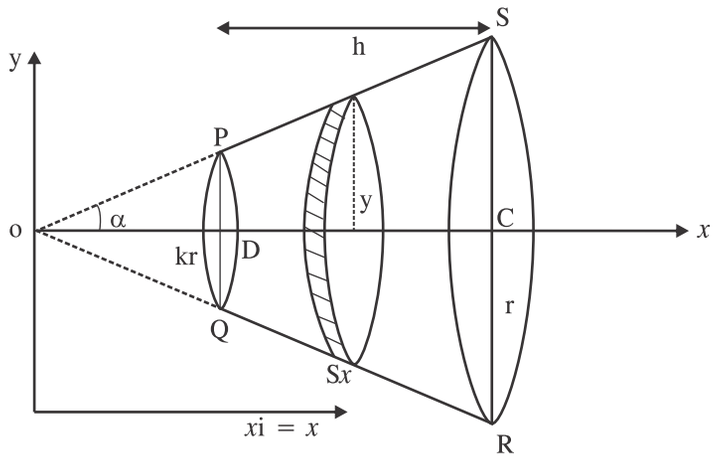


எனவும் அதன் திணிவு மையம் G ஆனது சிறிய முகத்தின் மையத்தில் இருந்து தூரம் $\frac{h(3 + 2k + k^2)}{4(1 + k + k^2)}$ இல் உள்ளது என தொகையிடலால் காட்டுக?

www.lkedu.lk

அடி ஆரை r உம் உயரம் h உம் உடைய கூம்பின் திணிவு மையத்தை உய்தறிக?

அடி ஆரை ka உம் உயரம் $h/2$ உம் உடைய திண்மக்கூம்பு PTQ ஐ குடைவதன் மூலம் ஒரு திண்மப் பொருள் I பெறப்படுகிறது. I இன் திணிவுமையத்தானம் G ஐக்கண்டு G ஆனது T உடன் ஒன்றுபட மாட்டாது என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க?



ΔODP ல் $\tan\alpha = \dfrac{kr}{OD}$

$OD = kr.\cot\alpha$

ΔOCS ல் $\tan\alpha = \dfrac{r}{OC} \Rightarrow OC = r\cot\alpha$

$CD = OC - OD$

$h = r\cot\alpha - kr\cot\alpha$

$r\cot\alpha = \dfrac{h}{1-k}$

சிறுகீலத்தின் திணிவு $m_i = \pi y^2 dx\rho$

$= \pi (x\tan\alpha)^2 dx\rho$

அடித்துண்டின் திணிவு $m = \Sigma m_i$

$= \Sigma\pi x^2 \tan^2\alpha\, dx\rho$

$= \alpha \int_{Kr\cot\alpha}^{r\cot\alpha} \pi\rho r^2 \tan^2\alpha\, x^2\, dx$

$= \pi\rho r^2 \tan^2\alpha \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{Kr\cot\alpha}^{r\cot\alpha}$

$= \dfrac{\pi\rho}{3}\tan^2\alpha[r^3\cot^3\alpha - k^3r^3\cot^3\alpha]$

$= \dfrac{\pi\rho}{3}\cot\alpha r^3(1-k^3)$

$= \dfrac{\pi\rho}{3}\dfrac{h}{(1-k)r} r^3(1-k)(1+k+k^2)$

$= \dfrac{\pi\rho}{3}h(1+k+k^2)r^2$

www.lkedu.lk

அடித்துண்டின் O இலிருந்தான திணிவுமையத்தூரம் x என்க

$$\Sigma m_i x_i = Mx$$

$$\int_{kr\cot\alpha}^{r\cot\alpha} \rho x^2 \tan^2\alpha \, dx \, x = Mx$$

$$\int_{kr\cot\alpha}^{r\cot\alpha} \rho x^3 \tan^2\alpha \, dx = \frac{\pi r h}{3}(1+k+k^2)r^2 x_1$$

$$\tan^2\alpha \left[\frac{x^4}{4}\right]_{kr\cot\alpha}^{r\cot\alpha} = \frac{h}{3}(1+k+k^2)\, r^2 \, x_1$$

$$\frac{\tan^2\alpha}{4}[r^4\cot^4\alpha - k^4 r^4 \cot^4\alpha] = \frac{h}{3}(1+k+k^2)x_1$$

$$\frac{\cot^2\alpha}{4}(1-k^4)r^2 = \frac{h}{3}(1+k+k2)x_1$$

$$\frac{h^2}{4r^2(1-k)^2}(1+k)(1-k)(1+k^2)r^2 = \frac{h}{3}(1+k+k^2)x_1$$

$$x_1 = \frac{3h(1+k)(1+k^2)}{4(1-k)(1+k+k^2)}$$

D இலிருந்து அடித்துண்டின் திணிவுமையத்தூரம் $= x_1 - kr\cot\alpha$

$$= \frac{3h(1+k)(1+k^2)}{4(1-k)(1+k+k^2)} - Kr\frac{h}{(1-k)r}$$

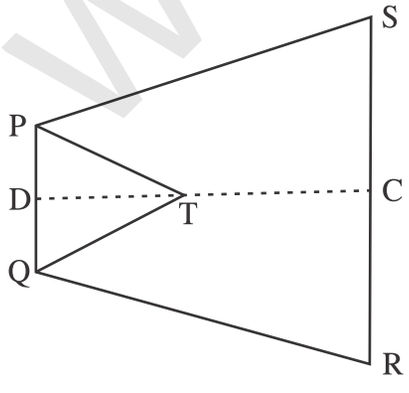
$$= \frac{h[3(k^3+k^2+k+1) - 4k(1+k+k^2)}{4(1-k)(1+k+k^2)}$$

$$= \frac{h(3-k-k^2-k^3)}{4(1-k)(1+k+k^2)}$$

$$= \frac{h(1-k)(k^2+2k+3)}{4(1-k)(1+k+k^2)}$$

$$= \frac{h(k^2+2k+3)}{4(1+k+k^2)}$$

$K \to 0$ ஆக h உயரமும் r ஆரையும் உடைய கூம்பின் திணிவுமையம் $= \frac{3h}{4}$



உருவம்	திணிவு	D யிலிருந்து DC வழியேயான திணிவு மையத்தூரம்
PQRS	$\frac{\pi r h}{3}(1+k+k^2)r^2$	$\frac{h(k^2+2k+3)}{4(1+k+k^2)}$
PQT	$\frac{1}{3}\pi(kr)^2\frac{h}{2}r$	$\frac{h}{8}$
எஞ்சிய பகுதி	$\frac{\pi r hr^2}{6}[k^2+2k+2]$	$\bar{x}$

www.lkedu.lk

D)

$$\frac{pr\,hr^2}{6}[k^2+2k+2]\bar{c} = \frac{pr\,h}{3}[1+k+k^2]r^2 x \frac{h(k^2+2k+3)}{4(1+k+k2)} - \frac{1}{6}pk^2r^2h\ r\,x\frac{h}{8}$$

$$\bar{c} = \frac{\frac{h}{48}[4(3+23k^2)}{\frac{1}{6}\left(K^2+2K+2\right)}$$

$$\bar{c} = \frac{h(12+8k+3k^2)}{8(2+2k+k^2)}$$

Gi º r எனின் $\bar{c} = \frac{h}{2}$

$$\frac{h(12+8k+3k^2)}{8(2+2k+k^2)} = \frac{h}{2}$$

$$12+8k+3k^2 = 4\,(2+2k+k^2)$$

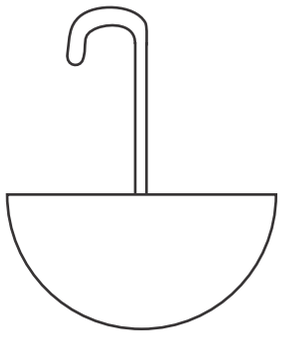
$$k^2 = 4$$

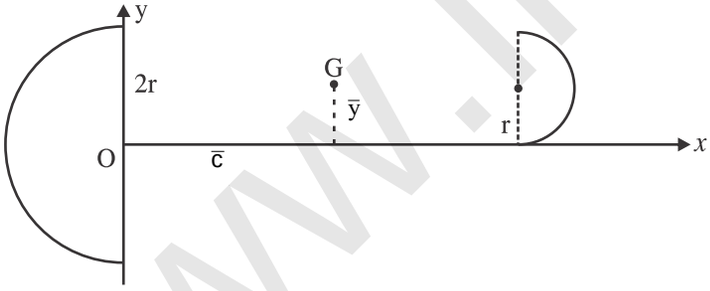
$$k = 2$$

ஆனால் இது தரவிற்கு முரனானது (\ o < k < l)

\ G_1 r உடன் பொருந்தாது

17) ஆரை 2r ஐயும் திணிவு m ஐயும் சீரான அடருடன் ஒரு கைபிடியை தொடுத்து உருவில் உள்ள பொருள் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. நீளம் 4r உம் திணிவு mம் உடைய ஒரு சீர்க்கோலையும் ஆரை r ஐயும் திணிவு m உம் உடைய ஒரு சீரான அரைவட்ட வில்லையும் கைபிடி கொண்டுள்ளது. பொருளின் ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க?





உருவம்	திணிவு	OX அச்சிலிருந்து திணிவு மையதூரம்	OY அச்சிலிருந்து திணிவு மையதூரம்
அரைவட்ட அடர்	m	O	$\frac{-4r}{3p}$
கோல்	m	O	2r
அரைவட்டவில்	m	r	$4r+\frac{2r}{p}$
பொருள்	3m	$\bar{y}$	$\bar{c}$

www.ikedu.lk

$ox)\ \ 3mx\bar{y} = mxo + mxo + mxr$

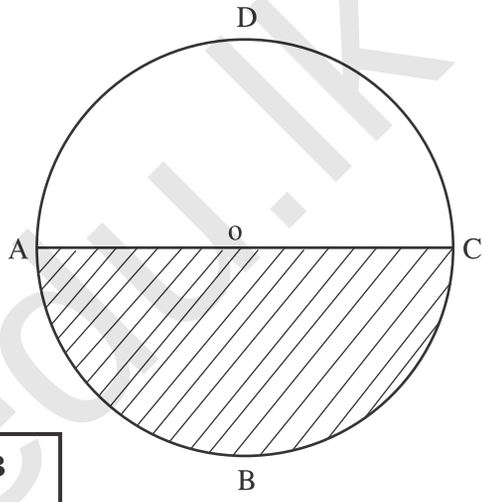
$$\bar{y} = \frac{r}{3}$$

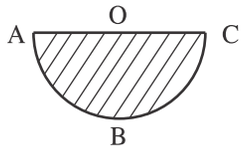
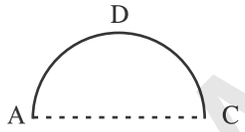
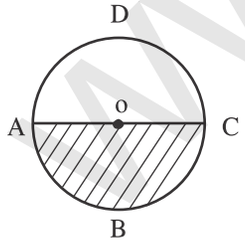
$oy)\ \ 3m\bar{c} = m\left(\frac{4r}{3p}\right) + mx2r + m\left(4r + \frac{2r}{p}\right)$

$$\bar{c} = \frac{-4r}{9p} + \frac{2r}{3} + \frac{4r}{3} + \frac{2r}{3p}$$

$$\bar{c} = 2r + \frac{2r}{9p}$$

18) உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சேர்த்திப்பொருள் ஆரை o ஐ உடைய ஒரு மெல்லிய அரைவட்ட அடர் ABC யினாலும் ஒரு மெல்லிய அரைவட்ட கம்பி ADC இனாலும் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. o ஆனது வட்டத்தின் மையம் ஆகும். அடர் செய்யப்பட்டுள்ள திரவியத்தின் பரப்படர்த்தி ρ ஆகவும் கம்பி செய்யப்பட்டுள்ள திரவியத்தின் நேர்கோட்டு அடர்த்தி n ஆகவும் இருப்பின், o இலிருந்து சேர்த்திப் பொருளின் திணிவு மையத் தூரத்தைக் காண்க?



உருவம்	திணிவு	O இலிருந்து OB வழியேயான திணிவு மையத்தூரம்
	$\frac{1}{2}\rho a^2 r$	$\frac{4a}{3p}$
	ρan	$\frac{-2a}{p}$
	$\frac{\rho a}{2}(ar + 2n)$	$\bar{y}$

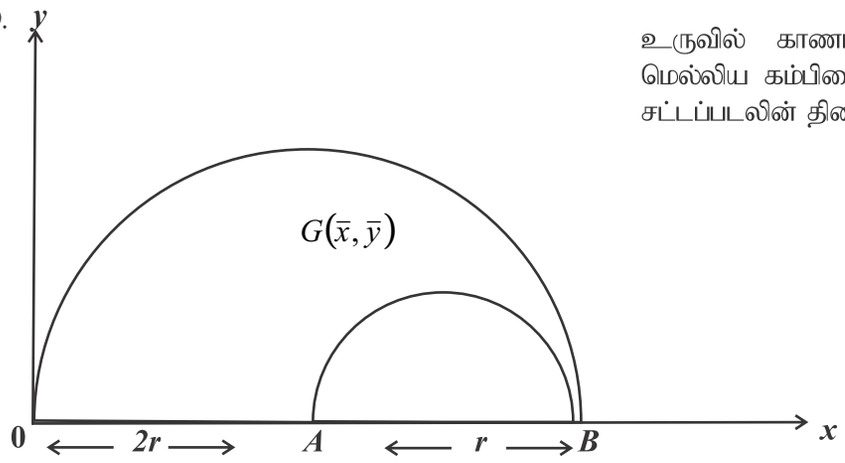
$ADC\ )\ \ \frac{\rho a}{2}(ar + 2n)\bar{y} = \frac{1}{2}\rho a^2 r \times \frac{4a}{3p} - \rho an \times \frac{2a}{p}$

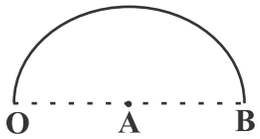
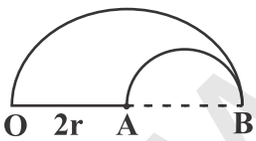
$$(ar + 2n)\bar{y} = \frac{4a^2 r}{3n} - \frac{4an}{p}$$

$$\bar{y} = \frac{4a(ar - 3n)}{3p(ar + 2n)}$$

www.lkedu.lk

19. உருவில் காணப்படும் சட்டப்படல் ஒரு சீரான மெல்லிய கம்பியை வளைத்து செய்யப்பட்டுள்ளது. சட்டப்படலின் திணிவுமையம் $G(\bar{x}, \bar{y})$ ஐக் காண்க?



பொருள்	திணிவு	x அச்சிலிருந்து தூரம்	y அச்சிலிருந்து தூரம்
	$2\pi r\rho$	$\frac{4r}{\pi}$	$2r$
	$\pi r r$	$\frac{2r}{\pi}$	$3r$
	$2rr$	o	r
	$3\pi rr + 2rr$	$\bar{y}$	$\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{2r \times 2\pi rr + 3r\pi rr + 2rr \times r}{3\pi rr + 2rr}$$

$$= \frac{7\pi r + 2r}{3\pi + 2}$$

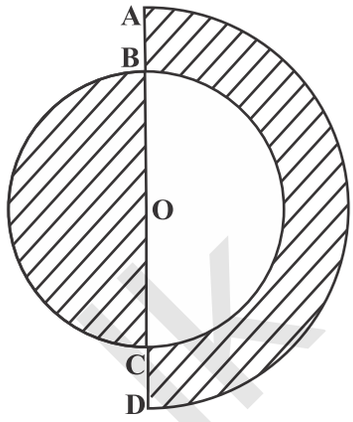
$$\bar{y} = \frac{2\pi rr \times \frac{4r}{\pi} + \pi rr \times \frac{2r}{\pi}}{3\pi rr + 2rr}$$

$$= \frac{10r}{3\pi + 2}$$

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{(7\pi + 2)r}{3\pi + 2}, \frac{10r}{3\pi + 2}\right)$$

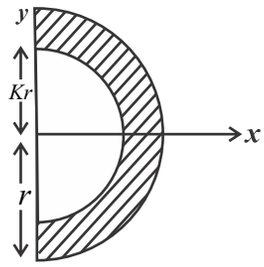
www.lkedu.lk

20) மையம் O ஐயும் ஆரை r ஐயும் உடைய திண்ம அரைக்கோளத்தில் இருந்து ஆரை nr (n<1) ஐ உடைய, புள்ளி O ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தை அகற்றும் போது எஞ்சியிருக்கும் பொருளின் திணிவு மையத்திற்கு O இலிருந்து உள்ள தூரம் $\frac{3r(1+n^2)(1+n)}{8(1+n+n^2)}$ எனக்காட்டுக?



அகற்றிய திண்ம அரைக்கோளப்பகுதியை உருவில் உள்ளவாறு எஞ்சிய பகுதியுடன் இணைத்து ஒரேசேர்த்திப்பொருள் செய்யப்படுகிறது. அகற்றிய பகுதியின் திணிவு மொத்தத் திணிவு n^3 எனக்காட்டுக?

சேர்த்திப் பொருளின் திணிவு மையத்திற்கு O இலிருந்து உள்ள தூரத்தைக் காண்க.



திண்ம அரைக்கோளத்தில் அடர்த்தி δ சமச்சீரினால் திணிவு மையம் OX மீது உள்ளது.

