FWC

தொண்டைமானாறு வெளிக்கள நிலையம் நடாத்தும்

ஐந்தாம் தவணைப் பரீட்சை - 2021

Conducted by Field Work Centre, Thondaimanaru.

5th Term Examination - 2021

தரம் :- 13 (2021)	இணைந்த கணிதம் I - A	நேரம் : மூன்றுமணித்தியாலம் பத்து நிமிடம்

சுட்டெண்						

அறிவுறுத்தல்கள்

- பகுதி - A இன் எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி - B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக்கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சைமண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி B யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

இணைந்த கணிதம் I		
பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
வினாத்தாள் I இன் மொத்தம்		

இணைந்த கணிதம் I	
இணைந்த கணிதம்II	
இறுதிப் புள்ளிகள்	

www.ikedu.lk

பகுதி – I A

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in Z^+$ இற்கும் $n^3 - n$ ஆனது 6 இன் ஒரு நிறைவெண் மடங்கென நிறுவுக.

2. $y = 2|x|$, $y = x + 1$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. சமனிலி $\frac{x+1}{|x|} > 2$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க. இதிலிருந்து, சமனிலி $\frac{x+2}{|x|} > 2$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களையும் காண்க.

www.lkedu.lk

3. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் $Arg(Z-2+2i)=\frac{7\pi}{12}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண் Z ஐ வகை குறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து, $Arg(Z-2+2i)=\frac{7\pi}{12}$ ஆகுமாறும் $|Z|$ இழிவாகுமாறும் உள்ள சிக்கலெண் Z ஐ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ வடிவில் எடுத்துரைக்க; இக்கு $r>0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

4. $a,b\in R$ இற்கு சார்பு $f(x)=ax^3+bx^2$ ஆனது $(1,-2)$ இல் ஓர் விபத்திப்புள்ளியைக் கொண்டிருப்பின் a,b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. மேலும் மேன்முகக் குழிவு, கீழ்முகக் குழிவு ஆகியவற்றைக் கொண்டிருக்கும் ஆயிடைகளையும் காண்க.

www.lkedu.lk

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{4+\cos x})\sin x}{x^3} = \dfrac{1}{4\sqrt{5}}$ எனக் காட்டுக.

6. $y = e^x + e^{-x}, x = 0,\ x = \ell n2,\ y = 0$ என்னும் வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் x அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{\pi}{8}(15 + 16\ell n2)$ எனக் காட்டுக.

www.lkedu.lk

7. அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ இற்கு அதன் மீது இருக்கும் புள்ளி $P \equiv (3\sec\theta\,, 2\tan\theta)$; இங்கு $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, இல் உள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு.
$(3\tan\theta)x + (2\sec\theta)y = 13\tan\theta\ \sec\theta$ எனக் காட்டுக.
மேலே தரப்பட்ட அதிபரவளைவுக்கு அதன் மீது இருக்கும் புள்ளி $(3\sqrt{2}, 2)$ இல் வரையப்பட்ட செவ்வன் கோட்டின் $y-$ வெட்டுத் துண்டைக் காண்க.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

8. புள்ளி A $(2, -1)$ இனூடு செல்வதும் படித்திறன் 2 ஐ உடையதுமான நேர்கோடு l மீதுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை வடிவம் $(t+2, 2t-1)$ இல் எழுதப்படலாம் எனக் காட்டுக; இங்கு $t \in R$ இதிலிருந்து, $AB = AC = \sqrt{5}$ அலகுகள் ஆகுமாறு l இல் உள்ள புள்ளிகள் B, C இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

www.lkedu.lk

9. வட்டம் s ஆனது x அச்சைபுள்ளி $(1,0)$ இல் தொடுவதுடன் அதன் மையம் முதலாம் கால் வட்டத்திலும் உள்ளது. மேலும் வட்டம் s இன் பரிதியை வட்டம் $S' \equiv x^2 + y^2 - 9 = 0$ ஆனது இருசம கூறிடுகின்றது. s இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. $\cos x + \sin 2x - \sin x = 1$ ஐத் தீர்க்க.

www.lkedu.lk

FWC

தொண்டைமானாறு வெளிக்கள நிலையம் நடாத்தும்

ஐந்தாம் தவணைப் பரீட்சை - 2021

Conducted by Field Work Centre, Thondaimanaru.