பொருள்	திணிவு	Oவிலிருந்து திணிவு மையத்திற்குள்ள தூரம்
அரைக்கோளம்	$\frac{2}{3}\pi r^3\delta$	$\frac{3r}{8}$
அகற்றிய அரைக் கோளம்	$\frac{2}{3}\pi(nr)^3\delta$	$\frac{3nr}{8}$
எஞ்சியபகுதி	$\frac{2}{3}\pi r\delta(1-n^3)$	$\bar{x}$

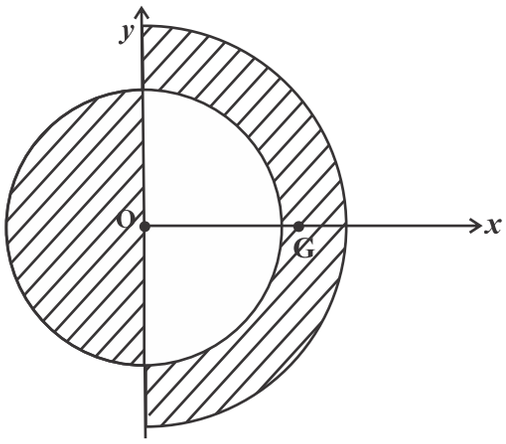
$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3\delta.\frac{3r}{8} - \frac{2}{3}\pi n^{-3}r^3\delta.\frac{3nr}{8}}{\frac{2}{3}nr^3\delta(1-n^3)}$$

$$= \frac{3r(1-n^4)}{8(1-n^3)}$$

$$= \frac{3r(1+n^2)(1+n)(1-n)}{8(1+n´\,n^2)(1-n)} = \frac{3r(1+n^2)(1+n)}{8(1+n+n^2)}$$

www.ikedu.lk

திணிவு மையம் $G.^{o}\ (\bar{x}, \bar{y})$ எனக்கொள்வோம். அகற்றிய பகுதியை உருவில் உள்ளவாறு இணைக்கும் போது அது OX பற்றி சமச்சீரானது ஆகையால் $\bar{y} = 0$



அகற்றிய பகுதியின் திணிவு m எனவும் r ஆரையுடைய அரைக்கோளத்தின் திணிவு M எனக் கொள் வோம்.

$$\frac{m}{M} = \frac{\frac{2p}{3} n^3 r^3 d}{\frac{2p}{3} . r^3 d}$$

$$= n^3$$

$$m = Mn^3$$

சேர்த்திப்பொருளின் திணிவு மையத்திற்கு Oவிலிருந்து உள்ள தூரம் $\bar{x}$ ஆகும்.

$$\bar{x}_1 = \frac{(M - m)\bar{x} + m(-\frac{3}{8}nr)}{(M - m) + m}$$

மேலும் $(M - m)\bar{x} = M\left(\frac{3r}{8}\right) - m\left(\frac{3nr}{8}\right)$ ஆகையால்

$$\bar{x}_1 = \frac{M\left(\frac{3r}{8}\right) - m\left(\frac{3nr}{8}\right) - m\frac{3nr}{8}}{M}$$

$$= \frac{3r}{8}\frac{(M - 2mn)}{M}$$

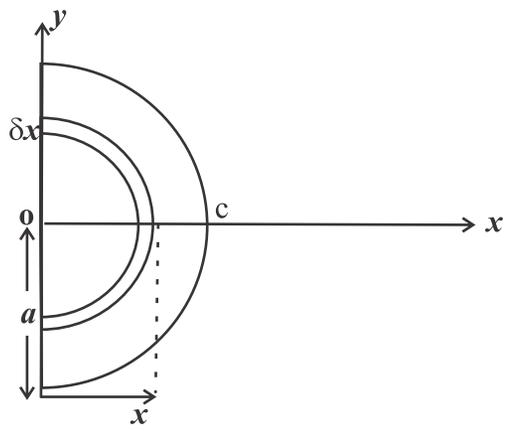
$$= \frac{3r}{8}\left(1 - \frac{2m}{M}n\right)$$

$$= \frac{3r}{8}\left(1 - 2n^4\right)$$

∴ சேர்த்திப்பொருளின் திணிவு மையத்திற்கு O இருந்து உள்ள தூரம் $= \frac{3a}{8}\left(1 - 2n^4\right)$

www.tkedu.lk

21. a ஆரையுடைய மெல்லிய வட்டத்தட்டு ஒன்று விட்டத்தினால் இரண்டாக வெட்டப்படுகிறது. இதன் ஓரலகு பரப்பின் திணிவு Pr. P ஓர் மாறிலி. r மையத்திலிருந்துள்ள தூரம் ஆகும். வட்டத்தட்டின் ஒரு பாதியினது திணிவு மையத்தூரத்தைக் காண்க?



வட்டத்தட்டு oc வழியே சமச்சீராதலால் அதன் திணிவுமையம் oc வழியே அமையும். சிறுகீலத்தின் திணிவு

$mi = \pi r\,dx\,r\,x$

அதன் திணிவு மையம் $x_1 = \dfrac{x \sin \pi/2}{\pi/2}$

$= \dfrac{2x}{\pi}$

வட்டத்தட்டின் திணிவு மையம் $\bar{x} = \dfrac{\sum mi\,xi}{\sum mi}$

$= \dfrac{\sum \pi x\,dx\,r\,x.\frac{2x}{\pi}}{\sum \pi x\,dx\,r\,x}$

$= \dfrac{\frac{2}{\pi}\int_0^a \pi x^3 r\,dx}{\int_0^a \pi x^2 r\,dx}$

$\therefore = \dfrac{\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a}$

$= \dfrac{\frac{2}{\pi}\left[\frac{a^4}{4}\right]}{\left[\frac{a^3}{3}\right]}$

$= \dfrac{3a}{2\pi}$

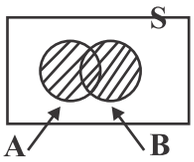
www.tkedu.lk

நிகழ்தகவு

01. மாதிரி வெளி $\Rightarrow S, \Omega$ எனக் குறிக்கப்படும்.

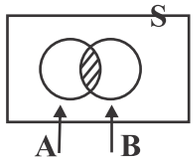
02. i) ஒன்றிப்பு நிகழ்ச்சி

$A \cup B = \{c / c \in A \text{ or } c \in B\}$



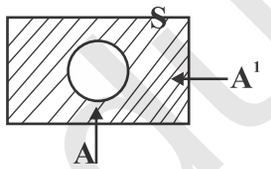
ii) இடைவெளி நிகழ்ச்சி

$A \cap B = \{c / c \in A \text{ and } c \in B\}$



iii) நிரப்பி நிகழ்ச்சி

$A^1 = \{c / c \notin A \text{ and } c \in S\}$



03. யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் எனின்

$P(A \cup B \cup C) = 1$

$P(A \cup B) = 1$

04. தம்முள் புறநீங்கும் நிகழ்ச்சிகள்

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

05. நிகழ்ச்சி வெளியில் உள்ள நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை

2^n

06. மாதிரி வெளி S இல் உள்ள A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு P(A) ஆனது

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

07. அட்சர கணித விதிகள்

S என்னும் மாதிரி வெளியில் A, B, C என்பன 3 நிகழ்ச்சிகளாகும்.

i) $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$ } பரிவர்த்தனை விதி

ii) $(A \cap B) \cap C = (A \cap B) \cap C$
$(A \cup B) \cup C = (A \cup B) \cup C$ } தொகுப்பு விதி

iii) $A \cap (B \cup C) \; (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ } பரம்பல் விதி

www.lkedu.lk

iv) $(A \cap B)^1 = A^1 \cup B^1$

$(A \cup B)^1 = A^1 \cap B^1$

08. $P(A \cap B^1) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A^1 \cap B^1) = 1 - P(A \cup B)$

$P(A^1 \cup B^1) = 1 - P(A \cap B)$

09. A, B என்பன மாதிரி வெளியில் இரு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.
ACB ஆகும் போது $P(A) \leq P(B)$ ஆகும்.

10. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(P \cap B \cap C)$

11. நிபந்தனை விதி

B என்னும் நிகழ்ச்சி நடைபெற்று முடிந்த பின் A எனும் நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு.

$$R\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$R\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{R(A \cap B)}{R(B)}$$

12. சாரா நிகழ்ச்சி

$$R(A \cap B) = R(A)\,R(B)$$

$$R(A \cap B \cap C) = R(A).R(B).R(C)$$

13. மொத்த நிகழ்தகவுத் தோற்றம்

B_1, B_2, B_3 .... Bn என்பன S இன் பிரிப்புகளாகவும் A என்பது அதில் ஒரு நிகழ்ச்சியாகவும் இருப்பின் A யின் நிகழ்தகவு

$$R(A) = \sum_{z=1}^{n} R\left(\frac{A}{B_i}\right) R(B_i)$$

14. Bayes theorem.

$$R\left(\frac{B_i}{A}\right) = \frac{R(A / B_i).\,R(B_i)}{R(A)}$$

01. A, B என்பன $R(A) = \frac{1}{3}, R(B) = \frac{1}{2}, R(A \cap B) = \frac{1}{8}$ ஆகுமாறு உள்ளன. எனின் பின்வருவனவற்றைக் காண்க?

i) $R(A \cup B)$ ii) $R(A^1)$ iii) $R(B^1)$

iv) $R(A \cap B^1)$ v) $R(B \cap A^1)$ vi) $R(A^1 \cap B^1)$

www.lkedu.lk

i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$

$= \frac{8+12-3}{24}$

$= \frac{17}{24}$

ii) $P(A^1) = 1 - P(A)$

$= 1 - \frac{1}{3}$

$= \frac{2}{3}$

iii) $P(B^1) = 1 - P(A)$

$= 1 - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$

iv) $P(A \cap B^1) = P(A) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{8}$

$= \frac{5}{24}$

v) $P(B \cap A^1) = P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$

$= \frac{3}{8}$

vi) $P(A^1 \cap B^1) = P(A \cup B)^1$

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \frac{17}{24}$

$= \frac{7}{24}$

www.lkedu.lk

02. $P(A \cup B) = \frac{3}{4}, P(A) = \frac{3}{5}$ எனத் தரப்படும் போது P(B) இன் பெறுமானத்தை பின்வரும் வகைகளில் காண்க?

i) A, B தம்முள் புறநீங்குபவையாக உள்ள போது
ii) A, B சாராதனவாக உள்ள போது
iii) $P(A/B) = 0.7$ எனின்

i) $R(A \cap B) = \frac{3}{4}$, $R(A) = \frac{3}{5}$, $R(B)$

$R(A \cup B) = R(A) + R(B)$

$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} + R(B)$

$R(B) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}$

$R(B) = \frac{3}{20}$

ii) $R(A \cap B) = R(A)R(B)$

$R(A \cup B) = R(A) + R(B) - R(A \cap B)$

$R(A \cup B) = R(A) + R(B) - R(A)R(B)$

$\frac{3}{4} = \frac{3}{5} + R(B) - \frac{3}{5} R(B)$

$\frac{3}{20} = \frac{2}{5} R(B)$

$R(B) = \frac{3}{20} \times \frac{5}{2}$

$= \frac{3}{8}$

iii) $R\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{R(A \cap B)}{R(B)}$

$0.7 = \frac{R(A \cap B)}{R(B)}$

$R(A \cap B) = 0.7\, R(B)$

$R(A \cup B) = R(A) + R(B) - R(A \cap B)$

$0.75 = 0.6 + R(B) - 0.7\, R(B)$

$0.15 = 0.3\, R(B)$

$R(B) = \frac{1}{2}$

www.lkedu.lk

03. உத்தரவாதம் வழங்கப்பட்ட கால எல்லையினுள் இரு மின் உபகரணங்கள் A, B என்பன பழுதடைவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.3, 0.4 ஆகும். உத்தரவாதம் வழங்கப்பட்ட கால எல்லையினுள் குறைந்தது இவற்றில் ஒன்று பழுதடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.5 ஆகும். இக்கால எல்லையினுள்

i) அவ்விரு உபகரணங்களும் பழுதடைவதற்கான

ii) ஒரு உபகரணம் மாத்திரம் பழுதடைவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?

$P(A) = 0.3,\ P(B) = 0.4\ ,\ P(A \cup B) = 0.5$

i) $R(A \cap B) = R(A) + R(B) - R(A \cup B)$
$= 0.3 + 0.4 - 0.5$
$= 0.2$

ii) $R(A \cap B^1) = R(A) - R(A \cap B)$
$= 0.3 - 0.2$
$= 0.1$

iii) $R(B \cap A^1) = R(B) - R(A \cap B)$
$= 0.4 - 0.1$
$= 0.3$

ஒரு உபகரணம் மட்டும் பழுதடைவதற்கான நிகழ்தகவு $= 0.1 + 0.3$
$= 0.4$

04. A, B என்பன மாதிரிவெளி S இல் உள்ள இரு சாரா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். $R(A \cup B) = \frac{5}{6}$, $R(A) = \frac{1}{2}$ எனின் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

i) $R(B)$ ii) $R(A \cap B)$ iii) $R\left(\frac{B}{A}\right) = R(B)$ எனக் காட்டுக.

i)
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$
$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{2} P(B)$
$\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} P(B)$
$P(B) = \frac{1}{3}$

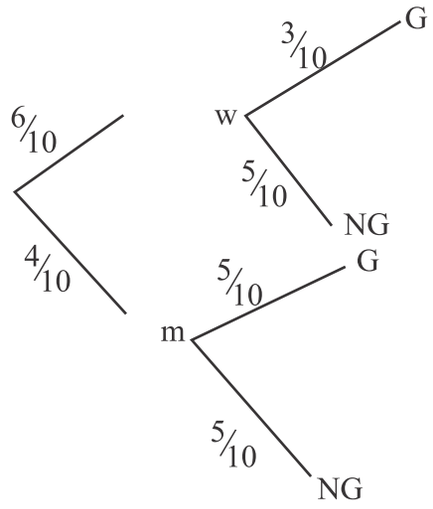
ii) $R(A \cap B) = R(A).R(B)$
$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$
$= \frac{1}{6}$

iii) $R\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{R(A \cap B)}{R(A)}$
$= \frac{R(A).R(B)}{R(A)}$
$= R(B)$

www.lkedu.lk

05. ஒரு நகரத்தில் உள்ள சனத்தொகையில் 60% ஆனோர் பெண்கள். 30% ஆன பெண்களும் 50% ஆன ஆண்களும் அரசாங்க உத்தியோகத்தர்கள் ஆவர். அந்த நகரத்தில் இருந்து எழுமாற்றாக ஒருவரைத் தெரிவுசெய்யும் போது அவர் அரசாங்க உத்தியோகத்தர் எனில் அவர் ஆணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

i) W - Women
M - Men
G - Government Sector
NG - Non Government Sector



$$P(G) = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10}$$
$$= \frac{38}{100}$$
$$\text{விடை} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10}}{\frac{38}{100}} = \frac{20}{38} = \frac{10}{19}$$

06. A, B என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகள் $P(A) = x + 0.2, P(B) = 2x + 0.1, P(A \cap B) = x$ ஆகுமாறு உள்ளது.

i) $P(A \cup B) = 0.7$ எனின் x இனைக் காண்க.

ii) A, B சாராதவை என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க?

iii) $R\left(A/B^1\right)$ ஐ காண்க?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0.7 = c + 0.2 + 2c + 0.1 - c$$
$$0.7 = 3c + 0.3 - c$$
$$0.7 = 2c + 0.3$$
$$2c = 0.4$$
$$c = 0.2$$

$$R(A) = 0.4, R(B) = 0.5$$
$$R(A \cap B) = 0.2$$
$$R(A).R(B) = 0.4 \times 0.5$$
$$= 0.2$$

$$R(A \cap B) = R(A).R(B)$$

எனவே A, B என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

$$R\left(A/B^1\right) = \frac{R(A \cap B^1)}{R(B^1)} = \frac{R(A) - R(A \cap B)}{1 - R(B)}$$
$$= \frac{0.4 - 0.2}{1 - 0.5}$$
$$= \frac{0.2}{0.5}$$
$$= \frac{2}{5}$$

07. A, B சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனின்

i) A, B^1 என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனக் காட்டுக?

ii) A^1, B^1 என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனக் காட்டுக?

i) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$P(A \cap B^1) = P(A) - P(A \cap B)$

$= P(A) - P(A)(1 - P(B))$

$= P(A).P(B^1)$

எனவே A, B^1 என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

ii) $R(A^1 \cap B^1) = R((A \cup B)^1)$

$= 1 - R(A \cup B)$

$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= (1 - R(A))\ (1 - R(B))$

$= R(A)^1 . R(B)^1$

எனவே A^1 , B^1 என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

08. மாதிரிவெளி S இன் யாதாயினும் மூன்று நிகழ்ச்சிகளான A, B, C இல் A யும் B யும் தம்முள் புறநீங்குவன. A யும் C யும் தம்முள் புறநீங்குவன $P(A) = a$, $P(B) = 2a$, $P(C) = 2a$, $P(B \cap C) = b$ $P(A \cup B \cup C = 1$ எனின் $b = Sa - 1$ எனக் காட்டுக. அத்துடன் $\frac{1}{5} \leq a \leq \frac{1}{3}$ எனக் காட்டுக.

$R(A \cap B) = O$ $\quad$ $R(B \cap C) = b$ $\quad$ $R(A \cup B \cup C) = 1$

$R(A \cap C) = O$ $\quad$ $R(A \cap B \cap C) = O$

$R(A \cup B \cup C) = R(A) + R(B) + R(C) - R(A \cap B) - R(A \cap C) + R(A \cap B \cap C)$

$1 = a + 2a + 2a - b$

$1 = 5a - b$

$\boxed{b = 5a - 1}$

$P(B \cap C) \geq 0$

$b \geq 0$

$5a - 1 \geq 0$

$5a \geq 0$

$a \geq \frac{1}{5}$

$R(B) \geq R(B \cap C)$

$2a \geq b$

$2a \geq 5a - 1$

$5a - 1 \leq 2a$

$3a \leq 1$

$a \leq \frac{1}{3}$

$\frac{1}{5} \leq a \leq \frac{1}{3}$

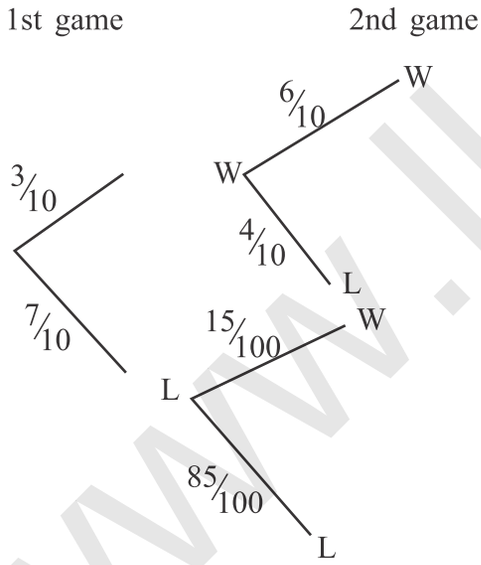
www.ikedu.lk

09. என்பன மாதிரிவெளி ஒன்றான இரு நிகழ்ச்சிகளாகும்.
$0 < R(A) \leq 1$, $0 \leq R(B) < 1$ எனின்

$R\left(A^1/B^1\right) = \dfrac{1 - R(A \cup B)}{R(B^1)}$ எனக் காட்டுக?

$$P\left(A^1/B^1\right) = \frac{P(A^1 \cap B^1)}{P(B^1)}$$
$$= \frac{P(A \cup B)^1}{P(B^1)}$$
$$= \frac{1 - P(A \cup B)}{P(B^1)}$$

10. ரவி இரண்டு விளையாட்டுக்கள் விளையாடுகிறார் அவர் முதலாவது விளையாட்டு வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.3 ஆகும். அவர் முதலாவது விளையாட்டில் வென்று இருந்தால் இரண்டாவது விளையாட்டில் வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.6 ஆகும். அவர் முதலாவது விளையாட்டில் தோல்வி அடைந்து இருந்தால் இரண்டாவது விளையாட்டில் வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.15 ஆகும். அவர் இரண்டாவது விளையாட்டில் வென்று இருந்தால் முதலாவது விளையாட்டில் வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு யாது?



இரண்டாவது விளையாட்டில் வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{15}{100}$

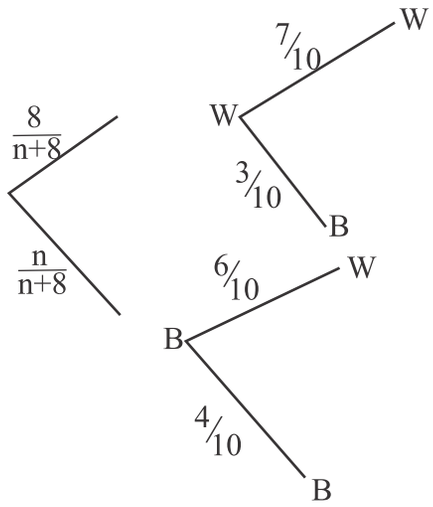
$$= \frac{18}{100} + \frac{105}{1000}$$
$$= \frac{285}{1000}$$

Answer $\Rightarrow \dfrac{18/100}{285/1000}$

$$= \frac{180}{285}$$
$$= \frac{36}{57}$$

www.lkedu.lk

11. பெட்டி A யில் 8 சர்வசமனான வெள்ளைப்பந்துகளும் n நீலப்பந்துகளும் கிடக்க பெட்டி B யில் 6 சர்வசமனான வெள்ளைப்பந்துகளும் 3 நீலப் பந்துகளும் உள்ளன. பெட்டி A யில் இருந்து எழுமாற்றாக ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டு B யினுள் இடப்பட்டு B யிலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாற்றமாக எடுக்கப்படுகிறது. B யில் இருந்து எடுக்கப்பட்ட பந்து நீலமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 8/25 எனின் n இன் பெறுமானத்தைக் காண்க? குறைந்தபட்சம் ஒரு பந்தேனும் நீலமாக இருக்கும் நிகழ்தகவைக் காண்க?



$$\frac{8}{n+8} \cdot \frac{3}{10} + \frac{n}{n+8} \cdot \frac{4}{10} = \frac{8}{25}$$

$$\frac{12}{5(n+8)} + \frac{2n}{5(n+8)} = \frac{8}{25_5}$$

$$\frac{n+6}{n+8} = \frac{4}{5}$$

$$5n + 30 = 4n + 32$$

$$n = 2$$

குறைந்தபட்சம் ஒரு பந்தேனும் நீலமாக இருத்தல்.

$$1 - \frac{8}{n+8} \cdot \frac{7}{10}$$

$$1 - \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10}$$

$$1 - \frac{56}{100}$$

$$\frac{44}{100}$$

www.lkedu.lk

12. A, B, C ஆகியன ஒரு மாதிரிவெளி S இன் மூன்று தம்முட் புறநீங்கும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் எனக் கொள்வோம்.

$R(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $R(B \cup C) = \frac{3}{5}$ எனின்

$R(A \cup B) + R(B \cup C) + R(A \cup C) = 2\,[R(A) + R(B) + R(C)]$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $P(A \cup C)$ ஐக் காண்க.

$R(A) + R(B) + R(C) = 1$

$R(A \cup B) = R(A) + R(B) \longrightarrow (1)$

$R(A \cup C) = R(A) + R(C) \longrightarrow (2)$

$R(B \cup C) = R(B) + R(C) \longrightarrow (3)$

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$

$R(A \cup B) + R(A \cup C) + R(B \cup C) = 2\,[R(A) + R(B) + R(C)]$

$R(A \cup B) + R(B \cup B) + R(A \cup C) = 2$

$$R(A \cup C) = 2 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5}$$

$$= \frac{11}{15}$$

13. ஒரு பையில் நிறம் தவிரச் சர்வசமனான 6 வெள்ளைப்பந்துகளும் n கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒன்றுக்குப் பின்னர் மற்றையது என்றவாறு, பிரதி வைப்பு இல்லாமல், இரு பந்துகள் எழுமாற்றாகப் பையிலிருந்து வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன. முதற்பந்து வெள்ளையாகவும் இரண்டாம் பந்து கறுப்பாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 4/15 ஆகும். n இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

முதலாம் பந்து வெள்ளையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{6}{n+6}$

முதலாம் பந்து வெள்ளையாகவும் இரண்டாம் பந்து கறுப்பாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{6}{n+6} \cdot \frac{n}{n+5}$

$$\therefore \quad \frac{6}{n+6} \cdot \frac{n}{n+5} = \frac{4}{15}$$

$\Rightarrow \quad 2n^2 - 23n + 60 = n$

$\Rightarrow \quad (n - 4)(2n - 15) = 3$

$\Rightarrow \quad n = 4.$ (n நோ நிறையெண்)

www.lkedu.lk

14. A, B ஆகியன ஒரு மாதிரிவெளி Ω இன் இரு நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில் $P(AUB) = 4/5, P(A^1 \cup B^1) = 5/6, P(B/A) = 1/4$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. P(A) ஐயும் P(B) ஐயும் காண்க?

$A^1 \text{ È } B^1 = (A \text{ Ç } B)^1$ ஆதலில் $R((A \text{ Ç } B)^1) = 1 - R(A \text{ Ç } B)$

$$\therefore R(A \text{ Ç } B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$R\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{R(B \text{ Ç } A)}{R(A)} \text{ Þ } R(A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

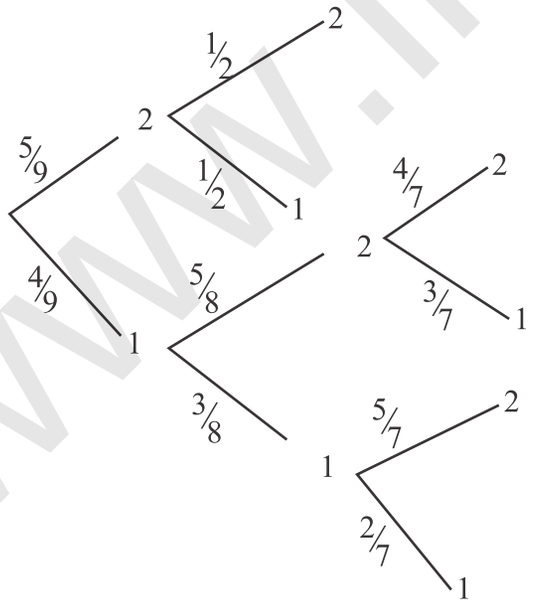
மேலும் $R(A \text{ È } B) = R(A) + R(B) - R(A \text{ Ç } B)$ Þ $\frac{4}{5} = \frac{2}{3} + R(B) - \frac{1}{6}$

$$\text{Þ } R(B) = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

15. ஒரு பையில் ஒன்பது அட்டைகள் உள்ளன. அவற்றில் நான்கில் இலக்கம் 1 உம் ஏனையவற்றில் இலக்கம் 2 உம் அச்சிடப்பட்டுள்ளன. பிரதிவைப்பு இல்லாமல் ஒரு தடவை ஒன்று வீதம் எழுமாற்றாகப் பையில் இருந்து அட்டைகள் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன.

i) வெளியே எடுத்த முதல் இரு அட்டைகளிலும் உள்ள இலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை நான்காக இருப்பதற்கான நிகழ்தவகவைக் காண்க.

ii) வெளியே எடுத்த முதல் மூன்று அட்டைகளிலும் உள்ள இலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை மூன்றாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?



(i) விடை $= \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$

(ii) விடை $= \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$

16. A, B, C ஆகியன ஒரு மாதிரிவெளி S இல் உள்ள மூன்று சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறியீட்டில் நிகழ்தகவு P (A∪B∪C) ஐ P (A), P (B), P (C) என்னும் நிகழ்தகவுகளின் சார்பில் எடுத்துரைக்க. P(A) = ¼, P(B) = ½, P(A∪B∪C) = ¾ என மேலும் தரப்படின், நிகழ்தகவு P(C) ஐக் காண்க?

கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவுகள் : $R(A) = \frac{1}{4}$, $R(B) = \frac{1}{2}$, $R(A \cup B \cup C) = \frac{3}{4}$

A, B, C என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் ஆதலால்,

$$R(A \cup B \cup C) = R(A) + R(B) + R(C) - R(A).R(B) - R(B).R(C) - P(C).R(A) + R(A).R(B).R(C)$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + R(C) - \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right).R(C) + \frac{1}{8}.R(C)$$

$$\frac{1}{8} = R(C)\left(1 + \frac{1}{8} - \frac{3}{4}\right) = R(C).\left(\frac{3}{8}\right)$$

$$\therefore R(C) = \frac{1}{3}$$

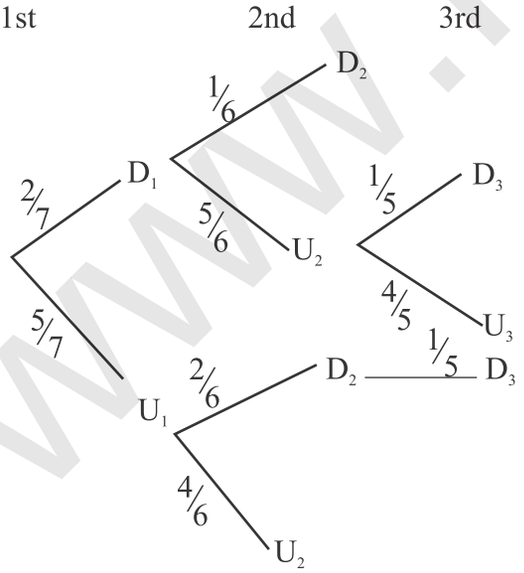
17. சர்வசமனானவையாகத் தோற்றும் 7 மின்குமிழ்கள் ஒரு பெட்டியில் உள்ளன. இவற்றில் 2 மின்குமிழ்கள் பழுதுள்ளனவாகவும் ஏனையவை பயன்படுத்தத்தக்கனவாகவும் அறியப்பட்டுள்ளன. பழுதுள்ள 2 குமிழ்களும் கண்டுபிடிக்கப்படும் வரைக்கும் குமிழ்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒன்றன்பின் ஒன்றாகச் சோதிக்கப்படுகின்றன.

i) இரு குமிழ்கள் மாத்திரம்

ii) மூன்று குமிழ்கள் மாத்திரம்

iii) சோதித்த பின்னர் பழுதுள்ள இரு குமிழ்களும் கண்டுபிடிப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

7 மின்குமிழ்களில் 2 பழுதடைந்தும் 5 பயன்படுத்தக்கூடியனவாகவும் உள்ளன.



$$R(D_1) = \frac{2}{7}$$

$$R(D_1 D_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$$

$$R(D_1 U_2 D_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{21}$$

$$R(U_1 D_1 D_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{21}$$

நிகழ்தகவு (இரு சோதனைகள் மாத்திரம் தேவைப்படின்) $= R(D_1 D_2) = \frac{1}{21}$

நிகழ்தகவு (மூன்று சோதனைகள் மாத்திரம் தேவைப்படின்) $= R(D_1 U_2 D_2) + R(U_1 D_1 D_2)$

$$= \frac{1}{21} + \frac{1}{21}$$

$$= \frac{2}{21}$$

18. A, B என்பன ஒரு மாதிரிவெளி Ω இன் இரு நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில் $P(A) = P$, $P(B) = P/2$, $P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{2P}{3}$ இங்கு $P > O$ ஆகும். $P(A \cap B)$ ஐ P இன் சார்பிற் காண்க. A, B ஆகியன சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனின், $P = \frac{5}{6}$ என உய்த்தறிக.

A, B ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

இதன்படி $R(A \cup B) = \frac{3R}{2} - R(A \cap B)$ ⟶ (1)

தரவின்படி $R(A \cup B) - R(A \cap B) = \frac{2R}{3}$ ⟶ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \frac{3R}{2} - 2R(A \cap B) = \frac{2R}{3}$

$\Rightarrow R(A \cap B) = \frac{5R}{12}$

A யும் B யும் சாரா நிகழ்ச்சிகளாதலால் $R(A \cap B) = R(A).R(B)$.

$\Rightarrow \frac{5R}{12} = R.\frac{R}{2}$

$\Rightarrow R = \frac{5}{6}.(\because R > O)$

19. A , B ஆகியன ஒரு மாதிரிவெளி S இல் இரு நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில் $R(A) = \frac{1}{3}$, $R(B) = \frac{1}{4}$, $R(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ஆகும்.

$R(A/B^1)$, $R(A^1 \cap B^1)$, $R(B^1/A^1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

இங்கு A^1, B^1 ஆகியன முறையே A, B ஆகியவற்றின் நிரப்பு நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கின்றன.

நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் : $P(A \cap B^1) + R(A \cap B) = R(A)$

$R(A \cap B^1) = R(A) - R(A \cap B)$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{6}$

எனவே ; $R(A/B^1) = \frac{R(A \cap B^1)}{R(B^1)}$

$= \frac{R(A \cap B^1)}{1 - R(B)}$

$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}}$

$= \frac{2}{9}$

www.lkedu.lk

$$R(A^1 \cap B^1) = R(A \cup B^1) = 1 - R(A \cup B)$$
$$= 1 - R(A) - R(B) + R(A \cap B)$$
$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$
$$= \frac{7}{12}$$

$$R(B^1 / A^1) = \frac{R(A^1 \cap B^1)}{R(A^1)} = \frac{7/12}{1 - 1/3} = \frac{7/12}{2/3} = 7/8$$

20. ஒரு பையில் நிறத்தைத் தவிர எல்லா அம்சங்களிலும் சர்வசமனான 4 சிவப்புப் பந்துகளும் 3 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. பிரதி வைப்பு இல்லாமல் ஒரு தடவைக்கு ஒன்று வீதம் நான்கு பந்துகள் எழுமாற்றாகப் பையிலிருந்து வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன.

i) வெளியே எடுக்கப்படும் பந்துகள் ஒரே நிறத்தைக் கொண்டனவாக இருப்பதற்கான

ii) எவையேனும் இரு அடுத்துவரும் எடுப்புகளில் வெளியே எடுக்கப்படும் பந்துகள் வெவ்வேறு நிறங்களைக் கொண்டனவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

i) எல்லாம் சிவப்பு $= \frac{4}{7} , \frac{3}{6} , \frac{2}{5} , \frac{1}{4} = \frac{1}{35}$

எல்லாம் கறுப்பு / சாத்தியமில்லை

விடை $= \frac{1}{35}$

ii) RBRB $= \frac{4}{7} , \frac{3}{6} , \frac{3}{5} , \frac{2}{4} = \frac{3}{35}$

BRBR : $\frac{3}{7} , \frac{4}{6} , \frac{2}{5} , \frac{3}{4} = \frac{3}{35}$ விடை $= \frac{6}{35}$

21. யாழ்ப்பாணத்தில் உதயன், வலம்புரி, தினக்குரல் ஆகிய செய்திப் பத்திரிகைகள் வெளியிடப் படுகின்றன. இங்குள்ள மக்களில் 60% ஆனோர் உதயனையும் 44% ஆனோர் வலம்புரியையும் 34% ஆனோர் தினக்குரலையும் 21% உதயனையும் வலம்புரியையும் 13% ஆனோர் வலம்புரியையும் தினக்குரலையும் 19% உதயனையும் தினக்குரலையும் 10% ஆனார் இம் மூன்று பத்திரிகைகளும் வாசிக்கின்றனர். யாழ்ப்பாணத்தில் உள்ள ஒருவரைத் தேர்ந்து எடுக்கும் போது இம் மூன்று பத்திரிகைகளில் ஒன்றையாவது வாசிப்பதற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க?