5th Term Examination - 2021

தரம் :- 13 (2021) | **இணைந்த கணிதம் I - B**

சுட்டெண்						

11. a) பூச்சியமல்லாத மெய்யெண்கள் a, b, c இற்கு $f(x) = x^2 + ax + b$ எனவும் $g(x) = x^2 + acx + bc^2$ எனவும் கொள்வோம். $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனவும் $g(x) = 0$ இன் மூலங்கள் γ, δ எனவும் கொள்வோம்.

i) $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் மெய்யானவை எனின் மாத்திரம் $g(x) = 0$ இன் மூலகங்களும் மெய்யானவை எனக் காட்டுக.

ii) $\alpha\gamma + \beta\delta,\ \alpha\delta + \beta\gamma$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாடு. $x^2 - a^2cx + 2c^2b(a^2 - 2b) = 0$ எனக்காட்டுக.

iii) $c \neq 1$ எனவும் $\alpha = \gamma$ எனவும் தரப்படின் $b(1 + c)^2 = ca^2$ எனக் காட்டுக.

b) $k \in R$ எனவும் $(x - k)^2$ ஆனது பல்லுறுப்பி $h(x)$ இன் ஒரு காரணி எனவும் கொள்வோம்.

$h(k) = h'(k) = 0$ எனக் காட்டுக.

$a, b \in R$ இற்கு $h(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$ எனவும் $(x - 1)^2$ ஆனது $h(x)$ இன் ஒரு காரணி எனவும் தரப்பட்டுள்ளன. $b = -2$ எனக் காட்டுக.

மேலும் $h(x)$ ஆனது $x^2 + 2x$ இனால் வகுக்கப்படும்போது வரும் மீதியில் உள்ள x இன் குணகம் *1* எனவும் தரப்படின் a, c இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$h(x)$ ஐ $(x - 1)^2 (x + \lambda)(x + \mu)$ வடிவில் எழுதலாம் எனக் காட்டுக; இங்கு $\lambda, \mu \in R$.

12. a) போட்டியொன்றில் *5* கலவன் பாடசாலைகள் பங்குகொள்கின்றன. ஒவ்வொரு பாடசாலையும் ஓர் ஆண் பிள்ளையையும் ஒரு பெண் பிள்ளையையும் போட்டிக்கு அனுப்புகின்றது. *10* போட்டியாளர்களில் இருந்து *4* பேர்களைக் கொண்ட குழுவொன்றைத் தெரிவு செய்ய வேண்டியுள்ளது. குழுவைத் தெரிவு செய்யத்தக்க வழிகளின் எண்ணிக்கையைப் பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் காண்க.

i) 2 ஆண்பிள்ளைகளும் *2* பெண் பிள்ளைகளும் இடம்பெற வேண்டிய போது.

ii) குறைந்தது ஒரு பெண் பிள்ளையாவது இடம்பெற வேண்டிய போது.

iii) ஒரு பாடசாலையில் இருவரும் இரு பாடசாலைகளில் ஒருவர் வீதமும் இடம்பெற வேண்டிய போது.

iv) எந்த ஒரு பாடசாலையின் இரு பிள்ளைகள் ஒன்றாக இடம்பெற முடியாதபோது.

www.ikeou.lk

b) $r \in Z^+$ இற்கு $U_r = \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)^2}$ எனவும் $V_r = \frac{A}{r^2(r+1)^2}$ எனவும் கொள்வோம்.

$r \in Z^+$ இற்கு $U_r = V_r - V_{r+1}$ ஆகுமாறு A இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $n \in Z^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{16} - \frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகின்றதெனக் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

இப்போது $r \in Z^+$ இற்கு $w_r \equiv U_r + U_{r+1}$ எனக் கொள்வோம். $\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ ஒருங்குகின்றதென உய்த்தறிந்து, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

13. a) $z = a + ib$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b \in R$ ஆகும். z இன் மட்டு $|z|$ ஐயும் உடன்புணரி $\overline{z}$ ஐயும் வரையறுக்க.

i) $z\,\overline{z} = |z|^2$ எனவும்.

ii) $z + \overline{z} = 2\,Re\,(z)$ எனவும் காட்டுக.