உதயன் - U , வலம்புரி - V , தினக்குரல் - T

$$R(U) = \frac{60}{100} , R(v) = \frac{44}{100} , R(T) = \frac{34}{100}$$

$$R(U \cap V) = \frac{21}{100} , R(V \cap T) = \frac{13}{100} , R(U \cap T) = \frac{19}{100} , R(U \cap V \cap T) = \frac{10}{100}$$

$$R(U \cup V \cup T) = R(U) + R(V) + R(T) - R(U \cap V) - R(V \cap T) - R(U \cap T) + R(U \cap V \cap T)$$
$$= \frac{60}{100} + \frac{44}{100} + \frac{34}{100} - \frac{21}{100} - \frac{13}{100} - \frac{19}{100} + \frac{10}{100}$$
$$= \frac{95}{100}$$
$$= \frac{19}{20}$$

24. பதிவு ஒன்றின்படி விசேட சிகிச்சை அளிக்கும் நிலையம் ஒன்றிற்கு வருபவர்களில் 65% ஆனோர் 45 வயதிலும் அதிகமானவர்கள் 45 வயதிலும் கூடிய நீரிழிவு நோயால் பாதிக்கப்பட்டவர்கள் 52% ஆவர். இச் சிகிச்சை நிலையத்திற்கு வருபவர்களில் நீரிழிவு நோயால் பாதிக்கப்பட்டவர்கள் 40% ஆவர். இச் சிகிச்சை நிலையத்திற்கு வருபவர்களில் ஒருவர் எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டால்.

i) 45 வயதிலும் கூடியவராகவும் நீரிழிவு நோயால் பாதிக்கப்பட்டவராகவும் இருப்பதற்கான

ii) 45 வயதிலும் அதிகமாக இல்லாத, நீரிழிவு நோயினால் பாதிக்கப்பட்டவராகவும் இருப்பதற்கான

iii) 45 வயதிலும் கூடியவராகவும் நீரிழிவு நோயினால் பாதிக்கப்பட்டவராகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?

A ⇒ 45 வயதிலும் கூடியவர்

B ⇒ நீரிழிவு நோயால் பாதிக்கப்பட்டவர்

$P(A) = 0.65$, $P(B/A) = 0.52$, $P(B) = 0.40$

i) $P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$

$= 0.52 \times 0.65$

$= 0.34$

$= \frac{34}{100}$

$= \frac{17}{50}$

ii) $P\left(\frac{B}{A^1}\right) = \frac{P(B \cap A^1)}{P(A^1)}$

$= \frac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)}$

$= \frac{0.40 - 0.34}{1 - 0.65}$

$= \frac{0.06}{0.35}$

$= \frac{0.6}{3.5}$

$= \frac{6}{35}$

$= 0.17$

iii) $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.34}{0.40} = \frac{34}{40}$

$= 0.85$

www.lkedu.lk

22. A , B , C என்னும் மூன்று பிள்ளைகள் சாராமல் சரியாக ஒரு பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ஆகும். இவர்களில் இருவர் மாத்திரம் சாராமல் பிரசினத்தை சரியாக தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

$R(A)=\frac{1}{6}$, $R(B)=\frac{1}{2}$, $R(C)=\frac{1}{3}$

X : இரு பிள்ளைகள் மாத்திரம் சாராமல் பிரசினத்தை தீர்த்தல்.

$$X = (A \cap B \cap C^1) \cup (A \cap B^1 \cap C) \cup (A^1 \cap B \cap C)$$
$$P(X) = R(A \cap B \cap C^1) + R(A \cap B^1 \cap C) + R(A^1 \cap B \cap C)$$
$$R(X) = R(A).R(B).R(C^1) + R(A).R(B^1).R(C) + R(A^1).R(B).R(C)$$
$$= \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3} + \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} + \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$
$$= \frac{2}{36} + \frac{1}{36}, \frac{5}{36}$$
$$= \frac{8}{36}$$
$$= \frac{2}{9}$$

23. X , Y ஆகிய இரு நிகழ்வுகள் பின்வரும் நிபந்தனைகளை திருப்திப்படுத்தும் எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

i) நிகழ்வு X மாத்திரம் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0. 2

ii) நிகழ்வு Y மாத்திரம் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0. 1

iii) நிகழ்வு X , Y ஆகிய இரண்டும் நடைபெறாது இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.6 எனின் $P(X/Y)=0.5$ எனக் காட்டுக?

$R(X \cap Y^1) = 0.2$, $R(X^1 \cap Y^1) = 0.6$

$R(X^1 \cap Y) = 0.1$

$R(X^1 \cap Y^1) = R(X \cup Y)^1 = 1 - R(X \cup Y) = 0.6$

$R(X \cup Y) = 0.4$

$R(X \cap Y^1) = R(X) - P(X \cap Y) = 0.2$ ⟶ (1)

$R(X^1 \cap Y) = R(Y) - R(C \cap Y) = 0.1$ ⟶ (2)

$R(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - R(X \cap Y)$

$R(X \cup Y) = 0.3 + R(X \cap Y)$

$0.4 = 0.3 + P(X \cap Y)$

$P(X \cap Y) = 0.1$

(1) + (2) ⇒

$R(X) + R(Y) - 2P(X \cap Y) = 0.2 + 0.1$

$R(X) + R(Y) - 2P(X \cap Y) = 0.3 + P(C \cap Y)$

$R(Y) - P(C \cap Y) = 0.1$

$P(Y) - 0.1 = 0.1$

$P(Y) = 0.2$

$P(X/Y) = \frac{R(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2} = 0.5$

25. ஒரு பாடசாலையில் தரம் 11 வகுப்பில் 18 ஆண் பிள்ளைகளும் 12 பெண் பிள்ளைகளும் உள்ளனர். தரம் 10 வகுப்பில் 12 ஆண் பிள்ளைகளும் 18 பெண் பிள்ளைகளும் உள்ளனர். இவ்விரு வகுப்புகளில் இருந்து ஒரு தினவரவு இடாப்பினை எடுத்து எழுமாற்றாக ஒரு பிள்ளையைத் தெரிந்து எடுத்தால்

i) அப் பிள்ளை பெண்ணாக இருத்தல்.

ii) தரம் 11 இல் உள்ள பெண்ணாக இருத்தல்.

girl - (G)

Grade - 10 $\Rightarrow$ T

Grade - 11 $\Rightarrow$ E

$$P(T) = P(E) = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{G}{E}\right) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$P\left(\frac{G}{T}\right) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

$$P(G) = P(T) \times P\left(\frac{G}{T}\right) + P(E) \times P\left(\frac{G}{E}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{17}{35}$$

$$P\left(\frac{E}{G}\right) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{17}{35}}$$

$$= \frac{2}{10} \times \frac{35}{17}$$

$$= \frac{7}{17}$$

www.lkedu.lk

26. வியாபார நிறுவனம் ஒன்றிற்கு வியாபாரத் தேவைகளுக்காக A, B C என்னும் பண்ணைகளில் இருந்து கொள்வனவு செய்யப்படுகிறது. தேவையான முட்டைகளில் 1/3 ஐ பண்ணை A யிலிருந்து 1/2 ஐ பண்ணை B யிலிருந்தும் 1/6 ஐ பண்ணை C யில் இருந்தும் பெற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. பண்ணை A, B, C இருந்து பெற்றுக்கொள்ளப்படும் முட்டைகளில் முறையே 1% , 2 % , 3% பழுதடைந்தவையாகக் காணப்பட்டது. எழுமாற்றமாகத் தெரிவு செய்யப்படும் ஒரு முட்டை பழுதடைந்ததாக இருப்பதற்கு உரிய நிகழ்தகவையும், இம் முட்டை பண்ணை C யில் பெறப்பட்டதற்கான நிகழ்தகவையும் காண்க?

முட்டை பழுதடைந்தது S என்க.

$P(A) = \frac{1}{3}$ $\quad P\left(\frac{S}{A}\right) = \frac{1}{100}$

$P(B) = \frac{1}{2}$ $\quad P\left(\frac{S}{B}\right) = \frac{2}{100}$

$P(C) = \frac{1}{6}$ $\quad P\left(\frac{S}{C}\right) = \frac{3}{100}$

$$P(S) = P(A).\ P\left(\frac{S}{A}\right) + P(B).P\left(\frac{S}{B}\right) + P(C).P\left(\frac{S}{C}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{100} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{100}$$

$$= \frac{1}{300} + \frac{1}{100} + \frac{1}{200}$$

$$= \frac{11}{600}$$

$$P\left(\frac{C}{S}\right) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{100}}{11/600} = \frac{3}{11}$$

27. மனிதன் ஒருவன் மோட்டார் சைக்கிள், சைக்கிள், நடை என்னும் மூன்று போக்குவரத்து முறைகளில் ஒன்றை மாத்திரம் பயன்படுத்தி ஒரு திட்டமான பாதை வழியே ஓர் ஆபத்தான பயணத்தை மேற்கொள்கிறான். அவன் போக்குவரத்து முறைகளைப் பயன்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே P , 2P , 3 P எனின் P யின் பெறுமானத்தைக் காண்க. மேலும் அவன் போக்குவரத்து முறைகளைப் பயன்படுத்தும் போது ஒரு விபத்து ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}$ எனின், ஒரு தனிப் பயணத்தில் ஒரு விபத்து ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

பயணத்தின் போது விபத்து ஏற்பட்டுள்ளதாக அறியப்படின் அவன்

i) மோட்டார் சைக்கிளில்

ii) சைக்கிளில்

iii) நடந்து சென்றமைக்கான நிகழ்தகவைக் கணிக்க?

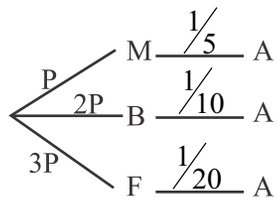
M - மோட்டார் சைக்கிளில் பயணம் செய்தல்

B - சைக்கிளில் பயணம் செய்தல்

F - நடந்து செல்லல்

A - விபத்து ஏற்படல்

www.lkedu.lk



M, B, F ஆகிய மூன்று நிகழ்ச்சிகளும், தம்முள் புறநீங்குவனவும், யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளு மாதலால்

$$P(M) + P(B) + P(F) = 1$$
$$P + 2P + 3P = 1$$
$$P = \frac{1}{6}$$

A= விபத்து நடைபெறும் எனில்

$$\begin{aligned} P(A) &= P(M \cap A) + P(B \cap A) + (F \cap A) \\ &= P(A/M).P(M) + P(A/B).P(B) + P(A/F).P(F) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{10} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{20} \\ &= \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} \\ &= \frac{4+4+3}{120} \\ &= \frac{11}{120} \end{aligned}$$

i) $P(M/A) = \dfrac{P(M \cap A)}{P(A)} = \dfrac{1/30}{11/120} = \dfrac{4}{11}$

ii) $P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{1/30}{11/120} = \dfrac{4}{11}$

iii) $P(F/A) = \dfrac{P(F \cap A)}{P(A)} = \dfrac{1/40}{11/120} = \dfrac{3}{11}$

ஏனைய நிகழ்தகவுகள் உயர்வாக இருப்பதனால், நடந்து செல்லும் பொழுது விபத்து ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு இழிவாகும்.

∴ நடந்து செல்லும் போக்குவரத்து முறை பாதுகாப்பானது.

www.lkedu.lk

28. ஒரு கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டை A அதன் ஆறு தனித்தனி முகங்களின் மீது 1, 2, 3, 3, 4, 5 ஆகியவற்றைக் காட்டுகின்றது. தாயக்கட்டை A இரு தடவை மேலே எறியப்படுகின்றது. பெறப்படும் இரு எண்களினதும் கூட்டுத்தொகை 6 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

முகங்களின் மீதுள்ள எண்கள் தவிர எல்லா அம்சங்களிலும் A இற்குச் சர்வசமனான வேறொரு தாயக்கட்டை B அதன் ஆறு தனித்தனி முகங்களின் மீது 2, 2, 3, 4, 4, 5 ஆகியவற்றைக் காட்டுகின்றது. தாயக்கட்டை B இரு தடவை மேலே எறியப்படுகிறது. பெறப்படும் இரு எண்களினதும் கூட்டுத்தொகை 6 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

இப்போது A, B ஆகிய இரு தாயக்கட்டைகளும் ஒரு பெட்டியில் இடப்படுகின்றன. பெட்டியிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு தாயக்கட்டை வெளியே எடுக்கப்பட்டு இரு தடவை மேலே எறியப்படுகிறது. பெறப்படும் இரு எண்களினதும் கூட்டுத்தொகை 6 எனத் தரப்பட்டிருக்கும் போது, பெட்டியிலிருந்து பெறப்பட்ட தாயக்கட்டை A ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

தாயக்கட்டை எறிதலின் போது நிகழ்தகவு $P(n)$;

n	1	2	3	4	5
P (n)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

i^{th} எறிதலின் போது பெறப்படும் எண் Xi என்க. இங்கு $i = 1, 2$.

$$P(X_1 + X_2 = 6) = P(X_1 = 1 \text{ and } X_2 = 5) + P(X_1 = 5 \text{ and } X_2 = 1) + P(X_1 = 2 \text{ and } X_2 = 4) + P(X_1 = 4 \text{ and } X_2 = 2) + P(X_1 = 3 \text{ and } X_2 = 3)$$

$$= 4 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{9}$$

தாயக்கட்டை B , $X_i \rightarrow Y_i$

n	2	3	4	5
P (n)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$P(Y_1 + Y_2 = 6) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Bayes தேற்றப்படி

$$P(A / \text{Sum} = 6) = \frac{P(\text{Sum} = 6 / A) P(A)}{P(\text{Sum} = 6/A) . P(A) + P(\text{Sum} = 6/B) . P(B)}$$

$$= \frac{\frac{2}{9} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{8}{17}$$

www.ikedu.lk

30. ஒரு நிறுவகத்தில் ஒரு குறித்த தொழிலுக்காக விண்ணப்பிக்கும் எல்லா விண்ணப்பதாரர்களும் ஓர் உளச்சார்புப் பரீட்சைக்குத் தோற்ற வேண்டும். உளச்சார்புப் பரீட்சையில் A தரங்களைப் பெறுபவர்கள் தொழிலுக்காகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவர். ஏனைய விண்ணப்பதாரர்கள் ஒரு நேர்முக பரீட்சைக்குத் தோற்ற வேண்டும். ஓர் அளவையீட்டில் விண்ணப்பகாரர்களில் 60% ஆனோர் A தரங்களைப் பெறுவதாகவும் இவர்களில் 40% ஆனோர் பெண்கள் எனவும் காணப்பட்டுள்ளது. நேர்முகப் பரீட்சைக்குத் தோற்றும் விண்ணப்பதாரர்களில் 10% ஆனோர் மாத்திரம் தெரிந்தெடுக் கப்படும் அதேவேளை அவர்களில் 70% ஆனோர் பெண்களாவர்.

i) இத் தொழிலுக்காக ஓர் ஆண் தெரிந்தெடுக்கப்படுவதற்கான

ii) தொழிலுக்காகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட ஓர் ஆண் உளச்சார்புப் பரீட்சையில் A தரத்தைப் பெற்றிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

X - தொழிலுக்காக தெரிவு செய்யப்பட்ட ஆண்கள்

A - உளச்சார்புப் பரீட்சையில் A தரத்தைப் பெற்றவர்கள்.

i) $P(X) = \frac{3}{5}, \frac{3}{5} + \frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}$

$= \frac{93}{250}$

ii) $P(A/X) = \frac{P(X \cap A)}{P(X)} = \frac{\frac{3}{5}, \frac{3}{5}}{\frac{93}{250}}$

$= \frac{30}{31}$

31. ஒரு பாடசாலையில் ஒரு குறித்த பரீட்சைக்குத் தோற்றிய 100 மாணவர்கள் பற்றி ஒரு கணிப்பீட்டிற் கேற்ப அவர்களில் 48 மாணவர்கள் பரீட்சையில் சித்தி அடைந்திருப்பதாக வெளிப்படுத்தப்பட்டது. அத்துடன் இந்த 100 மாணவர்களில் 50 மாணவர்கள் பாடசாலையின் விளையாட்டுச் செயற்பாடுக ளில் பங்குபற்றி இருப்பதாகவும் 30 மாணவர்கள் பாடசாலையின் சங்கீதச் செயற்பாடுகளில் பங்கு பற்றி இருப்பதாகவும் எந்த மாணவனும் விளையாட்டுச் செயற்பாடுகள், சங்கீதச் செயற்பாடுகள் ஆகிய இரண்டிலும் பங்குபற்றவில்லை எனவும் வெளிப்படுத்தப்பட்டது. மேலும் பாடசாலையின் விளையாட்டுச் செயற்பாடுகளில் பங்குபற்றிய மாணவர்களில் 60% ஆனோர் பரீட்சையில் சித்தி அடைந்திருக்கும் அதேவேளை பாடசாலையின் விளையாட்டுச் செயற்பாடுகளில் அல்லது சங்கீதச் செயற்பாடுகளில் பங்குபற்றாத மாணவர்களில் 30% ஆனோர் பரீட்சையில் சித்தியடைந்துள்ளனர். மேற்குறித்த 100 மாணவர்களிலிருந்து மாணவன் ஒருவன் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படு கின்றான். இம் மாணவன்

i) பாடசாலையின் சங்கீதச் செயற்பாடுகளில் பங்குபற்றியுள்ளானெனத் தரப்படும் போது அவன் பரீட்சையில் சித்தியடைந்தவனாக இருப்பதற்கான

ii) பரீட்சையில் சித்தியடைந்துள்ளானெனத் தரப்படும் போது அவன் பாடசாலையின் விளையாட்டுச் செயற்பாடுகளில் பங்குபற்றியவனாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

S, M, N, X என்னும் நிகழ்ச்சிகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன என்க.