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம்.

$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2Re(z_1\,\overline{z}_2) + |z_2|^2$ எனவும் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $|1 - z_1\,\overline{z}_2| < |z_1 - z_2|$ எனின் எனின் மாத்திரம் $(1 - |z_1|)(1 - |z_2|) < 0$ எனக் காட்டுக.

z_1, z_2 இற்குப் பொருத்தமான பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $Z \in \mathbb{C}, z \neq 2i$ இற்கு $\left|\frac{1+2iz}{z-2i}\right| < 1$ எனின் எனின் மாத்திரம் $|z| < 1$ எனக் காட்டுக.

$\left|\frac{1+2iz}{z-2i}\right| < 1$ ஆகவும் $Arg(z) = \frac{\pi}{4}$ ஆகவும் உள்ள சிக்கலெண்கள் z ஐ ஆகண் வரிப்படத்தில் குறித்துக் காட்டுக.

b) $\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)$ எனக் காட்டுக.

m, n என்பன $1 \leq m \leq 9,\ 1 \leq n \leq 9$ ஆகுமாறுள்ள நேர்நிறைவெண்கள் எனக் கொள்வோம்.

$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)^n}{\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)^m} = i$ எனின் தமோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $m = 6$ எனவும் $n = 9$ எனவும் காட்டுக.

14) a) $x \neq -1$ இற்கு $f(x) = \frac{x}{(x+1)^3}$ எனக் கொள்வோம்.

$x \neq -1$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது

$f'(x) = \frac{1-2x}{(x+1)^4}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக்காட்டுக.

www.ikedu.lk

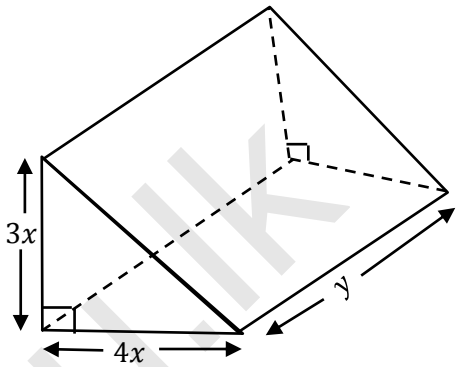
இதிலிருந்து $f(x)$ அதிகரிக்கின்ற ஆயிடையையும் $f(x)$ குறைகின்ற ஆயிடையையும் காண்க.

$x \neq -1$ இற்கு $f''(x) = \frac{6(x-1)}{(x+1)^5}$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

$y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$y = f(x)$ இன் வரைபை அணுகுகோடுகள் திரும்பற் புள்ளி, விபத்திப்புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டி பரும்படியாக வரைக.

b) செங்கோண முக்கோண குறுக்கு வெட்டுடைய செவ்வரியத் திண்மம் ஒன்றை அருகில் உள்ள உரு காட்டுகின்றது. சென்ரிமீற்றரில் அதன் பரிமாணங்கள் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளன. அதன் கனவளவு $1500cm^3$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $x^2y = 250$ எனக்காட்டுக. அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $S\,cm^2$ ஆனது $S = 12\left\{x^2 + \frac{250}{x}\right\}$ இனால்



தரப்படும் எனக்காட்டுக. $x = 5cm$ ஆக இருக்கும் போது s குறைந்த பட்சமாகும் எனக்காட்டுக.

15) a) எல்லா $x \in |R$ இற்கும்

$8x^3 + x^2 + 18x - 1 = A(x+1)(4x^2+9) + B(x-1)(4x^2+9) + x^2 - 1$ ஆகுமாறு A, B மாறிலிகள் உள்ளனவெனத் தரப்பட்டுள்ளது. A, B ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து $\frac{8x^3+x^2+18x-1}{(x^2-1)(4x^2+9)}$ ஐப் பகுதிப்பின்னங்களில் எழுதி $\int \frac{8x^3+x^2+18x-1}{(x^2-1)(4x^2+9)}dx$ ஐக் காண்க.

b) $\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x(ln2)$ எனக்காட்டுக.