S - விளையாட்டுச் செயற்பாடுகள் பங்குபற்றுவோர்

M - சங்கீதச் செயற்பாடுகளில் பங்குபற்றுவோர்

N - விளையாட்டுச் செயற்பாடுகளில் அல்லது சங்கீதச் செயற்பாடுகளில் பங்குபற்றாதோர்

X - பரீட்சையில் சித்தியடைந்தோர்

$P(S) = \frac{50}{100}$, $P(M) = \frac{30}{100}$, $P(N) = \frac{20}{100}$, $P(X) = \frac{48}{100}$

$P(X/S) = 0.60$, $P(X/N) = 0.30$

29. A, B, C என்னும் பைகளில் ஒவ்வொன்றிலும் நிறம் தவிர ஏனைய எல்லா அம்சங்களிலும் சர்வசமனான வெள்ளைப் பந்துகளும் கறுப்புப் பந்துகளும் மாத்திரம் உள்ளன. பை A இல் 4 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 கறுப்புப் பந்துகளும் பை B யில் 2 வெள்ளைப் பந்துகளும் 4 கறுப்புப் பந்துகளும் பை C யில் m வெள்ளைப் பந்துகளும் (m + 1) கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒரு பையை எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்து அப்பையிலிருந்து எழுமாற்றாக இரு பந்துகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாகப் பிரதி வைப்பு இல்லாமல் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன. வெளியே எடுக்கப்பட்ட முதற் பந்து வெள்ளையாகவும் வெளியே எடுக்கப்பட்ட இரண்டாம் பந்து கறுப்பாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 5/18 ஆகும். m இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. மேலும் வெளியே எடுக்கப்பட்ட முதல் பந்து வெள்ளை எனவும் வெளியே எடுக்கப்பட்ட இரண்டாம் பந்து கறுப்பு எனவும் தரப்படின், பை C தெரிந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

X = முதல் பந்து வெள்ளையும் 2ம் பந்து கறுப்பும் எனின், மொத்த நிகழ்தகவுத் தேற்றப்படி.

$$P(X) = P(X/A).P(A) + P(X/B)P(B) + P(X/C)P(C)$$

$$P(X/A) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P(X/B) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P(X/C) = \frac{m}{(2m+1)} \cdot \frac{m+1}{2m} = \frac{(m+1)}{2(2m+1)}$$

மேலும் $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$

$P(X) = \frac{5}{18}$ ஆதலால்

(1) $\Rightarrow \frac{5}{18} = \frac{4}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{(m+1)}{2(2m+1)} \times \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{5}{6} - \frac{8}{15} = \frac{(m+1)}{2(2m+1)}$

$\Rightarrow \frac{5}{6} - \frac{8}{15} = \frac{(m+1)}{2(2m+1)}$

$\Rightarrow 3(2m+1) = 5(m+1)$

$\Rightarrow m = 2$

$m = 2 \Rightarrow P(X/C) = \frac{3}{10}$

Baye's தேற்றப்படி

$$P(C/X) = \frac{P(X/C)P(C)}{P(X)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{5}{18}}$$

$$= \frac{9}{25}$$

www.lkedu.lk

i) மொத்த நிகழ்தகவு தேற்றப்படி

$$P(X) = P(S) \cdot P(X/S) + P(M)\, P(X/M) + P(N)\, P(X/N)$$

$$\frac{48}{100} = \frac{50}{100} \times 0.6 + \frac{30}{100} \times P(X/M) + \frac{20}{100} \times 0.3$$

$$P(X/M) = \frac{48 - 30 - 6}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

ii) பேயிசின் தேற்றப்படி

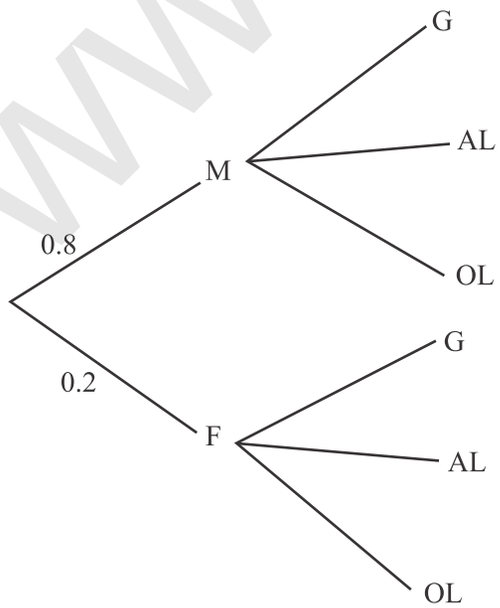
$$P(S/X) = \frac{P(S)\,P(X/S)}{P(X)}$$

$$= \frac{50 \times 0.6}{48} = \frac{30}{48} = \frac{5}{8}$$

32. ஒரு பெரிய கம்பனியில் தொழிலாளர்களில் 80% ஆனோர் ஆண்களும் 20% ஆனோர் பெண்களு மாவர். தொழிலாளர்களில் 57% இன் அதியுயர் கல்வித் தகைமை க.பொ.த (சா.த) ஆகும். தொழிலாளர்களில் 32% ஆனோரின் அதியுயர் கல்வித் தகைமை க.பொ.த (உ.த) ஆகும். மற்றைய எல்லாத் தொழிலாளர்களும் பட்டதாரிகளாவார். இக்கம்பனியில் பெண் தொழிலாளர்களில் 40% இன் அதியுயர் கல்வித் தகைமை க.பொ.த (சா.த) உம் 45% இன் அதியுயர் கல்வித் தகைமை க.பொ.த (உ.த) உம் ஆகும். கம்பனியின் தொழிலாளர்களிலிருந்து தொழிலாளர் ஒருவர் எழுமாற் றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றார். இத் தொழிலாளர்

i) க.பொ.த (சா.த) ஐ அதிஉயர் கல்வித் தகைமையாகக் கொண்ட ஒரு பெண்ணாக
ii) க.பொ.த (சா.த) ஐ அதிஉயர் கல்வித் தகைமையாகக் கொண்ட ஒரு ஆணாக
iii) ஓர் ஆணெனத் தரப்படும் போது ஒரு பட்டதாரியாக
iv) ஒரு பட்டதாரியொன்றெனத் தரப்படும் போது ஒரு பெண்ணாக இருத்தல் என்னும் நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றினதும் நிகழ்தகவைக் காண்க?

M - ஆண் , F - பெண்
OL - G.C.E (O/L)
AL - G.C.E (A/L)
G - பட்டதாரி



www.ikedu.lk

$P(M) = 0.8,\ P(F) = 0.2,\ P(OL) = 0.57,\ P(AL) = 0.32,\ P(G) = 0.1$
$P(OL/F) = 0.4,\ P(AL/F) = 0.45$

i) $P(F \cap OL) = P(F)\,P(OL/F)$
$= 0.2 \times 0.4$
$= 0.08$

ii) $P(OL) = P(OL \cap M) + P(OL \cap F)$
$P(M \cap OL) = 0.57 - 0.08$
$= 0.49$

iii) $P(G/M) = ?$
$P(G) = P(M).\,P(G/M) + P(F).\,P(G/F)$
$0.11 = 0.8 \times P(G/M) + 0.2 \times (1 - 0.4 - 0.45)$

$$P(G/M) = \frac{0.11 - 0.3}{0.8}$$
$$= \frac{0.08}{0.8}$$
$$= \frac{1}{10}$$
$$= 0.1$$

33. A, B, C என்னும் அதே ஒழுங்கில் உள்ள மூவர் நாணயத்தைச் சுண்டுகிறார்கள். முதலில் தலை பெறுபவர்கள் வெற்றிக்குரியவர்கள் பரிசோதனையைத் தொடர்ச்சியாகச் செய்யப்படின் அவர்கள் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}$ எனக் காட்டுக?

$P(H) = p = \frac{1}{2},\ P(T) = q = \frac{1}{2}$

$P(A \text{ wins}) = p + qqq\,p + qqqqqq\,p + ...$
$= p\left(1 + q^3 + q^6 + q^9 + ...\right)$
$= p\left(\frac{a}{1 - r}\right) \quad (\because |r| = q^3 < 1)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{8}}\right) = \frac{4}{7}$ (Ans)

$P(B \text{ wins}) = qp + qqqq\,p + qqqqqqq\,p + ...$
$= qp\left(1 + q^3 + q^6 + q^9 + ...\right)$
$= qp\left(\frac{a}{1 - r}\right) \quad (\because |r| = q^3 < 1)$
$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{8}{7} = \frac{2}{7}$ (Ans)

$P(C \text{ wins}) = qqp + qqqqq\,p + qqqqqqqq\,p + ...$
$= qqp\left(1 + q^3 + q^6 + ...\right)$
$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{8}{7} = \frac{1}{7}$ (Ans)

34. A, B என்பன நிகழ்ச்சி வெளி E இல் இரு நிகழ்ச்சிகளாக இருக்க பின்வருவனவற்றை நிறுவுக?

i) $P(\phi) = 0$

$P(\phi) = 0$ என நிறுவுதல்

ϕ, A என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளை நிகழ்ச்சி வெளியில் கருதுவோம்.

$A \cap \phi \quad \therefore A, \phi$ என்பவை தம்முள் புறநீங்கலானவை.

$$\therefore R(A \cup \phi) = R(A) + R(\phi)$$
$$R(A) = R(A) + R(\phi)$$
$$R(\phi) = 0$$

ii) $P(A^1) = 1 - P(A)$

$P(A^1) = 1 - P(A)$ என நிறுவுதல்

இரு நிகழ்ச்சிகள் A, A^1 என்பவற்றை நிகழ்ச்சி வெளியில் கருதுவோம்.

$A \cap A^1 = (\phi) \therefore A, A^1$ என்பவை தம்முள் புறநீங்கலானவை.

$$\therefore R(A \cup A^1) = R(A) + R(A^1)$$
$$R(W) = R(A^1) + RA$$
$$R(A^1) + P(A) = 1$$
$$R(A^1) = 1 - P(A)$$

iii) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ என நிறுவுதல்

$(A \cap B^1), (A \cap B)$ என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளை நிகழ்ச்சி வெளியில் கருதுவோம்.

$(A \cap B^1) \cap (A \cap B) = A \cap (B^1 \cap B) = A \cap \phi = \phi$

$\therefore A \cap B^1, A \cap B$ என்பன தம்முள் புறநீங்கலானவை.

$$R(A \cap B) \cup (A \cap B^1) = R(A \cap B) + R(A \cap B^1)$$
$$P(A \cap (B \cup B^1)) = P(A \cap B) + P(A \cap B^1)$$
$$P(A \cap W) = P(A \cap B) + P(A \cap B^1)$$
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^1)$$
$$P(A \cap B^1) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ என நிறுவுதல்

$A, (B \cap A^1)$ என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளை நிகழ்ச்சி வெளியில் கருதுவோம்.

$A \cap (B \cap A^1) = B \cap (A \cap A^1) = B \cap (\phi) = \phi$

$\therefore A, B \cap A^1$ என்பவை தம்முள் புறநீங்கலானவை.

$$\therefore P(A \cup (B \cap A^1)) = P(A) + P(B \cap A^1)$$
$$P((A \cup B) \cap (A \cup A^1)) = P(A) + P(B) - P(B \cap A)$$
$$P((A \cup B) \cap W) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

www.kedu.lk

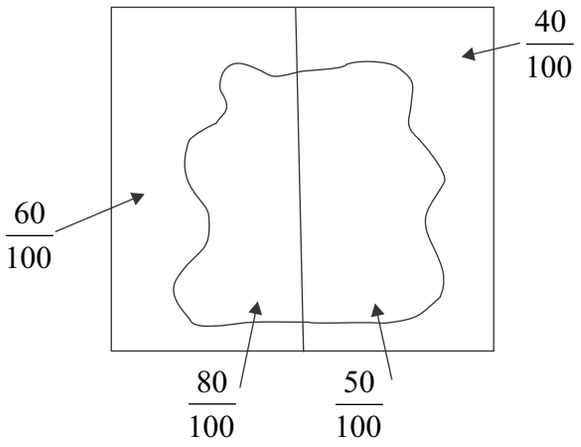
35. பேயிசுவின் தேற்றத்தைக் கூறுக. (Boye's theorem). ஒரு வகுப்பானது 60% ஆண்களையும் 40% பெண்களையும் கொண்டுள்ளது. இவர்களில் 80% ஆண்களும் 50% பெண்களும் விளையாட்டுப் போட்டியில் பங்குபற்றுகின்றனர். ஒரு Student எழுமாறாகத் தெரிவுசெய்யப்படும் போது அவர் விளையாட்டுப் போட்டியில் பங்குபற்றவராகக் காணப்பட்டார் எனில் அவர்

i) ஆணாக

ii) பெண்ணாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க?

பேயிசுவின் தேற்றம்

$B_1 , B_2 , B_3 , \ldots\ldots\ldots Bn$ என்பன மாதிரிவெளி Ω இன் பிரிவினைகளாக இருக்க Ω இற்கு உரிய நிகழ்ச்சி வெளியில் A என்பது யாதும் ஒரு நிகழ்ச்சி எனில் இதற்கான பேயிசுவின் தேற்றம்



$$P(Br/A) = \frac{P(A/Br).P(Br)}{P(A)}$$ இங்கு

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/Bi).(Bi)$$

$$P(B) = 6/10 = \frac{3}{5}, \quad P(G) = 2/5$$

$$P(S/B) = \frac{4}{5}, \quad P(S/G) = \frac{1}{2}$$

i) $$P\left(B/S\right) = \frac{P\left(B/S\right).P(B)}{P(S)}$$

$$= \frac{P\left(B/S\right).P(B)}{P\left(S/B\right).P(B) + P\left(S/G\right).P(G)}$$

$$= \frac{4/5 \cdot \frac{3}{5}}{4/5 \times 3/5 + 1/2 \times 2/5}$$

$$= 12/17$$

ii) $$P\left(G/S\right) = \frac{P\left(S/G\right).P(G)}{P(S)}$$

$$= \frac{P\left(S/G\right).P(G)}{P\left(S/G\right).P(G) + P\left(S/B\right).P(B)}$$

$$= \frac{1/2 \times \frac{2}{5}}{17/25}$$

$$= 5/17$$

www.lkedu.lk

36. ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களில் 40% , 35% , 25% சதவீதத்தினர் முறையே நடனம், சங்கீதம், சித்திரம் ஆகிய பரீட்சைக்கு தோற்றினர். அவர்களில் 80% , 60% , 90% சதவீதத்தினர் பரீட்சையில் சித்தியெய்தினர். வகுப்பில் இருந்து ஒரு மாணவன் எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டால் அவர்

i) பரீட்சையில் சித்தியடைந்து இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ii) பரீட்சையில் சித்தியடைந்தவர் எனத் தரப்படின் அவர் சித்திரம் கற்று இருக்கும் நிகழ்தகவு யாது?

பரீட்சையில் சித்தியடைதல் $\Rightarrow S$

நடனம் $\Rightarrow D$

சித்திரம் $\Rightarrow A$

சங்கீதம் $\Rightarrow M$

$$P(D) = \frac{40}{100}$$

$$P(A) = \frac{25}{100}$$

$$P(M) = \frac{35}{100}$$

$$P\left(\frac{S}{D}\right) = \frac{80}{100}$$

$$P\left(\frac{S}{m}\right) = \frac{60}{100}$$

$$P\left(\frac{S}{A}\right) = \frac{90}{100}$$

$$P(S) = P(D).P\left(\frac{S}{D}\right) + P(M)P\left(\frac{S}{M}\right) + P(A).P\left(\frac{S}{A}\right)$$

$$= \frac{4}{100} \cdot \frac{80}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{60}{100} + \frac{25}{100} \cdot \frac{90}{100}$$

$$= \frac{3200 + 2100 + 2250}{10000}$$

$$= \frac{7550}{10000} = 75.5\%$$

$$= 0.755$$

$$P\left(\frac{A}{S}\right) = \frac{\frac{25}{100} \cdot \frac{90}{100}}{0.755} = \frac{0.225}{0.755} = \frac{225}{755}$$

www.ikedu.lk

புள்ளிவிபரவியல்

புள்ளிவிபரவியலானது தரவுகளை சேகரித்தல், பின் அதனை ஒழுங்குபடுத்தல், ஒழுங்குபடுத்திய தரவுகளை ஆராய்தல், பின்பொருத்தமான முடிவினை மேற்கொள்ளல் ஆகிய நடவடிக்கைகளை கொண்டது.

மீடிறன் (f)

எண் தரவுகள் தோன்றும் தடவைகளின் எண்ணிக்கை மீடிறன் எனப்படும்.

மீடிறன் பரம்பல்

01. வகுப்புக்கள் ஆக்கபடாத மீடிறன் பரம்பல்

ஈட்டுக்கள்	x_1	x_2	x_3.....x_n
மீடிறன்	f_1	f_2	f_3.....f_n

02. வகுப்புக்கள் ஆக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பல்

வகுப்பு	**மீடிறன்**
$a-a+b$	f_1
$a+b-a+2b$	f_2
$a+2b-a+3b$	f_3
.....	.....
.....	.....
$a+(n-1)b-a+nb$	f_n

b வகுப்பாயிடையின் பருமன்

உ + ம் :-

01.

வகுப்பாயிடை	**மீடிறன்**
0 - 10	3
10 - 20	4
20 - 30	7
30 - 40	2

$0-10 \equiv 0 \leq x < 10$

$10-20 \equiv 10 \leq x < 20$

வகுப்பாயிடையின் பருமன் $= 10$

02.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்	உண்மை வகுப்பாயிடை
20 - 24	2	19.5 - 24.5
25 - 29	5	24.5 - 29.5
30 - 34	6	29.5 - 34.5
35 - 39	4	34.5 - 39.5

வகுப்பாயிடையின் பருமன் = 5

03.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்	உண்மை வகுப்பாயிடை
3.6 - 4.5	3	3.55 - 4.55
4.6 - 5.5	4	4.55 - 5.55
5.6 - 6.5	5	5.55 - 6.55

மைய நாட்ட அளவீடுகள்

01. இடை 02. இடையம் 03. ஆகாரம்

www.lkedu.lk

இடை

01. (1) ஈட்டுப் பரம்பலின் இடை

$x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_\eta$ எனும் η ஈட்டுக்களின் இடை $\bar{x}$ எனின் $\bar{x}$ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டும்.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{2=1}^{h} x_2}{h}$$

(2) மீடிறன் பரம்பலொன்றின் இடை

$x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_\eta$ எனும் η ஈட்டுக்கள், முறையே $f_1, f_2 \ldots\ldots\ldots\ldots f_\eta$ எனும் மீடிறன்களுடன் காணப்பட்டால் அவற்றின் இடை $\bar{x}$ ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{z=1}^{n} f_i x_z}{\sum_{z=1}^{n} f_2}$$

குறிப்படுத்தல் முறை

ஈட்டுக்களின் பெறுமதி மிகப்பெரிதாக இருக்குமிடத்து குறிப்படுத்தல் முறை மூலம் ஈட்டுக்கள் சிறிதாக்கப்படும்.

மீடிறன் பரம்பலொன்றில் மிகப்பெரிய ஈட்டு x_i இனால் தரப்படும் இடத்து அதன் சுருக்க ஈட்டு y_i ஆனது $y = \frac{c_z - a}{b}$ இனால் தரப்படும்.

இங்கு a - உத்தேசித்த இடை
b - வகுப்பாயிடையின் பருமன்

மேலும் x_i ஈட்டுக்களின் இடை $\bar{x}$ ஆகவும் y_z ஈட்டுக்களின் இடை $\bar{y}$ ஆகவும் இருப்பின் $\bar{x} = a + b\bar{y}$ ஆகும்.

உ + ம் :-

வகுப்பாயிடை	மீடிறன் (f)	நடுப்புள்ளி (x)	$y = \frac{x-a}{b}$	fy
0 - 10	3	5	-2	-6
10 - 20	4	15	-1	-4
20 - 30	7	25	0	0
30 - 40	5	35	1	5
40 - 50	1	45	2	2
	$\sum f = 20$			$\sum fy = -3$

$a = 25, \; b = 10$

$\bar{x} = a + b\bar{y}$

$= 25 + 10\left(\frac{-3}{20}\right)$

$= 25 - 1.5$

$= 23.5$

இடையம்

பருமன்களிற்கு ஏற்ப ஏறுவரிசையில் or இறங்குவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட எண் தொடையின் நடுப்பெறுமானம் இடையம் ஆகும்.

இடையம் = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ம் ஈட்டு

இங்கு η மொத்த ஈட்டுக்களின் எண்ணிக்கை

www.lkedu.lk

கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பல் ஒன்றின் இடையம்

(1) இடைய வகுப்பை துணிதல்

மீடிறன்களின் மொத்தத்தின் $\frac{1}{2}$ வாசியைக் கொண்டிருக்கும் திரள் மீடிறனுக்கு நேரொத்த வகுப்பு இடைய வகுப்பு ஆகும்.

(12) பின்வரும் சமன்பாட்டின் மூலம் இடையம் துணியப்படும்.

இடையம் $Me = \ell + \left\{\frac{\frac{N}{2} - c.f}{f_e}\right\} x d$

ℓ - இடைய வகுப்பின் கீழ் எல்லை

N - மீடிறன்களின் கூட்டுத்தொகை

C.*f* - இடையவகுப்புக்கு மேலேயுள்ள திரள்மீடிறன்

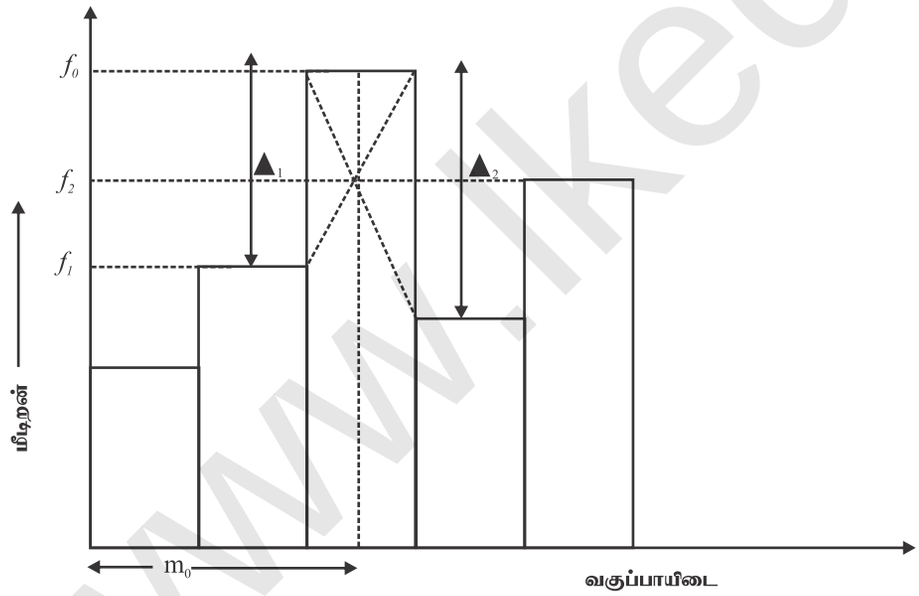
*f*e - இடையவகுப்பின் மீடிறன்

d - இடையவகுப்பின் பருமன்

ஆகாரம்

பரம்பலில் அதிக தடவைகள் தோன்றும் ஈட்டு ஆகாரம் எனப்படும்

கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பல் ஒன்றின் ஆகாரம்



ஆகாரம் $(M_0) = \ell + \left\{\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right\} d$

$$M_0 = \ell + \left\{\frac{(f_0 - f_1)}{(f_0 - f_1) + (f_0 - f_2)}\right\} d$$

ℓ - ஆகார வகுப்பின் கீழ் எல்லை

Δ_1 - ஆகார வகுப்பின் மீடிறனுக்கும் அதற்கு முந்திய வகுப்பின் மீடிறனுக்கும் இடையிலான வித்தியாசம்

Δ_2 - ஆகார வகுப்பின் மீடிறனுக்கும் அதற்கு அடுத்த வகுப்பின் மீடிறனுக்கும் இடையிலான வித்தியாசம்

d - ஆகார வகுப்பின் பருமன்

Note :- மைய நாட்ட அளவீடுகளுக்கு இடையிலான தொடர்பு
ஆகாரம் W 3 இடையம் - 2 இடை

www.ikedu.lk

விலகலின் அளவைகள்

1) வீச்சு
2) காலணைகள்
3) இடை விலகல்
4) நியமவிலகல்
5) மாறற்றிறன்

வீச்சு

பரம்பலிலுள்ள மிகப்பெரிய ஈட்டுக்கும் மிகச்சிறிய ஈட்டுக்கும் இடையிலுள்ள வித்தியாசம் வீச்சு எனப்படும்.

காலணைகள்

$1^{ம்}$ காலணை (கீழ்க்காலணை) தரவுகள் ஈட்டுக்கள் பருமனின் வரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தும் போது பரம்பலின் 25% இனது பெறுமானம் 1 ஆம் காலணை எனப்படும்.

கூட்டமாக்கப்படாத தரவுகளுக்கு n ஈட்டுக்கள் பரம்பலில் இருந்தால் $\frac{1}{4}(n+1)$ ஆவது ஈட்டு $1^{ம்}$காலணை எனப்படும்.

இவ்வாறே $Q_2 = \frac{1}{2}(n+1)$ ஆவது ஈட்டு

$Q_3 = \frac{3}{4}(n+1)$ ஆவது ஈட்டு

கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்றின் காலணைகள்

$$Q_1 = \ell + \left\{ \frac{\frac{N}{4} - c.f}{f_1} \right\} d$$

ℓ - 1ஆம் காலணை வகுப்பின் கீழ் எல்லை

N - மீடிறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$c.f$ - 1ஆம் காலணை வகுப்பிற்கு மேலேயுள்ள திரள் மீடிறன்

f_1 - 1ஆம் காலணை வகுப்பின் மீடிறன்

d - 1ஆம் காலணை வகுப்பின் பருமன்

இவ்வாறே

$$Q_2 = \ell + \left\{ \frac{\frac{N}{2} - c.f}{f_2} \right\} d$$

$$Q_3 = \ell + \left\{ \frac{\frac{3N}{4} - c.f}{f_3} \right\} d$$

காலணை இடைவீச்சு $= Q_3 - Q_1$

இடை விலகல்

ஏதாவது ஒரு ஏதேச்சை மாறிக்கும் அம்மாறியின் சராசரிப் பெறுமானத்திற்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடுகளின் இடையே இடை விலகல் எனப்படும்.

$x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ எனும் n எண்களின் இடைவிலகல் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$\text{இடை விலகல்} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x - \bar{x}|}{n}$$

இங்கு $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

www.lkedu.lk

$x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ எனும் எண்களின் மீடிறன்கள் முறையே $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ எனின் இடை விலகல் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$\text{இடைவிலகல்} = \frac{\sum_{z=1}^{h} f_1 |x_2 - \bar{x}|}{\sum_{z=i}^{h} f_1}$$

$$\text{இங்கு} = \bar{c} = \frac{\sum_{z=1}^{h} f_2 c_2}{\sum_{z=1}^{h} f_2}$$

நியமவிலகல்

விலகலின் அளவை அறிய நியம விலகல் ஓர் நல்ல அளவீடாகக் கருதப்படுகின்து.

$x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ எனும் ஈட்டுக்களின் நியம விலகல் σ ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$s = \left[\frac{\sum_{z=1}^{h} (x_i - \bar{x})^2}{h}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{இங்கு} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{z=1}^{h} x_2}{h}$$

$$s = \left[\frac{\sum_{z=1}^{h} (c_2 - \bar{c})^2}{h}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_{z=1}^{h} \frac{(c_z^2 - 2\bar{c}c_2 + \bar{x}^2)}{h}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{\sum_{z=1}^{h} c_2^2}{h} - 2\bar{c}\left(\frac{\sum_{z=1}^{n} c_2}{h}\right) + \frac{\bar{c}^{-2}}{h}\sum_{2=1}^{h} 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{\sum_{z=1}^{n} x_2^2}{h} - 2(\bar{c})^2 + \bar{c}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{\sum_{z=1}^{n} c_z^2}{h} - \bar{c}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

மீடிறன் பரம்பலுக்குரிய நியமவிலகல்

$$s = \left[\frac{\sum_{z=1}^{h} f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{z=1}^{h} f_i}\right] \qquad \text{இங்கு} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{z=1}^{h} f_i x_i}{\sum_{z=1}^{h} f_i}$$

or

$$s = \left[\frac{\sum_{z=1}^{h} f_z x_z^2}{\sum_{z=1}^{h} f_i} - \bar{x}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

www.lkedu.lk

மாறற்றிறன் = (நியம விலகல்)^2

மாறற்குணகம் = $\frac{\text{நியமவிலகல்}}{\text{இடை}} \times 100\%$

வெவ்வேறு பரம்பல்களின் மாறும் தன்மையை ஒப்பிட மாறற்குணகம் பயன்படும்.

அளவிடை மாற்றம்

$y=ax+b$ ஏகபரிமாண உருமாற்றச் சமன்பாடு

இங்கு x - ஆரம்ப ஈட்டு (மூல ஈட்டு)

y - புதிய ஈட்டு

a,b - மாறிலிகள்

மேலும் $\bar{y} = a\bar{x} + b$

$s_y = |a|s_x$ ஆகும்.

$y_i = ax_2 + b \qquad z = 1, h$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{z=1}^{h} y_2}{h}$$

$$= \frac{\sum_{z=1}^{h} (ac_z + b)}{h}$$

$$= \frac{a\sum_{z=1}^{h} c_z + b\sum_{z=1}^{h} 1}{h}$$

$$= a\bar{c} + b$$

$$s_y^2 = \frac{\sum_{z=1}^{h} y_2^2}{h} - \bar{y}^2$$

$$= \frac{\sum_{z=1}^{h} (ac_2 + b)^2}{h} - (a\bar{c} + b)^2$$

$$= \frac{a^2\sum_{z=1}^{h} c_2^2 + 2ab\sum_{z=1}^{h} c_z + b^2\sum_{z=1}^{h} 1}{h} - \left(a^2\bar{c}^2 + 2ab\bar{c} + b^2\right)$$

$$= a^2\sum_{z=1}^{h} c_2^2 + 2ab\bar{c} + b^2 - (a^2\bar{c}^2 + 2ab\bar{c} + b^2)$$

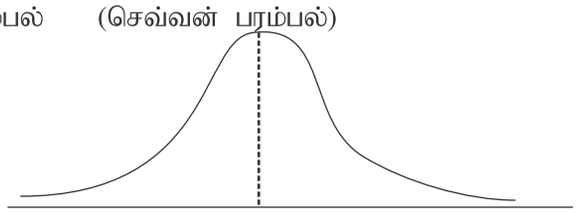
$$= a^2\left\{\frac{\sum_{z=1}^{h} c_z^2}{h} - \bar{c}^2\right\}$$

$= a^2 s_c^2 \Rightarrow s_y = |a|s_x$

www.lkedu.lk

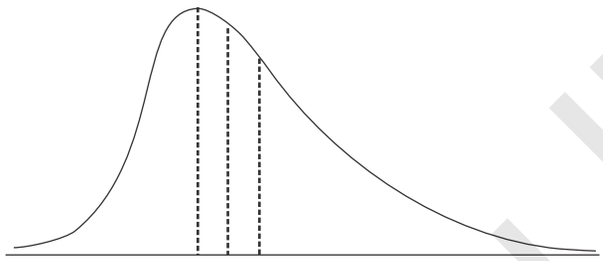
பரம்பலின் வடிவங்கள்

(01) மணி வடிவ சமச்சீர் பரம்பல் (செவ்வன் பரம்பல்)



ஆகாரம்
இடையம்
இடை

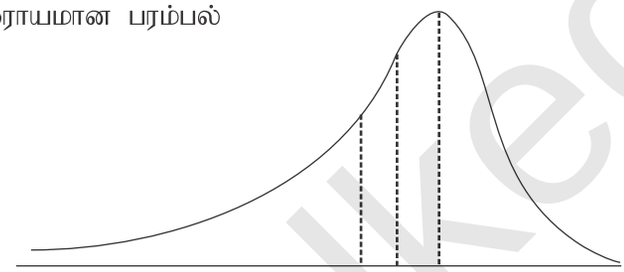
(02) நேரான ஓராயமான பரம்பல்



$M_0 M_e \bar{x}$

ஆகாரம் < இடையம் < இடை

(03) மறையான ஓராயமான பரம்பல்



$\bar{x}\ M_e\ M_0$

இடை < இடையம் < ஆகாரம்

$\bar{x} M_2 M_0$

பியர்சனின் ஓராயக் குணகம் = $\frac{\text{இடை-ஆகாரம்}}{\text{நியமவிலகல்}}$

ஆகாரம் ≏ 3 இடையம் - 2 இடை

பி. ஓ. கு ≏ $\frac{3\ (\text{இடை} - \text{இடையம்})}{\text{நியமவிலகல்}}$

காலணை ஓராயக் குணகம் = $\frac{(Q_3 - Q_2) _ (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)}$

குறிப்பு: (1) ஓராயக் குணகம் 0 ஆக இருந்தால் சமச்சீர்ப் பரம்பல்
(2) ஓராயக் குணகம் (+) குறியாக இருந்தால் நேரான ஓராயனமான பரம்பல்
(3) ஓராயக்குணகம் (-) குறியாக இருந்தால் மறையான ஓராயமான பரம்பல்

www.ikedu.lk

01. x_1 , x_2 .....x_{10} எனும் ஈட்டுக்களின் இடை 20 எனில் x_1+4, x_2+8, ...x_{10}+40 என்னும் பரம்பலின் இடை யாது.

$$\frac{\sum_{z=1}^{10} x_2}{10} = 20$$

$$\sum_{z=1}^{10} x_1 = 200$$

$$4+8+12+.....+40 = \frac{10}{2}(4+40)$$

$$= 220$$

பரம்பலின் இடை $$= \frac{\sum_{z=1}^{10} x_2 + (4+8+12+.....+40)}{10}$$

$$= \frac{200+220}{10}$$

$$= 42$$

02. 82 பிள்ளைகளின் உயரம் x ஆனது பின்வரும் தொடர்பால் பெறப்படுகின்றது.