மேலேயுள்ள முடிவையும் பகுதிகளாக தொகையிடலையும் பயன்படுத்தி $\int 2^x \sin x\, dx$ ஐக் காண்க.

c) a ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் சூத்திரம் $\int_o^a f(x)dx = \int_o^a f(a-x)dx$ ஐப் பயன்படுத்தி $\int_o^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து $\int_o^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi^2}{4}$ எனக் காட்டுக.

16) a) $A \equiv (2,-4), B \equiv (0,2),\ C \equiv (14,0)$ எனக் கொள்வோம்

A,B ஆகிய புள்ளிகளினூடு செல்லும் நேர்கோடு ℓ_1 எனவும் A, C ஆகிய புள்ளிகளினூடு செல்லும் நேர்கோடு ℓ_2 எனவும் கொள்வோம்.

i) ℓ_1, ℓ_2 ஆகிய நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

www.lkeduLK

ii) ℓ_1, ℓ_2 என்பன இடைவெட்டும் கோணங்களின் இரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் கண்டு புள்ளிகள் B (0,2) C(14,0) என்பன எதிர்பக்கங்களில் இருக்கும் இருகூறாக்கி ℓ இன் சமன்பாடு $2x - y - 8 = 0$ எனக் காட்டுக.

iii) $\ell \equiv 2x - y - 8 = 0$ மீதுள்ள யாதாயினும் ஒருபுள்ளியின் ஆள்கூறுகள் வடிவம். $(t + 2, 2t - 4)$ இல் எழுதப்படலாம் எனக் காட்டுக; இங்கு $t \in R$.

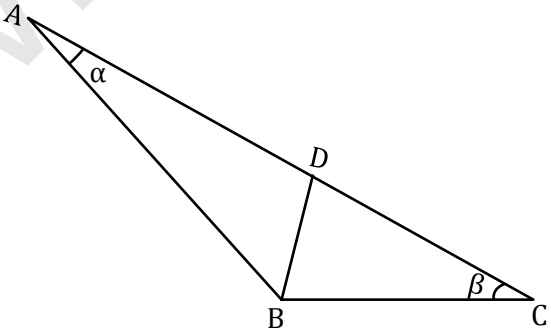
iv) மையமானது முதலாம் கால்வட்டத்தில் ℓ மீது உள்ளதும் ஆரை $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ஐ உடையதும் ℓ_1, ℓ_2 ஆகிய இரண்டையும் தொடுவதுமான வட்டம் C_1 இன் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 - 10x - 4y + \frac{13}{2} = 0$ எனக்காட்டுக.

v) $B(0,2)$ ஐ மையமாகக் கொண்டதும் $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 4y + \frac{13}{2} = 0$ ஐ நிமிர்கோண முறையாக வெட்டும் வட்டம் C_2 இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

17) a) $\tan(\alpha + \beta)$ இற்கான திரிகோண கணிதச் சமன்பாட்டை $\tan\alpha, \tan\beta$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதுக. $\tan 2\theta$ ஐ $\tan\theta$ இன் சார்பில் பெற்று $\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ எனக்காட்டுக. இறுதிச் சமன்பாட்டில் $\theta = \frac{\pi}{12}$ எனப்பிரதியிட்டு $\tan\frac{\pi}{12}$ ஆனது $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 - 0$ இன் ஒரு தீர்வு என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.
$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x + 1)(x^2 - 4x + 1)$ என மேலும் தரப்படும் போது
$\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ என உய்த்தறிக.

b) வழக்கமான குறிப்பீட்டில் ஒரு முக்கோணி ABC இற்கு சைன் நெறியைக் கூறுக.



உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC இல் $A\hat{B}C$ விரிகோணமாகும். AC மீது புள்ளி D, $AD = BC$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது.
$B\hat{C}D = \beta$, $C\hat{B}D = 2\beta$, $B\hat{A}C = \alpha$ எனவும் கொள்வோம். உகந்த முக்கோணிகளுக்கு சைன் நெறியைப் பயன்படுத்தி $\sin\beta \sin(\alpha + 3\beta) = \sin\alpha \sin 3\beta$ எனக்காட்டுக.
$\sin(\alpha + 3\beta) = \sin\alpha (3 - 4\sin^2\beta)$ என்பதை உய்தறிக.

c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ எனக்காட்டுக.

www.ikedu.lk