$\sum_{z=1}^{82} (c_z - 130) = -287$ உயரங்களின் இடையைக் காண்க.

$$\sum_{z=1}^{82} (x_2 - 130) = -287$$

$$\sum_{z=1}^{82} x_z - \sum_{z=1}^{82} 130 = -287$$

$$\sum_{z=1}^{82} x_z - 130 \times 82 = -287$$

$$\sum_{z=1}^{82} x_z = 10373$$

இடை $$= \frac{\sum_{z=1}^{82} x_z}{82} = \frac{10373}{82} = 126.5$$

03. 3, 6,9,12, 4,6,8,10,12,14, x,y என்ற 12 அவதானிப்புக்களின் ஆகாரம் 6 உம் இடை 8 உம் எனின் x,y இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. 12 எண்களினதும் இடையத்தைக் காண்க.

$$8 = \frac{3+6+9+12+4+6+8+10+12+14+x+y}{12}$$

$$96 = 84 + x + y$$

$$x + y = 12$$

ஆகாரம் 6 ஆதலால் x or y 6ஆதல் வேண்டும்.

$x = 6 \Rightarrow y = 6$

$y = 6 \Rightarrow x = 6$

ஈட்டுக்களை ஏறுவரிசையில் எழுதினால் 3,4,6,6,6,6,8,9,10,12,12,14

இடையம் $$= \frac{1}{2}(12+1)$$ ஆவது ஈட்டு

$$= \frac{6+8}{2}$$

$$= 7$$

www.lkedu.lk

04. 20 மாணவர்கள் இணைந்த கணித வினாத்தாளிற்குப் பெற்றுக் கொண்ட புள்ளிகள் இடை 40 ஆகும். மாணவர்கள் பெற்றுக் கொண்ட குறைந்த ஆறு புள்ளகளின் இடை 25 ஆகும். மாணவர்கள் பெற்றுக் கொண்ட உயர்ந்த ஆறு புள்ளிகள் 70, 71, 72, 74, 75, 78, ஆகும்.

1) எஞ்சிய எட்டு மாணவர்களினதும் புள்ளிகளின் இடை
2) எல்லாப் புள்ளிகளினதும் மூன்றாம் காலணையும் காண்க.

20 மாணவர்கள் பெற்ற மொத்தப் புள்ளிகள் $= 20 \times 40$

$= 800$

குறைந்த 6 புள்ளிகளின் கூட்டுத் தொகை $= 25 \times 6$

$= 150$

உயர்ந்த 6 புள்ளிகளின் கூட்டுத்தொகை $= 70+71+72+74+75+78$

$= 440$

எஞ்சிய 8 மாணவர்களும்பெற்ற புள்ளிகளின் இடை $= \dfrac{800 - (440+150)}{8}$

$= \dfrac{210}{8}$

$= 26.25$

..... 70, 71, 72,74, 75, 78

↑

15 ஆவது ஈட்டு

$Q_3 = \frac{3}{4}(20+1)$ ஆவது ஈட்டு

$= 15\frac{3}{4}$ ஆவது ஈட்டு

$= 70+\frac{3}{4}(71-70)$

$= 70+0.75$

$= 70.75$

05) $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots x_n$ என்னும் n எண்களின் நியமவிலகல் 6 ஆகும். $\sum_{z=1}^{n} x_z^2 = 1620$, $\sum_{z=1}^{n} x_2 = 108$ எனத் தரப்படின் n இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$\bar{c} \dfrac{\sum x}{n} = \dfrac{108}{n}$

$s^2 = \dfrac{\sum x^2}{n} - \bar{c}^2$ ஐ பயன்படுத்த

$36 = \dfrac{1620}{n} - \left(\dfrac{108}{n}\right)^2$

$1 = \dfrac{45}{n} - \dfrac{324}{n^2}$

$n^2 - 45n + 324 = 0$

$(n-36)(n-9) = 0$

$n - 36 = 0$ or $n - 9 = 0$

$n = 36$ or $n = 9$

www.lkedu.lk

06. a,b,8,5,10 என்னும் எண்களின் இடை 6 உம் மாறற்றிறன் 6.8உம் ஆகும். a,b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க..

$$\frac{a+b+8+5+10}{5}=6$$

$a+b=7$ ® (1)

$s^2=\frac{Sc^2}{h}-\bar{c}^2$ ஐ பயன்படுத்த

$$6,8=\frac{a^2+b^2+8^2+5^2+10^2}{5}-6^2$$

$34=a^2+b^2+189-180$

$a^2+b^2=25$ ® (2)

(i),(2) ® $a^2+(7-a)^2=25$

$2a^2-14a+24=0$

$a^2-7a+12=0$

$(a-4)(a-3)=0$

$a-4=0$ or $a-3=0$

$a=4$ or $a=3$

07. 2,3,6,9,ஆகிய 4 எண்களினதும் இடையையும் மாறற்றிறனையும் காண்க. a,b என்னும் இரு எண்கள் சேர்க்கப்பட இடை 1 இனாலும் மாறற்றிறன் 2.5 இனாலும் அதிகரித்தது. a,b ஐக் காண்க.

$$\bar{c}=\frac{2+3+6+9}{4}=\frac{20}{4}=5$$

$\sum c^2=2^2+3^2+6^2+9^2$

$=130$

$s^2=\left\{\frac{\sum c^2}{h}-\bar{c}^2\right\}$ ஐ பயன்படுத்த

$=\left\{\frac{130}{4}-5^2\right\}$

$=\left\{\frac{30}{4}\right\}$

$=7.5$

புதிய தொகுதி = {2,3,6,9,a,b}

புதிய இடை = 5+1=6

புதிய மாறற்றிறன் = 7.5+2.5 = 10

$$\frac{20+a+b}{6}=6$$

$a+b=16$ ® (1)

$s^2=\frac{\sum c^2}{h}-\bar{c}^2$ ஐ பயன்படுத்த

$$10=\frac{130+a^2+b^2}{6}-6^2$$

$a^2+b^2=146$ ® (2)

(1),(2) Þ $a^2+(16-a)^2=146$

$a^2-16a+55=0$

$(a-11)(a-5)=0$

$a=11$ or $a=5$

$a=11$ Þ $b=5$

$a=5$ Þ $b=11$

www.lkedu.lk

08. 14,17,x,4x5y,19 என்ற தொகுதியின் இடை16 உம் ஆகாரம் 19 உம் ஆகும். இங்கு o<y<x<19 ஆகுமாறு x,y இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$16 = \frac{14+17+c+4c-5y+19}{5}$$

$$80 = 50+5x-5y$$

$$c-y = 6 \text{ ® } (1)$$

ஆகாரம் 19 மற்றும் $x < 19$ ஆதலால்

4x-5y=19 ஆதல் வேண்டும். → (2)

(1), (2) $\Rightarrow x = 11,\ y = 5$

09. 2,4,7,x,y,15 என்ற எண்கள் ஏறு வரிசையில் உள்ளன. இவற்றின் இடை 8 ஆகும். x,y இரட்டை எண்கள் எனின் x,y ஐக் காண்க.

$$8 = \frac{2+4+7+c+y+15}{6}$$

$$c+y = 20$$

$$c = 8 \text{ Þ } y = 12$$

$$c = 10 \text{ Þ } y = 10'$$

$$c = 12 \text{ Þ } y = 8'$$

$c < y$ ஆதலால்

$c = 8, y = 12$

10. 4,6,12,4,10,12,3,x,y ஆகிய எண்களின் இடை 7 உம் ஆகாரம் 4 உம் ஆகும்.

1) x,y இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
2) 9 எண்களினதும் இடையத்தைக் காண்க.
3) மேலேயுள்ள 9 எண்களுடன் (7+η), (7-η) ஆகிய எண்கள் சேர்க்கப்பட்ட போது 11 எண்களினதும் நியமவிலகல் 4 எனில் η இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(1) $\frac{c+y+51}{9} = 7$

$$c+y = 12$$

ஆகாரம் 4 ஆதலால் x or y இன் பெறுமானம் 4 ஆதல் வேண்டும்.

$x = 4 \Rightarrow y = 8$

$y = 4 \Rightarrow x = 8$

ஈட்டுக்களை ஏறுவரிசையில் எழுதினால்

3, 4, 4, 4 ,6, 8, 10, 12, 12

(1) இடையம் = 5 ஆவது ஈட்டு

= 6

(2) 11 எண்களினதும் இடை $= \frac{63+(7-h)+(7+h)}{9+2}$

$$= \frac{77}{11} = 7$$

www.lkedu.lk

$$\sum c^2 = 3^2+4^2+4^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2+12^2+(7-h)^2+(7+h)^2$$
$$= 643+2h^2$$
$$s^2 = \left[\frac{\sum c^2}{h} - \bar{c}^2\right] \text{ஐ பயன்படுத்த}$$
$$4^2 = \frac{643+2h^2}{11} - 7^2$$
$$2h^2 = 72$$
$$h^2 = 36 \quad h = \pm 6$$

11. ஒரு கிராமத்திலுள்ள 22 ஆண்களின் வயதுப் பரம்பல் பின்வருமாறு.

வயது	10 -20	20-30	30-40	40-50
ஆண்களின் எண்ணிக்கை	x	10	y	2

பரம்பலின் ஆகாரம் 24 எனின் x,y இனைக் காண்க. பரம்பலின் இடையத்தையும் காண்க.

$x+10+y+2=22$

$x+y=10 \rightarrow (1)$

ஆகாரம் 24 ஆதலால் ஆகார வகுப்பு = 20 - 30

$$M_0 = \ell + \left[\frac{A_1 D_1}{D_1+D_2}\right] d$$
$$24 = 20 + \left[\frac{(10-c)}{(10-c)+(10-y)}\right] 10$$
$$\frac{4}{10} = \frac{10-c}{10-c+c} \quad (\text{by}(1))$$
$$40 = 100-10c$$
$$c = 6,\ y = 4$$

இடைய வகுப்பு $= \frac{1}{2}$ (22) ஆவது ஈட்டு

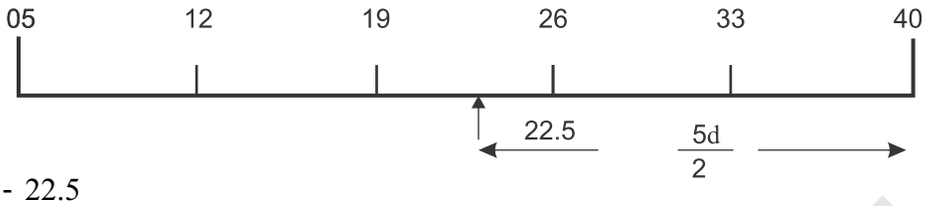
=20 - 30

$$Me = \ell + \left[\frac{\frac{N}{2} - c}{fe}\right] d$$
$$= 20 + \left[\frac{\frac{22}{2} - 6}{10}\right] 10$$
$$= 20+5$$
$$= 25$$

www.lkedu.lk

12. ஒரு மீடிறன் அட்டவணை சம அகலமுள்ள ஐந்து வகுப்பாயிடைகளை உடையது. மூன்றாம் வகுப்பின் நடுப்புள்ளி 22.5 ஆகும். ஐந்தாம் வகுப்பாயிடையின் மேல் வகுப்பெல்லை 40 ஆகும். முதல் வகுப்பாயிடையிலிருந்து தொடங்கி வரிசையாக வகுப்பாயிடைகளின் மீடிறன் 7, 19, 27, 15,2 ஆகும். பரம்பலின் ஆகாரத்தைக் காண்க.

வகுப்பாயிடையின் பருமன் d என்க.



$$\frac{5d}{2} = 40 - 22.5$$

$$5d = 35$$

$$d = 7$$

$$M_0 = \ell + \left\{\frac{D_1}{D_1 + D_2}\right\} d$$

$$= 19 + \left\{\frac{(27 - 19)}{(27 - 19) + (27 - 15)}\right\} 7$$

$$= 19 + \frac{56}{20}$$

$$= 19 + 2.8$$

$$= 21.8$$

Method - II

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்
a - a + d	7
a + d - a+2d	19
a+2d- a+3d	27
a+3d-a+4d	15
a+4d- a+5d	2

$$\frac{a + 2d + a + 3d}{2} = 22.5$$

$$\left.\begin{aligned} 2a + 5d &= 45 \\ a + 5d &= 40 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 5, d = 7$$

13. 20 பொருட்களின் நீளம் (x) நிறை (y) அளவிடப்பட்டு பெறப்பட்ட பெறுபேறுகள் பின்வருமாறு $\sum x = 200$, $\sum x^2 = 2080$, $\sum y = 240$, $\sum y^2 = 3060$ எனின் நீளமா நிறையா கூடுதலாக மாறுகின்றது. விளக்குக.

$$\bar{c} = \frac{\sum c}{h} = \frac{200}{20} = 10$$

$$sc = \left\{\frac{\sum c^2}{h} - \bar{c}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\frac{2080}{20} - 10^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \{104 - 100\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2$$

www.lkedu.lk

மாறல் குணகம் (நீளம்) $= \frac{sc}{\bar{c}} = \frac{2}{10} = 0.20$

நிறை (y)

$Sy = 240 \qquad Sy^2 = 3060 \qquad h = 20$

$\bar{y} = \frac{Sy}{h} = \frac{240}{20} = 12$

$$sy = \left\{\frac{Sy^2}{h} - \bar{y}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\frac{3060}{20} - 12^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \{153 - 144\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3$$

மாறல் குணகம் (நிறை)$= \frac{sy}{\bar{y}} = \frac{3}{12} = 0.25$

மாறல்குணகம் (நிறை)> மாறல் குணகம் (நீளம்)

14. ஏகபரிமாணச் சார்பு $f(x) = ax + b$, $\times = \{1,2,3,5,8,11\}$ என்ற தொடையிலுள்ள மூலகங்களைத் தொடை y இற்கு மாற்றுகின்றது. $f(5) = 13, f(1) = 5$ எனின்

(1) f ஐக் காண்க.

(2) x இன் இடையையும் மாறற்றிறனையும் காண்க.

(3) இதிலிருந்து y இன் இடையையும் மாறற்றிறனையும் காண்க.

(1) $f(c) = ac + b$

$f(5) = 5a + b = 13 \quad \text{®} \ (1)$

$f(1) = a + b = 5 \quad \text{®} \ (2)$

$(1),(2) \text{ Þ } a = 2, b = 3$

$f(c) = 2c + 3$

(2) $x = \{1, 2, 3, 5, 8, 11\}$

$\bar{c} = \frac{1+2+3+5+8+11}{6} = \frac{30}{6} = 5$

$sc^2 = \frac{S(c - \bar{c})^2}{h}$ ஐப் பயன்படுத்த

$$= \frac{(1-5)^2 + (2-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (8-5)^2 + (11-5)^2}{6}$$

$$= \frac{74}{6}$$

$$= 12.33$$

www.lkedu.lk

$y = ac + b = 2c + 3$

$\bar{y} = 2\bar{c} + 3$

$= 2 \times 5 + 3$

$= 13$

$sy^2 = 2^2 sc^2$

$= 4 \times 12.33$

$= 49.32$

15. 6,10,14,18,27 ஆகிய எண்களின் இடைவிலகலைக் காண்க.

$$\bar{c} = \frac{6+10+14+18+27}{5}$$

$$= \frac{75}{5}$$

$$= 15$$

$$\text{இடைவிலகல்} = \frac{S|c - \bar{c}|}{h}$$

$$= \frac{|16-15| + |10-15| + |14-15| + |18-15| + |27-15|}{5}$$

$$= \frac{9+5+1+3+12}{5}$$

$$= \frac{30}{5}$$

$$= 6$$

16. ஏழுமுழுஎண்களின் ஒரு தொடை S ஆனது பின்வருமாறு ஏறு வரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தப் பட்டுள்ளது.

$S = \{1, 2, 4, x, y, 11, 13\}$ y ஆனது

எண்களின் இடையெனின் x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைத் துணிக. எண்களின் மாறற்றிறன் $\frac{120}{7}$ எனக் காட்டுக.

$S = \{1, 2, 4, x, y, 11, 13\}$

$$y = \frac{1+2+4+c+y+11+13}{7}$$

$6y - c = 31$

$c = 4 \Rightarrow y = \frac{35}{6}$

$c = 5 \Rightarrow y = 6$

$c = 6 \Rightarrow y = \frac{37}{6}$

$\therefore c = 5, \quad y = 6$

www.lkedu.lk

Method II

$4 \le x \le 11$

$4 \le 6y - 31 \le 11$

$35 \le 6y \le 42$

$\therefore y = 6$ or 7

$y = 6 \Rightarrow x = 5$ ✓

$y = 7 \Rightarrow x = 11 \times (\because x < y)$

$\therefore x = 5,\ y = 6$ பொருத்தமான பெறுமானங்கள்

$$s^2 = \frac{S(c - \bar{c})^2}{h}$$

$$= \frac{(1-6)^2 + (2-6)^2 + (4-6)^2 + (5-6)^2 + (6-6)^2 + (11-6)^2 + (13-6)^2}{7}$$

$$= \frac{1}{7}\{25 + 16 + 4 + 1 + 0 + 25 + 49\}$$

$$= \frac{120}{7}$$

17. ஐந்து நோக்கல்களின் இடையும் இடையமும் முறையே 7, 9 ஆகும். நோக்கல்களின் ஒரே ஆகாரம் 11 ஆகும். நோக்கல்கள் எல்லாம் நேர் நிறையெண்கள் எனக் கொண்டு மிகப் பெரிய நோக்கலையும் மிகச் சிறிய நோக்கலையும் காண்க.

நோக்கல்களின் இடையம் 9 ஆகவும் ஒரே ஆகாரம் 11 ஆகவும் இருப்பதால் நோக்கல்களை பின் வருமாறு எழுதலாம்.

x, y, 9, 11, 11

$$7 = \frac{c + y + 9 + 11 + 11}{5}$$

$c + y = 4$

$c = 1 \Rightarrow y = 3$

$c = 2 \Rightarrow y = 2$ (∵ ஆகாரம் 11)

$c = 3 \Rightarrow y = 2$ (∵ $c < y$)

எனவே நோக்கல்கள் 1, 3, 9, 11,11

மிகச் பெரிய நோக்கல் = 11

மிகச் சிறிய நோக்கல் = 1

18. பின்வரும் 8 நோக்கல்களின் இடையும் ஆகாரமும் முறையே 4, 6 ஆகும்.

$2, 3, 6, 2, 1, x, y, z$

இங்கு x,y,z ஆகியன மெய்யெண்கள்x,y,z இன் பெறுமானங்களைக் கண்டு எட்டு நோக்கல்களினதும் நியமவிலகலைக் காண்க.

$$4 = \frac{2 + 3 + 6 + 2 + 1 + c + y + z}{8}$$

$$c + y + z = 18$$

ஆகாரம் 6 ஆதலால் x,y,z இல் இரண்டின் பெறுமானங்கள் 6 ஆக இருக்க வேண்டும்

$\Rightarrow x = y = z = 6$

$$s = \left\{\frac{S(c - \bar{c})^2}{h}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\frac{(2-4)^2 + (3-4)^2 + (6-4)^2 + (2-4)^2 + (1-4)^2 + 3(6-4)^2}{h}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\frac{34}{8}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\frac{17}{4}\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

19. 8 ஈட்டுக்களைக் கொண்ட ஒரு தரவுத் தொகுதியில் ஈட்டுக்கள் $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_8$ ஆகும்.

$\sum_{2=1}^{8} c_2^2 = 272$, $\sum_{2=1}^{8} c_2 = 40$ எனின்

நியமவிலகலைக் காண்க. தரவுத் தொகுதியுடன் மேலும் ஒரு ஈட்டு x சேர்க்கப்படும் போது அவற்றின் நியமவிலகல் $2\sqrt{2}$ எனின் x ஐக் காண்க.

$s = \left\{\frac{Sc^2}{h} - \bar{c}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ ஐ பயன்படுத்த

$$= \left\{\frac{272}{8} - \left(\frac{40}{8}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \{34 - 25\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3$$

$s^2 = \frac{Sc^2}{h} - \bar{c}^2$ ஐ பயன்படுத்த

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{272 + c^2}{9}\right) - \left(\frac{40 + c}{9}\right)^2$$

$$8 \times 81 = 9(272 + x^2) - (1600 + 80x + x^2)$$

$$648 = 2448 - 1600 + 8x^2 - 80x$$

$$8x^2 - 80x + 200 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$(x-5)^2 = 0$$

$$x = 5$$

20. 1,2,3,4,5 என இலக்கமிடப்பட்ட ஐந்து சம ஆரைச்சிறைகளைக் கொண்ட ஒரு சுழலும் வட்ட இலக்குப் பலகையில் ஓர் அம்பு எய்யப்படுகிறது. ஒவ்வோர் ஆரைச்சிறையிலும் அம்பு படும் தடவைகளின் எண்ணிக்கையைப் பின்வரும் மீடிறன் அட்டவணை காட்டுகின்றது.

எண்	1	2	3	4	5
மீடிறன்	1	p	q	5	2

தரவுகளின் இடையும் மாறற்றிறனனும் முறையே 3, $\frac{6}{5}$ எனத் தரப்பட்டிருப்பின் p, q இனைக் காண்க.

www.lkedu.lk

$$\bar{c} = \frac{\Sigma fc}{\Sigma f}$$

$$3 = \frac{1+2p+3q+20+10}{8+p+q}$$

$$24+3(p+q) = 2p+3q+31$$

$$P = 31 - 24$$

$$p = 7$$

$$s^2 = \frac{\Sigma fc^2}{\Sigma f} - \bar{c}^2 \quad \text{ஐப் பயன்படுத்த}$$

$$\frac{6}{5} = \frac{1.1^2+7.2^2+9.3^2+5.4^2+2.5^2}{15+q} - 3^2 (p=7)$$

$$\frac{6}{5}+9 = \frac{159+9q}{15+q}$$

$$\frac{51}{5} = \frac{159+9q}{15+q}$$

$$51 \times 15 + 51q = 5x159 + 45q$$

$$6q = 5x159 - 51 \times 3 \times 5$$

$$= 5\{159 - 153\}$$

$$6q = 5 \times 6$$

$$q = 5$$

21. 1,2,3,4,5,6,7 ஆகிய எண்களின் நியமவிலகல் 2 எனக்காட்டுக. இம்முடிவை உபயோகித்துப் பின்வரும் எண்களின் நியமவிலகலைக் காண்க.
(1) 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107
(2) 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700
(3) 2.01, 3.02, 4.03, 4.04, 6.05, 7.06

$$\bar{c} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\Sigma c^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2 = 140$$

$$s = \left(\frac{\Sigma c^2}{h} - \bar{c}^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ ஐப் பயன்படுத்த}$$

$$= \left(\frac{140}{7} - 4^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (4)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2$$

1) 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107

$100+1, 100+2, 100+3, 100+4, 100+5, 100+6, 100+7$

இடை $= \frac{101+102+103+104+105+106+107}{7}$

$$= \frac{700+28}{7}$$

$$= 100+4$$

$$= 104$$

நியம விலகல் $= 2$

www.lkedu.lk

2) 100, 200, 300, 400,500, 600, 700

இடை $= 4 \times 100 = 400$

நியம விலகல் $= 2 \times 100 = 200$

3) 2.01, 3.02, 4.03, 5.04, 6.05, 7.06, 8.07

$y = ax + b$

$2.01 = a \times 1 + b \rightarrow (1)$

$3.02 = a \times 2 + b \rightarrow (2)$

$(2) - (1) \Rightarrow 1.01 = a$

$b = 1$

$y = 1.01c + 1$

$\bar{y} = 1.01\bar{c} + 1$

$= 1.01 \times 4 + 1$

$= 5.04$

$s_y = 1.01 s_c$

$= 1.01 \times 2$

$= 2.02$

22. 100 நோக்கல்களின் இடையும் நியம விலகலும் முறையே 30, 41 எனக் கணிக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு நோக்கல் சரியான பெறுமானம் 30 இற்குப் பதிலாக 40 எனப் பிழையாக பதிவு செய்யப்பட்டிருப்பதாகப் பின்னர் காணப்பட்டுள்ளது. 100 நோக்கல்களினதும் சரியான இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க.

பிழையான தொகுதிற்கு

$\bar{c} = \frac{Sc}{h}$ $\qquad$ $s^2 = \frac{Sc^2}{h} - \bar{c}2$

$30 = \frac{Sc}{100}$ $\qquad$ $41^2 = \frac{Sc^2}{100} - 30^2$

$Sc = 3000$ $\qquad$ $Sc^2 = 258100$

திருத்தமான தொகுதிக்கு

$\bar{c}_N = \frac{3000 - 40 + 30}{100}$

$= \frac{2990}{100}$

$= 29.9$

$s_N = \left\{ \frac{258100 - 40^2 + 30^2}{100} - 29.9^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{2574 - 894.01\}^{\frac{1}{2}}$

$= (1679.99)^{\frac{1}{2}}$

$= 40.9$

www.lkedu.lk

23. 100 குடும்பங்களின் தினசரி செலவு பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

தினசரி செலவு ரூபா	400 - 600	600 - 800	800 - 1000	1000 - 1200	1200 - 1400
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	50	x	500	y	50

பரம்பலின் இடையம் ரூ.900 எனின் $x.y$ இன் பெறுமானங்களைக் கண்டு, பரம்பலின் இடை ரூ 900 எனக் காட்டுக.

$50+x+500+y+50=1000$

$x+y=400$

இடையம் 900 ஆகையால் இடைய வகுப்பு

$= 800-1000$

$$M_e = \ell + \left\{\frac{\frac{N}{2} - C}{fe}\right\} xd$$

$$900 = 800 + \left\{\frac{\frac{1000}{2} - (50+c)}{500}\right\} 200$$

$$\frac{100 \times 5}{2} = 500 - (50+c)$$

$$c = 200, \quad y = 200$$

பரம்பல் சமச்சீரானது ஆகையால்

இடை = இடையம் = 900

24. ஒரு குறித்த பரீட்சையில் பரீட்சார்த்திகள் பெற்ற புள்ளிகளின் இடை 45 ஆகும். இப்புள்ளிகள் ஓர் இடை 50 ஐயும் ஒரு நியம விலகல் 15 ஐயும் தருமாறு ஏக பரிமாண முறைப்படி அளவிடைப் படுத்தப் பட வேண்டியுள்ளன.

அளவிடைப்படுத்திய புள்ளி 68 ஆனது தொடக்கப்புள்ளி 60 ஐ ஒத்ததெனத் தரப்பட்டுள்ளது. தொடக்கப் புள்ளிகளின் நியம விலகலைக் கணிக்குக. ஒரு பரீட்சார்த்தியினால் பெறப்பட்ட தொடக்கப் புள்ளி m ஆனது மேற்குறித்த அளவிடைப்படுத்தலால் குறைக்கப்படவில்லை என மேலும் தரப்பட்டுள்ளது. $m \geq 20$எனக் காட்டுக.

ஏக பரிமாண அளவிடை மாற்றம்

$y = ac + b \quad \text{®} (1)$

$\bar{y} = a\bar{c} + b \quad \text{®} (2)$

$sy = asc \quad \text{®} (3)$

$c = 60 \qquad y = 68$

$(1) \text{Þ } 68 = 60a + b \quad \text{®} (4)$

$\bar{c} = 45 \qquad \bar{y} = 50$

$(2) \text{Þ } 50 = 45a + b \text{ ®} (5)$

$(4),(5) \text{Þ } a = \frac{6}{5}, b = -4$

$(3) \text{Þ } 15 = \frac{6}{5} sc$

$6c = \frac{75}{6} = 12.5$

$y = \frac{6}{5} c - 4$

$c = m \text{Þ } y = \frac{6}{5} m - 4$

ஆனால் $y \geq m$

$\frac{6}{5} m - 4 \geq m$

$\frac{1}{5} m \geq 4$

$m \geq 20$

www.ikedu.lk

25. 100 தொழில்நுட்பக் கல்லூரி மாணவர்களைக் கொண்ட குழு ஒன்று ஒரு பெருந்தெருவின் ஒரு குறித்த பகுதியின் நீளத்தை அளந்து பெற்ற அளவீடுகள் பின்வரும் மீடிறன் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

நீளம் (x) மீற்றர்	99.8	99.9	100.0	100.1	100.2	100.3	100.4
மீடிறன் (f)	5	7	12	33	25	15	3

ஓர் எடு கொண்ட இடை $a = 100.1$ இற்கும்
$b=0.1$ இற்கும் உரு மாற்றம்

$y = \frac{c - a}{b}$ ஐப் பயன்படுத்தி y, fy, fy^2 ஆகியவற்றின் ஒத்த பெறுமானங்களை உள்ளடக்குமாறு மேற்குறித்த அட்டவணையை விரிவுபடுத்துக. y இன் இடையைக் கண்டு இதிலிருந்து x இன் இடை 100.123 எனக் காட்டுக.

$\sqrt{1.917} \approx 1.385$ எனக் கொண்டு மீடிறன் பரம்பலின் நியம விலகலைச் சரியாக மூன்று தசம தானங்களுக்கு கணிக்குக.

நீளம் (x)	**மீடிறன்** (f)	$y = \frac{c - a}{b}$	(fy)	(fy^2)
99.8	5	-3	-15	45
99.9	7	-2	-14	28
100.0	12	-1	-12	12
100.1	33	0	0	0
100.2	25	1	25	25
100.3	15	2	30	60
100.4	$\frac{03}{\Sigma f = 100}$	3	$\frac{09}{\Sigma fy = 23}$	$\frac{27}{\Sigma fy^2 = 197}$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma fy}{\Sigma f} = \frac{23}{100} = 0.23$$

$$y = \frac{c - a}{b}$$
$$c = a + b\bar{y}$$
$$\bar{c} = a + b\bar{y}$$
$$= 100.1 + (0.1)(0.23)$$
$$= 100.123$$

$$s_c = b s_y$$
$$= b\left\{\frac{\Sigma fy^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fy}{\Sigma f}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= 0.1\left\{\frac{197}{100} - \left(\frac{23}{100}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= 0.1\{1.97 - 0.0529\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= 0.1\{1.9171\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= 0.1 \times 1.385$$
$$= 0.1385$$
$$= 0.139 \text{ (3 தசமதானங்களுக்கு)}$$

26. குறித்த மின்குமிழ் தொழிற்சாலை ஒன்றின் பயப்பிலிருந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்பட்ட 200 மின்குமிழ்களைக் கொண்ட மாதிரி ஒன்றின் ஆயுட்காலங்களின் கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலைப் பின்வரும் அட்டவணையைத் தருகின்றது.

ஆயுட்காலம் (வாரங்களில்)	மின்குமிழ்களின் எண்ணிக்கை
95-99	10
90-94	14
85-89	16
80-84	21
75-79	35
70-74	41
65-69	38
60-64	15
55-59	7
50-54	3

a. இவ்வாயுட் காலங்களின்
   1) இடையம்
   2) கீழ்க்காலணை (Q_1)
   3) மேற்காலனை (Q_3) ஆகியவற்றை ஒரு தசமதானத்திற்கு மதிப்பிடுக.

   இப்பரம்பலின் வடிவம் யாது?

b. இப்பரம்பலின்
   (1) இடை
   (2) நியமவிலகல்
   (3) ஓராயக் குணகம் ஆகியவற்றை ஒரு தசமதானத்திற்கு மதிப்பிடுக.

a.=72, b=5

ஆயுட் காலம்	மி.கு.எ (f)	திரள் மீடிறன்	நடுப் புள்ளி (x)	$y = \frac{c - a}{b}$	fy	fy^2
50-54	3	3	52	-4	-12	48
55-59	7	10	57	-3	-21	63
60-64	15	25	62	-2	-30	60
65-69	38	63	67	-1	-38	38
70-74	41	104	72	0	0	0
75-79	35	139	77	1	35	35
80-84	21	160	82	2	42	84
85 - 89	16	176	87	3	48	134
90 - 94	14	190	92	4	56	224
95 - 99	$\frac{10}{Sf = 200}$	200	97	5	$\frac{50}{Sfy = 130}$	$\frac{250}{Sfy^2 = 946}$

www.lkedu.lk

இடைய வகுப்பு $= \frac{1}{2}(200)$ ஆவது ஈட்டு

$= 100$ ஆவது ஈட்டு

$= 70 - 74$

இடைய வகுப்பின் உண்மை எல்லை = 69.5- 74.5

$$M_e = \ell + \left(\frac{\frac{N}{2} - c.f}{f_e}\right) d$$

$$= 69.5 + \left(\frac{\frac{200}{2} - 63}{41}\right) 5$$

$$= 69.5 + \frac{185}{41}$$

$$= 69.5 + 4.51$$

$$= 74.01$$

$= 74$ (1 ஆம் தசமதானத்திற்கு)

$Q_1 = \frac{1}{4}(200)$ ஆவது ஈட்டு

$= 50$ ஆவது ஈட்டு

$= 65 - 69$

Q_2 வகுப்பின் உண்மை எல்லை = 64.5- 69.5

$$Q_1 = \ell + \left(\frac{\frac{N}{4} - c.f}{f_1}\right) d$$

$$Q_1 = 64.5 + \left(\frac{\frac{200}{4} - 25}{38}\right) 5$$

$$= 64.5 + \frac{125}{38}$$

$$= 64.5 + 3.28$$

$$= 67.78$$

$= 67.8$ (1 ஆம் தசமதானத்திற்கு)

$Q_3 = \frac{3}{4}(200)$ ஆவது ஈட்டு

$= 75$ ஆவது ஈட்டு

$= 80 - 84$

Q_3 வகுப்பின் உண்மை எல்லை 79.5 - 84.5

www.lkedu.lk

$$Q_3 = \ell + \left\{ \frac{\frac{3N}{4} - c.f}{f3} \right\} d$$

$$= 79.5 + \left\{ \frac{\frac{600}{4} - 139}{21} \right\} 5$$

$$= 79.5 + 2.61$$

$$= 82.11$$

$$= 82.1 \text{ (1ம் தசம தானத்திற்கு)}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma fy}{\Sigma f} = \frac{130}{200} = 0.65$$

$$\bar{c} = a + b\bar{y}$$

$$= 72 + 5 \times 0.65$$

$$= 75.25$$

$$= 75.3 \text{ (1ம் தசம தானத்திற்கு)}$$

$$sc = bsy$$

$$= b\left\{ \frac{\Sigma fy^2}{\Sigma fy^2} - \left(\frac{\Sigma fy}{\Sigma f} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 5\left\{ \frac{946}{200} - \left(\frac{130}{200} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 5\{4.73 - 0.42\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 5\{4.31\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 5 \times 2.07$$

$$= 10.35$$

$$= 10.4 \text{ (1ம் தசமதானத்திற்கு)}$$

ஓராயக்குணகம் = $\frac{3(\text{இடை} - \text{இடையம்)}}{\text{நியமவிலகல்}}$

$$= \frac{3(75.25 - 74.01)}{10.35}$$

$$= \frac{3 \times 1.24}{10.35}$$

$$= 0.36$$

$$= 0.4 > 0 \text{ (1ம் தசமதானத்திற்கு)}$$

பரம்பல் நேர் ஓராயிரம்

www.lkedu.lk